

3次元双曲空間内の曲面の表現公式

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

浜中光汰

指導教員 糸健太郎

2023年1月26日

序文

本修士論文は主に少人数クラスで学習した“Surfaces in Classical Geometries: A Treatment by Moving Frames”[5], “Kenmotsu type representation formula for surfaces with prescribed mean curvature in the hyperbolic 3-space”[2]の内容をまとめたサーベイ論文である。最初に本論文の背景を述べる。曲面論に関する有名な定理として, Weierstrassの定理 (Weierstrassの表現公式)がある。この定理は単連結なリーマン面 M 上の正則関数 $h: M \rightarrow \mathbb{C}$ と有理型関数 $g: M \rightarrow \mathbb{C}$ を用いて, 写像 $F: M \rightarrow \mathbb{C}^3$ を

$$F(z) = \frac{1}{2} \left[\int^z h(\zeta)(1 - g(\zeta)^2)d\zeta, \int^z ih(\zeta)(1 + g(\zeta)^2)d\zeta, \int^z 2h(\zeta)g(\zeta)d\zeta \right]$$

と定めると,

$$f = 2 \operatorname{Re} F = F + \bar{F}: M \rightarrow \mathbb{E}^3$$

は3次元ユークリッド空間 \mathbb{E}^3 内の極小曲面 (平均曲率 $H \equiv 0$ の曲面) を与えるという内容である。ただし, g が $z_0 \in M$ を k 位の極に持つとき, h は z_0 を $2k$ 位の零点に持つとする。この極小曲面はシャボン膜で例えられることもあり, 滑らかに曲げたワイヤーで閉曲線となっているものをシャボン液に浸し, 持ち上げたときにワイヤーに張られている曲面は極小曲面となることが知られている。例えば, 円を水平に固定し, その円を2つ上下に持ち, シャボン液につけてみると, くびれたツボのようなシャボン膜が張ることがわかる。この曲面は極小曲面になっており, 特にカテノイド (一葉双曲面) と呼ばれる曲面である。その後, 与えられた実数値関数 H を平均曲率に持つ \mathbb{E}^3 内の曲面の表現公式 (Kenmotsu 表現公式) が K. Kenmotsu[6] により得られた。

一方で, 3次元双曲空間 \mathbb{H}^3 内の曲面についても研究が進み, \mathbb{H}^3 内の平均曲率 H が1で一定の曲面 (これを Constant Mean Curvature の頭文字を取って CMC 1 曲面という) を与える表現公式 (Bryant 表現公式) が R. L. Bryant[3] により, 証明された。先ほど述べた \mathbb{E}^3 内の極小曲面と \mathbb{H}^3 内の CMC 1 曲面の間には 1:1 の対応がある。これを Lawson 対応という。さらに与えられた実数値関数 H を平均曲率に持つ \mathbb{E}^3 内の曲面の表現公式 (Kenmotsu 表現公式) に対応するものとして, 与えられた実数値関数 H を平均曲率に持つ \mathbb{H}^3 内の曲面の表現公式 (Kenmotsu 型表現公式) や \mathbb{H}^3 内の CMC H ($H > 1$) 曲面の表現公式 (Kenmotsu-Bryant 型表現公式), \mathbb{H}^3 内の CMC H ($H < 1$) 曲面の表現公式 (Kokubu-Bryant 型表現公式) が R. Aiyama, K. Akutagawa によって得られた。

以下, 本論文の構成を述べる。第 I 部は [5] で学習した内容を基に第 1 章から第 6 章までで構成され, 第 II 部は [2] で学習した内容を基に第 7 章から第 10 章までで構成される。

第 I 部では, \mathbb{H}^3 内の CMC 1 曲面を構成する Bryant 表現公式を目標として, 議論を進める。第 1 章, 第 2 章では, \mathbb{H}^3 内の曲面論の基本事項について説明する。第 3 章では, ミンコフスキー内積を持つ 4 次元ミンコフスキー空間 \mathbb{L}^4 を複素 2 次エルミート行列の集合 Her と同一視することで, \mathbb{H}^3 の行列モデルを導入する。第 4 章では, 第 1 章, 第 2 章の \mathbb{H}^3 内の曲面の議論を \mathbb{H}^3 の行列モデルに対応させ, 進めていく。第 5 章では, CMC 1 曲面の共形はめ込み f の局所的なフレームで, 正則かつナルであるものが取れるといった定理を示す。逆に正則ナルフレームを与えると, そのフレームは CMC 1 曲面への共形はめ

込み f を構成することを証明する (Bryant 表現公式). 第 6 章では, Weierstrass の表現公式で得られる極小曲面のフレームと, Bryant 表現公式で得られる CMC 1 曲面のフレームの関係性を述べる. 具体例として \mathbb{H}^3 内のホロ球面 (CMC 1) が \mathbb{E}^3 内の平面 (CMC 0) と対応していることを確かめる.

第 II 部では与えられた実数値関数 H を平均曲率に持つ \mathbb{H}^3 内の曲面の表現公式 (Kenmotsu 型表現公式), \mathbb{H}^3 内の CMC H ($H > 1$) 曲面の表現公式 (Kenmotsu-Bryant 型表現公式), \mathbb{H}^3 内の CMC H ($H < 1$) 曲面の表現公式 (Kokubu-Bryant 型表現公式) を目標として議論を進める. 第 7 章では Iwasawa 分解を用いて normal Gauss 写像 G の定義を与え, この normal Gauss 写像は \mathbb{E}^3 内の曲面の表現公式 (Kenmotsu 表現公式) における Gauss 写像 g の対応物であることを説明する. したがって \mathbb{H}^3 内の曲面の表現公式 (Kenmotsu 型表現公式) について \mathbb{E}^3 内の曲面の表現公式 (Kenmotsu 表現公式) と同様に議論することができる. これが Iwasawa 分解を用いた動機である. 第 8 章では normal Gauss 写像 G と平均曲率 H が満たす 2 階偏微分方程式を導く. 実数値関数 H が与えられ, この 2 階偏微分方程式を満たすように写像 G を与えるとき, 平均曲率 H の \mathbb{H}^3 内の曲面を構成することができるという Kenmotsu 型表現公式を得る. 第 9 章では \mathbb{H}^3 内の CMC H ($H \geq 1$) 曲面と \mathbb{E}^3 内の CMC $H_0 = \sqrt{H^2 - 1}$ 曲面の間に 1 : 1 対応があるという Lawson 対応から, \mathbb{H}^3 内の CMC H ($H > 1$) 曲面を構成する Kenmotsu-Bryant 型表現公式を得る. 同様の議論で, \mathbb{H}^3 内の CMC H ($H < 1$) 曲面と断面曲率 $-c_0^2$ ($c_0 = \sqrt{1 - H^2}$) の 3 次元双曲空間 $\mathbb{H}^3(-c_0^2)$ 内の極小曲面の間に 1 : 1 対応があるという Lawson 対応から Kokubu-Bryant 型表現公式を導く. 具体例として Kenmotsu-Bryant 型表現公式を用いて, \mathbb{H}^3 内の CMC H ($H > 1$) 曲面を計算し, 構成した. 第 10 章では与えられた実数値関数 H ($H \neq 0$) を平均曲率に持つ \mathbb{E}^3 内の曲面の表現公式 (Kenmotsu 表現公式) について第 7 章から第 9 章までの議論と同じ枠組みで証明を再構成する.

最後に私が \mathbb{H}^3 内の曲面論について学習するに至った経緯を述べる. 少人数クラスでは修士課程 1 年次には [4] を用いて, 多様体や微分形式の基礎から \mathbb{E}^3 , 3 次元ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{1,2}$, \mathbb{S}^3 , \mathbb{H}^3 内の曲面論の基礎や \mathbb{E}^3 内の極小曲面の表現公式 (Weierstrass の表現公式) について学んだ. 修士課程 2 年次には [3] や [5] で, \mathbb{H}^3 内の CMC 1 曲面について学んだ. \mathbb{H}^3 内の CMC 1 曲面が \mathbb{E}^3 内の極小曲面と 1 : 1 対応があることに興味を持ち, 平均曲率が $H \equiv 1$ ではない場合の \mathbb{H}^3 内の曲面の表現公式について述べられている [2] を学ぶに至った. これが本論文の動機付けである.

本修士論文を執筆するにあたり, 学部 4 年次からお世話になりました, 糸健太郎先生に深く感謝申し上げます. 少人数クラスで学習する際に理解できなかった点や疑問に思った点を丁寧に教えていただきました. 本修士論文に関しても細かく添削していただき本当に有難うございました. また, 少人数クラスで修士 1 年次から 2 年間ともに学習してきた Liu Keheng 君を初めとする多くの同窓生の皆様に深く感謝いたします.

目次

| | |
|---|-----------|
| 序文 | 1 |
| 第 I 部 \mathbb{H}^3 内の CMC 1 曲面の表現公式 | 5 |
| 1 \mathbb{H}^3 内の曲面の基本事項 | 5 |
| 1.1 3次元双曲空間 \mathbb{H}^3 | 5 |
| 1.2 曲面のフレーム, モーレーカルタン形式 | 6 |
| 1.3 構造方程式 (Gauss · Codazzi 方程式) | 7 |
| 1.4 曲面の first order フレーム | 7 |
| 1.5 カルタンの補題 | 8 |
| 1.6 平均曲率, Gauss 曲率, ホップ不変量, hyperbolic Gauss 写像 | 9 |
| 2 Gauss · Codazzi 方程式 | 11 |
| 2.1 曲面の adapted フレーム | 11 |
| 2.2 ホップ微分 | 13 |
| 2.3 ω_2^1 の表し方 | 14 |
| 2.4 u, H, h を用いた Gauss · Codazzi 方程式 | 15 |
| 3 \mathbb{H}^3 内の行列モデル $\mathbb{H}(3)$ | 16 |
| 3.1 導入 | 16 |
| 3.2 \mathbb{H}^3 の行列モデル $\mathbb{H}(3)$ | 16 |
| 3.3 2 : 1 写像 $\sigma : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{SO}_+(1, 3)$ | 16 |
| 3.4 σ の単位元における微分写像 $d\sigma_I : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{o}(1, 3)$ | 18 |
| 3.5 可換図式 | 20 |
| 4 $\mathbb{H}(3)$ 内の曲面 | 22 |
| 4.1 f に沿うフレーム | 22 |
| 4.2 f に沿う first order フレーム | 22 |
| 4.3 Oriented, adapted フレーム, hyperbolic Gauss 写像 | 23 |
| 4.4 First order フレームによる Codazzi 方程式, hyperbolic Gauss 写像 | 24 |
| 5 Bryant 表現公式 | 27 |
| 5.1 CMC 1 曲面における正則ナルフレームの存在 | 27 |
| 5.2 正則ナルフレームによる曲面 | 28 |
| 5.3 Bryant 表現公式 | 29 |
| 6 \mathbb{E}^3 内の極小曲面との関係 | 33 |
| 6.1 行列モデルを用いた極小曲面の構成 | 33 |
| 6.2 \mathbb{E}^3 内の極小曲面と \mathbb{H}^3 内の CMC 1 曲面の関係 | 35 |
| 6.3 具体例 | 35 |

第II部 与えられた関数 H を平均曲率を持つ \mathbb{H}^3 内の曲面の表現公式 38

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 7 | \mathbb{H}^3 内の曲面の normal Gauss 写像 | 38 |
| 7.1 | Iwasawa 分解 | 38 |
| 7.2 | \mathbb{H}^3 の上半空間モデル \mathbb{H}_+^3 | 39 |
| 7.3 | 曲面の normal Gauss 写像 | 41 |
| 7.4 | Normal Gauss 写像と hyperbolic Gauss 写像の関係 | 42 |
| 7.5 | $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 値のモーレーカルタン形式 $E^{-1}dE$ | 44 |
| 8 | Kenmotsu 型表現公式 | 45 |
| 8.1 | \mathfrak{g} 値モーレーカルタン形式 $\mathcal{S}^{-1}d\mathcal{S}$ | 45 |
| 8.2 | 可積分方程式と Gauss · Codazzi 方程式 | 46 |
| 8.3 | G と H の満たす方程式 | 48 |
| 8.4 | ω の表し方 | 50 |
| 8.5 | M 上の誘導計量とホップ微分 | 51 |
| 8.6 | G と H が満たす 2 階偏微分方程式 | 53 |
| 8.7 | Kenmotsu 型表現公式 | 55 |
| 8.8 | $\mathbb{H}^3(-c^2)$ の場合 | 56 |
| 9 | Adjusted Gauss 写像を用いた \mathbb{H}^3 内の CMC H 曲面の表現公式 | 59 |
| 9.1 | 導入 | 59 |
| 9.2 | Adapted フレームの集合族 | 59 |
| 9.3 | Kenmotsu-Bryant 型表現公式 | 60 |
| 9.4 | Kokubu-Bryant 型表現公式 | 62 |
| 9.5 | 具体例 | 63 |
| 10 | 3次元ユークリッド空間 \mathbb{E}^3 内の曲面に対する Kenmotsu 表現公式 | 66 |
| 10.1 | f の adapted フレーム | 66 |
| 10.2 | モーレーカルタン形式 $E^{-1}dE$ | 66 |
| 10.3 | g と H の満たす方程式 | 67 |
| 10.4 | ω の表し方 | 68 |
| 10.5 | GH 方程式 | 68 |
| 10.6 | Kenmotsu 表現公式 | 69 |
| | 参考文献 | 71 |

第I部

\mathbb{H}^3 内の CMC 1 曲面の表現公式

第I部は“Surfaces in Classical Geometries: A Treatment by Moving Frames”[5]の7章, 11章で学習した内容を基に第1章から第6章までで構成される. ここでは第5章のBryant表現公式を目標に進めていく. 第1章, 第2章では3次元双曲空間 \mathbb{H}^3 内の曲面論について述べている. 第3章で \mathbb{H}^3 の行列モデル $\mathbb{H}(3)$ を導入する. 第4章では $\mathbb{H}(3)$ 内の曲面についての議論を \mathbb{H}^3 内の曲面についての議論とうまく対応させ, 進めていく. そして, 第5章では $\mathbb{H}(3)$ 内のCMC 1曲面の表現公式であるBryant表現公式を証明する. 第6章では \mathbb{E}^3 内の極小曲面(CMC 0)と $\mathbb{H}(3)$ 内のCMC 1曲面の関係について述べ, \mathbb{E}^3 内の平面と $\mathbb{H}(3)$ 内のホロ球面が対応することを具体例として計算した. また, [5]を学習する際に, Bryant表現公式の原著である[3]も学習したため, 必要であれば, こちらも参考にしていきたい.

1 \mathbb{H}^3 内の曲面の基本事項

1.1 3次元双曲空間 \mathbb{H}^3

定義 1.1. ([5], p155) \mathbb{R}^4 においてミンコフスキー内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $\mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3), \mathbf{y} = (y^0, y^1, y^2, y^3) \in \mathbb{R}^4$ に対して,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -x^0y^0 + x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$$

で定める. \mathbb{R}^4 にミンコフスキー内積を与えたものを4次元ミンコフスキー空間といい, \mathbb{L}^4 で表す. 3次元双曲空間 \mathbb{H}^3 を

$$\mathbb{H}^3 = \{(x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{L}^4 \mid -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -1, x^0 > 0\}$$

と定義する. $I_{1,3} := \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ とおき, $O(1, 3)$ を

$$O(1, 3) = \{A \in GL(4, \mathbb{R}) \mid {}^t A I_{1,3} A = I_{1,3}\}$$

と定める. $O(1, 3)$ は $A = (a_{ij}) \in O(1, 3)$ に対して, $\det A = 1$ か $\det A = -1$ と a_1^1 の符号が正か負かで4つの連結成分に分けることができる. 単位元が含まれる連結集合を $SO_+(1, 3)$ と定める. つまり,

$$SO_+(1, 3) = \{A \in O(1, 3) \mid \det A = 1, a_1^1 > 0\}$$

と定義する.

1.2 曲面のフレーム, モーレーカルタン形式

定義 1.2. M を滑らかな曲面とし, $U \subset M$ を開集合とする. $\mathbf{x}: M \rightarrow \mathbb{H}^3$ を滑らかなはめ込みとする. 写像 $e = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3): U \rightarrow \mathrm{SO}_+(1, 3)$ に関して, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ は $T_x\mathbb{H}^3$ を張り, $\mathbf{e}_0 = \mathbf{x}$ を満たすとき, e を \mathbf{x} に沿うフレーム場という. 今後, フレーム場を単にフレームということとする. U 上の $\mathfrak{o}(1, 3)$ に値を持つ 1 次形式 Ω を

$$\Omega = (\omega_j^i) := e^{-1}de$$

と定める. ただし, Ω の (i, j) 成分が ω_{j-1}^{i-1} であることに注意する. すなわち $j = 0, 1, 2, 3$ に対して,

$$de_j = \mathbf{e}_i \omega_j^i \quad (1.1)$$

と定める. Ω をモーレーカルタン形式という. ここで (1.1) はアインシュタインの縮約法を使っている. すなわち,

$$de_j = \sum_{i=0}^3 \mathbf{e}_i \omega_j^i$$

であることに注意する.

Ω が実際に $\mathfrak{o}(1, 3)$ に値を持つことを確かめる.

命題 1.3. ([4], Exercise 3.50.) $\Omega = (\omega_j^i) = e^{-1}de$ について

$$\omega_j^i = \begin{cases} 0 & (i = j = 0) \\ -\omega_i^j & (1 \leq i, j \leq 3) \\ \omega_i^j & (i, j \text{ の一方が } 0) \end{cases} \quad (1.2)$$

が成立する. $\omega_0^i = \omega_i^0$ を双対形式といい, ω^i と表記する. よって Ω は

$$\Omega = (\omega_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega_1^1 & 0 & -\omega_1^2 & -\omega_1^3 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & 0 & -\omega_2^3 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 & 0 \end{pmatrix}$$

と表せる.

Proof. $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ は \mathbb{L}^4 内の正規直交基底であるから,

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \begin{cases} 1 & (i = j \neq 0) \\ -1 & (i = j = 0) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

が成立する. i, j を固定し, これを外微分すると,

$$\begin{aligned} 0 &= d(\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle) = \langle d\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle + \langle \mathbf{e}_i, d\mathbf{e}_j \rangle \\ &= \langle \mathbf{e}_k \omega_i^k, \mathbf{e}_j \rangle + \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k \omega_j^k \rangle \\ &= \omega_i^j \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle + \omega_j^i \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle \end{aligned}$$

よって (1.2) が示された. □

1.3 構造方程式 (Gauss · Codazzi 方程式)

命題 1.4. ([4], Exercise 3.20.) フレーム $e = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) : U \rightarrow \text{SO}_+(1, 3)$, モーレーカルタン形式 $\Omega = (\omega_j^i) = e^{-1}de$ とすると,

$$d\omega_j^i = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k \quad (1.3)$$

が成立する. これを構造方程式という. ただし (1.3) は k について和をとっていることに注意する. 特に

$$d\omega_2^1 = \omega_1^3 \wedge \omega_2^3 - \omega^1 \wedge \omega^2 \quad (1.4)$$

を Gauss 方程式といい,

$$d\omega_1^3 = \omega_2^3 \wedge \omega_2^1 - \omega^3 \wedge \omega^1 \quad (1.5)$$

$$d\omega_2^3 = -\omega_1^3 \wedge \omega_2^1 - \omega^3 \wedge \omega^2 \quad (1.6)$$

を Codazzi 方程式という.

Proof. (1.1) を外微分すると

$$0 = d(\mathbf{e}_i \omega_j^i) = d\mathbf{e}_i \omega_j^i + \mathbf{e}_i d\omega_j^i = \mathbf{e}_k \omega_i^k \wedge \omega_j^i + \mathbf{e}_i d\omega_j^i = \mathbf{e}_i (\omega_k^i \wedge \omega_j^k + d\omega_j^i)$$

より,

$$d\omega_j^i = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k$$

を得る. □

1.4 曲面の first order フレーム

定義 1.5. ([5], p166) M を滑らかな曲面, $U \subset M$ を開集合とし, $\mathbf{x} : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ を滑らかなはめ込みとする. \mathbf{x} に沿うフレームを $e : U \rightarrow \text{SO}_+(1, 3)$ とする. e が first order であるとは, e がはめ込み \mathbf{x} に沿うフレームで, \mathbf{e}_3 が $d\mathbf{x}$ に直交しているときをいう. これは $d\mathbf{x} = d\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_1\omega^1 + \mathbf{e}_2\omega^2$ と書けることを意味し, つまり,

$$\omega^3 = 0 \quad (1.7)$$

と同値である. ここで $\omega_0^3 = \omega^3$ と表記している.

e が first order であるとき, ω_1^3, ω_2^3 についてどのようなことが分かるか考えていく.

命題 1.6. ([4], Exercise 4.19) ω^1, ω^2 は U 上で線形独立である.

Proof. U 上の任意の実数値関数を f_1, f_2 とし, $f_1\omega^1 + f_2\omega^2 = 0$ とする. 任意の $x \in U$ に対して, $v_1, v_2 \in T_x U$ を $d\mathbf{x}(v_1) = \mathbf{e}_1(x), d\mathbf{x}(v_2) = \mathbf{e}_2(x)$ を満たすようにとる. v_1, v_2 の取り方から,

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1(x) &= d\mathbf{x}(v_1) = \mathbf{e}_1(x)\omega^1(v_1) + \mathbf{e}_2(x)\omega^2(v_1) \\ \mathbf{e}_2(x) &= d\mathbf{x}(v_2) = \mathbf{e}_1(x)\omega^1(v_2) + \mathbf{e}_2(x)\omega^2(v_2)\end{aligned}$$

より

$$\omega^i(v_j) = \delta_{ij} \quad (1.8)$$

が分かる. これより,

$$\begin{aligned}0 &= f_1(x)\omega^1(v_1) + f_2(x)\omega^2(v_1) = f_1(x) \\ 0 &= f_1(x)\omega^1(v_2) + f_2(x)\omega^2(v_2) = f_2(x)\end{aligned}$$

を得る. よって ω^1, ω^2 は線形独立である. \square

(1.8) より, ω^1, ω^2 を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ の dual coframe と呼ばれる. この命題より, ω_1^3, ω_2^3 は ω^1, ω^2 の線形結合でかけるが, 実は ω_1^3, ω_2^3 は U 上の実数値関数 a, b, c を用いて,

$$\begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

と表すことができる. これを示すために次のカルタンの補題を用意する.

1.5 カルタンの補題

補題 1.7. (カルタンの補題)([4], Lemma 2.49) M を 2 次元多様体とし, η^1, η^2 を線形独立な M 上の滑らかな 1 次形式とする. ϕ_1, ϕ_2 は M 上の滑らかな 1 次形式で

$$\phi_1 \wedge \eta^1 + \phi_2 \wedge \eta^2 = 0 \quad (1.9)$$

を満たすとする. このとき,

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

を満たす滑らかな関数 $\{h_{ij} = h_{ji} : M \rightarrow \mathbb{R} \mid 1 \leq i, j \leq 2\}$ が存在する.

Proof. $x \in M$ として, $(T_x M)^*$ を $T_x M$ 上の実数値関数の集合とする. η^1, η^2 は線形独立で, $\dim M = 2$ より, (η^1, η^2) は各 $x \in M$ に対して, $(T_x M)^*$ の基底である. このとき,

$$\phi_1 = h_{11}\eta^1 + h_{12}\eta^2, \quad \phi_2 = h_{21}\eta^1 + h_{22}\eta^2$$

が成立する. (1.9) より,

$$\begin{aligned} 0 &= \phi_1 \wedge \eta^1 + \phi_2 \wedge \eta^2 \\ &= (h_{11}\eta^1 + h_{12}\eta^2) \wedge \eta^1 + (h_{21}\eta^1 + h_{22}\eta^2) \wedge \eta^2 \\ &= (h_{21} - h_{12})\eta^1 \wedge \eta^2 \end{aligned}$$

が成立する. η^1, η^2 は線形独立より,

$$h_{12} = h_{21}$$

が成立. よってカルタンの補題は示された. \square

e が first order を仮定すると, (1.3) より,

$$0 = d\omega^3 = -\omega_1^3 \wedge \omega^1 - \omega_2^3 \wedge \omega^2$$

が成立する. ω^1, ω^2 は線形独立だから, カルタンの補題 (補題 1.7) より,

$$\begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

という関係が成り立つ. Codazzi 方程式 (1.5), (1.6) は $\omega^3 = 0$ より,

$$\begin{aligned} d\omega_1^3 &= \omega_2^3 \wedge \omega_2^1 \\ d\omega_2^3 &= -\omega_1^3 \wedge \omega_2^1 \end{aligned}$$

となり, Gauss 方程式 (1.4) は

$$\begin{aligned} d\omega_2^1 &= (h_{11}\omega^1 + h_{12}\omega^2) \wedge (h_{21}\omega^1 + h_{22}\omega^2) - \omega^1 \wedge \omega^2 \\ &= (h_{11}h_{22} - (h_{12})^2 - 1)\omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned}$$

となる.

1.6 平均曲率, Gauss 曲率, ホップ不変量, hyperbolic Gauss 写像

定義 1.8. x の平均曲率 H と Gauss 曲率 K , ホップ不変量 h を

$$H = \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22}), \quad K = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 - 1, \quad h = \frac{1}{2}(h_{11} - h_{22}) - ih_{12}$$

と定義する.

補足 1.9. Gauss 曲率 K を

$$d\omega_2^1 = K\omega^1 \wedge \omega^2$$

を満たす K と定義する場合もある. また, 簡単な計算により,

$$K = -1 + H^2 - |h|^2$$

が成立することも分かる. $S = (h_{ij})$ とすると, $H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} S$, $K = -1 + \det S$ と表せる. Gauss 曲率に現れている -1 は \mathbb{H}^3 の断面曲率を表している. H や K はフレームの取り方によらないことがわかるが, h はフレームの取り方によることが分かる.

定義 1.10. ([5], p162, Definition 6.3.) \mathbb{L}^4 のナルコーン N^3 を

$$N^3 = \{\mathbf{n} \in \mathbb{L}^4 \setminus \{0\} \mid \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 0\}$$

で定める. \mathbb{H}^3 の無限遠点集合に対応する \mathbb{S}^2 は

$$\mathbb{S}_\infty^2 = N^3 / \mathbb{R}^\times$$

で与えられる. ただし, $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とする.

定義 1.11. ([5], Definition 6.32, p54-55) $\mathbf{x} : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ を滑らかなはめ込みとする. $x \in M$ をとる. \mathbf{x} の単位法ベクトル場を $N : M \rightarrow \mathbb{L}^4$ とする. すなわち $N(x) \in \mathbf{x}(x)^\perp$ である. $g : M \rightarrow \mathbb{S}_\infty^2 = N^3 / \mathbb{R}^\times$ を

$$g(x) = [\mathbf{x}(x) + N(x)]$$

で定義する. これを \mathbf{x} の **hyperbolic Gauss 写像** という. また,

$$\mathbf{I} = \langle d\mathbf{x}, d\mathbf{x} \rangle, \quad \mathbf{II} = -\langle d\mathbf{x}, dN \rangle$$

を \mathbf{x} の第一基本形式 (誘導計量), 第二基本形式という.

補足 1.12. ([5], Definition 6.32) $\mathbf{e}_3 = N$ を満たすような \mathbf{x} に沿う first order なフレーム $e : U \rightarrow \text{SO}_+(1, 3)$ をとる. $x \in M$ をとると, この hyperbolic Gauss 写像 $g : M \rightarrow \mathbb{S}_\infty^2 = N^3 / \mathbb{R}^\times$ は

$$g(x) = [\mathbf{e}_0(x) + \mathbf{e}_3(x)]$$

とかける.

2 Gauss · Codazzi 方程式

2.1 曲面の adapted フレーム

定理 2.1. ([5], Theorem 7.4.) M を 2次元リーマン多様体とし, $\mathbf{x} : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ を滑らかなはめ込みとする. このとき, \mathbf{x} の第一基本形式 \mathbf{I} がある滑らかな実数値関数 $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて,

$$\mathbf{I} = e^{2u} dzd\bar{z}$$

となる局所座標系 (U, z) が存在する. この複素座標 z を等温座標という.

この定理より, 2次元リーマン多様体はリーマン面 (複素 1次元多様体) とみなせる.

定義 2.2. M をリーマン面とし, $\mathbf{x} : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ を滑らかなはめ込みとする. \mathbf{x} の第一基本形式 \mathbf{I} が複素座標 z とある滑らかな実数値関数 $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて,

$$\mathbf{I} = e^{2u} dzd\bar{z}$$

と書けるとき, \mathbf{x} は共形 (conformal) であるという.

第一基本形式 \mathbf{I} は

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \langle d\mathbf{x}, d\mathbf{x} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_z, \mathbf{x}_z \rangle dzdz + 2\langle \mathbf{x}_z, \mathbf{x}_{\bar{z}} \rangle dzd\bar{z} + \langle \mathbf{x}_{\bar{z}}, \mathbf{x}_{\bar{z}} \rangle d\bar{z}d\bar{z} \end{aligned}$$

と表せるから, \mathbf{x} が共形であるとき,

$$\langle \mathbf{x}_z, \mathbf{x}_z \rangle = \langle \mathbf{x}_{\bar{z}}, \mathbf{x}_{\bar{z}} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{x}_z, \mathbf{x}_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{2}e^{2u} \quad (2.1)$$

が成立する. 以下 M をリーマン面, $\mathbf{x} : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ は滑らかな共形はめ込みとする.

定義 2.3. \mathbf{x} に沿う first order フレーム $e = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) : U \rightarrow \text{SO}_+(1, 3)$ が oriented であるとは, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ が M の向きと一致するときをいう. すなわち, 任意の $x \in U$ に対して, $v_1, v_2 \in T_x U$ を $d\mathbf{x}(v_1) = \mathbf{e}_1(x), d\mathbf{x}(v_2) = \mathbf{e}_2(x)$ を満たすようにとると,

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \text{ が } M \text{ の向きと一致する} \Leftrightarrow (v_1, v_2) \text{ が } M \text{ の向きと一致する}$$

が成立する.

定義 2.4. ([5], Definition 7.22) \mathbf{x} に沿う first order フレーム $e = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) : U \rightarrow \text{SO}_+(1, 3)$ が M 内の局所座標 (U, z) に adapted であるとは, ある U 上の滑らかな実数値関数 u が存在して,

$$\omega^1 + i\omega^2 = e^u dz \quad (2.2)$$

を満たすときをいう. ここで, ω^1, ω^2 は $d\mathbf{x} = \mathbf{e}_1\omega^1 + \mathbf{e}_2\omega^2$ を満たすものとする.

補題 2.5. ([5], Lemma 7.23) $\mathbf{x} : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ を共形はめ込みとする. このとき, M の局所座標 (U, z) に adapted なフレーム $e : U \rightarrow \text{SO}_+(1, 3)$ が一意的に存在する.

Proof. まず (U, z) に adapted なフレーム $e : U \rightarrow \text{SO}_+(1, 3)$ の存在性を示す. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を

$$\mathbf{e}_1 = e^{-u}\mathbf{x}_x = e^{-u}(\mathbf{x}_z + \mathbf{x}_{\bar{z}}), \quad \mathbf{e}_2 = e^{-u}\mathbf{x}_y = ie^{-u}(\mathbf{x}_z - \mathbf{x}_{\bar{z}}) \quad (2.3)$$

と定める. $\mathbf{x}_z, \mathbf{x}_{\bar{z}}$ は \mathbf{x} に直交するから, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ は \mathbf{x} に直交する. \mathbf{x} が共形はめ込みだから, (2.1) より,

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 0$$

が成立する. (2.3) より,

$$\mathbf{x}_z = \frac{1}{2}e^u(\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2), \quad \mathbf{x}_{\bar{z}} = \frac{1}{2}e^u(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2)$$

となる.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1\omega^1 + \mathbf{e}_2\omega^2 &= d\mathbf{x} = \mathbf{x}_z dz + \mathbf{x}_{\bar{z}} d\bar{z} \\ &= \mathbf{e}_1 \frac{e^u}{2}(dz + d\bar{z}) - \mathbf{e}_2 i \frac{e^u}{2}(dz - d\bar{z}) \end{aligned}$$

により, 係数を比べると,

$$\omega^1 = \frac{e^u}{2}(dz + d\bar{z}), \quad \omega^2 = -i \frac{e^u}{2}(dz - d\bar{z})$$

を得る. この ω^1, ω^2 は (2.2) を満たす. \mathbf{e}_3 を $(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ が \mathbb{L}^4 の正規直交基底で $(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ の行列式が 1 になるように選ぶと, (U, z) に adapted なフレーム $e = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) : U \rightarrow \text{SO}_+(1, 3)$ を得る. よって存在性は示された.

次に一意性を示す. (U, z) に adapted なフレーム $e, \tilde{e} : U \rightarrow \text{SO}_+(1, 3)$ をとり, それぞれの双対形式を $\omega^i, \tilde{\omega}^i$ とかく. まずフレーム e とその双対形式 ω^i に注目する. e は (U, z) に adapted なので, (2.2) が成立する, つまり,

$$dz = e^{-u}(\omega^1 + i\omega^2), \quad d\bar{z} = e^{-u}(\omega^1 - i\omega^2)$$

が成立する. よって

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1\omega^1 + \mathbf{e}_2\omega^2 &= d\mathbf{x} = \mathbf{x}_z dz + \mathbf{x}_{\bar{z}} d\bar{z} \\ &= e^{-u}(\mathbf{x}_z + \mathbf{x}_{\bar{z}})\omega^1 - ie^{-u}(\mathbf{x}_z - \mathbf{x}_{\bar{z}})\omega^2 \end{aligned}$$

より, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ は (2.3) のように表されることが分かる. フレーム \tilde{e} に関しても同様に, $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2$ は (2.3) のように表されることが分かる. よって一意性は示された. \square

命題 2.6. ([5], p210) $\mathbf{x} : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ を共形はめ込みとする. フレーム e は first order で複素座標 (U, z) に adapted であるとする. 平均曲率を H とし, ホップ不変量を h とする. このとき,

$$\omega_1^3 - i\omega_2^3 = h(\omega^1 + i\omega^2) + H(\omega^1 - i\omega^2) = he^u dz + He^u d\bar{z} \quad (2.4)$$

と書ける.

Proof. カルタンの補題 (補題 1.7) より,

$$\begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

を満たす U 上の実数値関数 $h_{ij} = h_{ji}$ ($i, j = 1, 2$) が存在する.

$$\begin{aligned} \omega_1^3 - i\omega_2^3 &= (h_{11}\omega^1 + h_{12}\omega^2) - i(h_{21}\omega^1 + h_{22}\omega^2) \\ &= \frac{1}{2}(h_{11} - h_{22})(\omega^1 + i\omega^2) + \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22})(\omega^1 - i\omega^2) - ih_{12}(\omega^1 + i\omega^2) \\ &= h(\omega^1 + i\omega^2) + H(\omega^1 - i\omega^2) \\ &= he^u dz + He^u d\bar{z} \end{aligned}$$

が成立する. よって示された. □

2.2 ホップ微分

定義 2.7. ([5], Definition 7.24) M 上の局所座標 (U, z) に対して, z に関する \mathbf{x} のホップ不変量 h を (U, z) に adapted なフレームに関する \mathbf{x} のホップ不変量とする.

adapted なフレームに対して, (2.3), (2.4) より,

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1\omega_3^1 + \mathbf{e}_2\omega_3^2 \\ &= -e^{-u}(\mathbf{x}_z + \mathbf{x}_{\bar{z}})\omega_1^3 - ie^{-u}(\mathbf{x}_z - \mathbf{x}_{\bar{z}})\omega_2^3 \\ &= -e^{-u}(\omega_1^3 + i\omega_2^3)\mathbf{x}_z - e^{-u}(\omega_1^3 - i\omega_2^3)\mathbf{x}_{\bar{z}} \\ &= -(Hdz + \bar{h}d\bar{z})\mathbf{x}_z - (hdz + Hd\bar{z})\mathbf{x}_{\bar{z}} \end{aligned}$$

を得る. これを用いて $\mathbf{II} = -\langle d\mathbf{x}, d\mathbf{e}_3 \rangle$ を

$$\mathbf{II} = \mathbf{II}^{2,0} + \mathbf{II}^{1,1} + \mathbf{II}^{0,2}$$

と $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$ 型微分形式に分解し, それぞれ求めていく.

命題 2.8. ([5], p211)

$$\mathbf{II}^{2,0} = \frac{1}{2}e^{2u}hdzdz = \overline{\mathbf{II}^{0,2}}, \quad \mathbf{II}^{1,1} = e^{2u}Hdzd\bar{z} \quad (2.5)$$

を得る. $\mathbf{II}^{2,0}$ をホップ微分という. ホップ微分は座標の取り方によらない.

Proof. (2.1) より,

$$\begin{aligned} \mathbf{II} &= -\langle d\mathbf{x}, d\mathbf{e}_3 \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_z dz + \mathbf{x}_{\bar{z}} d\bar{z}, (Hdz + \bar{h}d\bar{z})\mathbf{x}_z + (hdz + Hd\bar{z})\mathbf{x}_{\bar{z}} \rangle \\ &= \frac{1}{2}e^{2u}dz(hdz + Hd\bar{z}) + \frac{1}{2}e^{2u}d\bar{z}(Hdz + \bar{h}d\bar{z}) \\ &= \frac{1}{2}e^{2u}hdzdz + e^{2u}Hdzd\bar{z} + \frac{1}{2}e^{2u}\bar{h}d\bar{z}d\bar{z} \end{aligned}$$

が成立する. よって

$$\mathbf{\Pi}^{2,0} = \frac{1}{2}e^{2u}hdzdz = \overline{\mathbf{\Pi}^{0,2}}, \quad \mathbf{\Pi}^{1,1} = e^{2u}Hdzd\bar{z}$$

を得る. □

2.3 ω_2^1 の表し方

2.1 節の記号をそのまま用いると, ω_2^1 について次の命題が分かる.

命題 2.9. ([5], p211) ω_2^1 は

$$\omega_2^1 = i(u_z dz - u_{\bar{z}} d\bar{z}) \tag{2.6}$$

と表すことができる.

Proof. (2.2) を外微分する.

$$\begin{aligned} -\omega_2^1 \wedge \omega^2 - i\omega_1^2 \wedge \omega^1 &= u_z e^u d\bar{z} \wedge dz \\ i\omega_2^1 \wedge (\omega^1 + i\omega^2) &= u_z e^u d\bar{z} \wedge dz \end{aligned}$$

よって $\omega_2^1 = a(z)dz - iu_{\bar{z}}d\bar{z}$ という形になることがわかる. また $\omega^1 - i\omega^2 = e^u d\bar{z}$ を外微分すると,

$$\begin{aligned} -\omega_2^1 \wedge \omega^2 + i\omega_1^2 \wedge \omega^1 &= u_z e^u dz \wedge d\bar{z} \\ -i\omega_2^1 \wedge (\omega^1 - i\omega^2) &= u_z e^u dz \wedge d\bar{z} \end{aligned}$$

となるので,

$$\omega_2^1 = i(u_z dz - u_{\bar{z}} d\bar{z})$$

を得る. □

一方で (2.4), (2.6) より,

$$\begin{aligned} d(\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}_0\omega^1 + \mathbf{e}_2\omega_1^2 + \mathbf{e}_3\omega_1^3 - i(\mathbf{e}_0\omega^2 + \mathbf{e}_1\omega_2^1 + \mathbf{e}_3\omega_2^3) \\ &= \mathbf{e}_0(\omega^1 - i\omega^2) - i\omega_2^1(\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2) + \mathbf{e}_3(\omega_1^3 - i\omega_2^3) \\ &= \mathbf{x}e^u d\bar{z} + (u_z dz - u_{\bar{z}} d\bar{z})(\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2) + \mathbf{e}_3(he^u dz + He^u d\bar{z}) \\ &= (u_z(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) + he^u \mathbf{e}_3)dz + (e^u \mathbf{x} - u_{\bar{z}}(\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2) + He^u \mathbf{e}_3)d\bar{z} \end{aligned}$$

が分かる.

2.4 u, H, h を用いた Gauss · Codazzi 方程式

定理 2.10. ([5], Theorem 7.26) $\mathbf{x} : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ を共形はめ込みとし, M の局所座標 (U, z) をとる. h を z に関するホップ不変量, H を平均曲率とする. このとき, Gauss 方程式は

$$-4e^{-2u}u_{z\bar{z}} = -1 + H^2 - |h|^2 \quad (2.7)$$

と書ける. Codazzi 方程式は

$$h_{\bar{z}} + 2hu_{\bar{z}} = H_z \quad (2.8)$$

と書ける.

Proof. 補題 2.5 より, (2.6) を満たすので,

$$d\omega_2^1 = -2iu_{z\bar{z}}dz \wedge d\bar{z} \quad (2.9)$$

が成立する. また, Gauss 曲率を K として,

$$d\omega_2^1 = K\omega^1 \wedge \omega^2 = \frac{i}{2}K(\omega^1 + i\omega^2) \wedge (\omega^1 - i\omega^2) = \frac{i}{2}Ke^{2u}dz \wedge d\bar{z} \quad (2.10)$$

が成立する. (2.9), (2.10) より, $K = -4e^{-2u}u_{z\bar{z}}$ が成立. 補足 1.9 より, $K = -1 + H^2 - |h|^2$ だった. よって (2.7) は示された.

次に Codazzi 方程式は

$$\begin{aligned} d(\omega_3^1 - i\omega_3^2) &= -\omega_2^1 \wedge \omega_3^2 + i\omega_1^2 \wedge \omega_3^1 \\ &= -i\omega_2^1 \wedge (\omega_3^1 - i\omega_3^2) \\ &= -(u_z dz - u_{\bar{z}} d\bar{z}) \wedge (he^u dz + He^u d\bar{z}) \\ &= -e^u(Hu_z + hu_{\bar{z}})dz \wedge d\bar{z} \end{aligned}$$

となる. 一方, (2.4) より,

$$d(\omega_3^1 - i\omega_3^2) = -d(he^u dz + He^u d\bar{z}) = e^u(h_{\bar{z}} + hu_{\bar{z}} - H_z - Hu_z)dz \wedge d\bar{z}$$

が分かる. これより,

$$h_{\bar{z}} + 2hu_{\bar{z}} = H_z$$

を得る. よって (2.8) は示された. □

3 \mathbb{H}^3 内の行列モデル $\mathbb{H}(3)$

3.1 導入

この章では \mathbb{H}^3 の行列モデル $\mathbb{H}(3)$ を導入する. \mathbb{L}^4 を複素 2 次エルミート行列と同一視することで, \mathbb{H}^3 の行列モデル $\mathbb{H}(3)$ を得る. 行列モデルを導入することで, $SL(2, \mathbb{C})$ の Her への作用が Her の内積を保つことや, $SL(2, \mathbb{C})$ の Her への作用は $\mathbb{H}(3)$ を保存するといった性質が得られる.

3.2 \mathbb{H}^3 の行列モデル $\mathbb{H}(3)$

定義 3.1. ([5], p348) Her を複素 2 次エルミート行列の集合とする. つまり,

$$\text{Her} = \{v \in M(2, \mathbb{C}) \mid v^* = v\}$$

とし,

$$\langle A, B \rangle = -\frac{1}{2} \text{tr}(A\tilde{B}) \quad (3.1)$$

で定める. ただし, \tilde{B} は B の余因子行列を表す. 特に

$$\langle A, A \rangle = -\det A \quad (3.2)$$

である. 写像 $v: \mathbb{L}^4 \rightarrow \text{Her}$ を

$$v(x^0, x^1, x^2, x^3) = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

と定めると, v は内積を保つ線形同型写像である. また, \mathbb{H}^3 の行列モデル $\mathbb{H}(3)$ を

$$\mathbb{H}(3) = v(\mathbb{H}^3) = \{v \in \text{Her} \mid \det v = 1, \text{tr } v > 0\}$$

と定義する. \mathbb{L}^4 の標準基底を $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ とし, $\sigma_i = v(\epsilon_i)$, ($i = 0, 1, 2, 3$) とすると

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる. この $\sigma_0, \dots, \sigma_3$ はパウリ行列と呼ばれる.

3.3 2 : 1 写像 $\sigma: SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO_+(1, 3)$

任意の $A \in SL(2, \mathbb{C})$, $v \in \text{Her}$ に対して, 写像 $\Sigma(A): \text{Her} \rightarrow \text{Her}$ を

$$\Sigma(A)(v) = AvA^*$$

と定める. この写像は

$$\det(\Sigma(A)v) = \det(AvA^*) = \det v$$

を満たすので, (3.2) より, Her 上の内積を保つ. このとき写像

$$\Sigma : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{Her}), \quad A \mapsto \Sigma(A)$$

は群準同型写像であり, Σ の像は Her の内積を保つ元から成る $\mathrm{GL}(\mathrm{Her})$ の部分群に含まれる. $P : \mathrm{GL}(\mathrm{Her}) \rightarrow \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ を $\mathrm{GL}(\mathrm{Her})$ の元に対して $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ に関する表現行列を対応させる写像とすると, これは線形同型写像である.

補題 3.2. ([5], Lemma 11.1) $\sigma = P \circ \Sigma : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ とすると, σ の像は $\mathrm{SO}_+(1, 3)$ に一致し, $\sigma : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{SO}_+(1, 3)$ は $2:1$ の群準同型写像である.

Proof. Σ の像は Her の内積を保つ $\mathrm{GL}(\mathrm{Her})$ の部分群に含まれるので, σ の像は \mathbb{L}^4 の内積を保つ $\mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ の部分群 $\mathrm{O}(1, 3)$ に含まれる. $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ と $\mathrm{O}(1, 3)$ は実 6 次元である. $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ は $\mathrm{SU}(2) \times \mathbb{E}^3$ と同相であり, $\mathrm{SU}(2)$ は \mathbb{S}^3 と微分同相なので, $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ は連結かつ単連結である. σ は単位行列 $I_2 \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ を単位行列 $I_4 \in \mathrm{SO}_+(1, 3)$ に送るので, σ は $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ から I_4 を含む連結成分 $\mathrm{SO}_+(1, 3) \subset \mathrm{O}(1, 3)$ への全射であると分かる. また Σ は群準同型であるから, σ も群準同型である.

次に $2:1$ 写像であることを示す.

$$\sigma(A) = I_4 \Leftrightarrow A = \pm I_2 \tag{3.4}$$

を示せばよい. $\sigma(A) = I_4$ を仮定すると, $\sigma(A)v = v$ が任意の $v \in \mathrm{Her}$ で成立. 特にパウリ行列 $v = \sigma_0, \dots, \sigma_3$ で成立するため, $A = \pm I_2$ が分かる. 逆に $A = \pm I_2$ のとき, $\sigma(A) = I_4$ である. よって (3.4) が成立する, したがって σ は $2:1$ 写像である. \square

補足 3.3. σ の定義より, 任意の $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ に対して,

$$\Sigma(A)(\sigma_0 \ \sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3) = (\sigma_0 \ \sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3)\sigma(A)$$

が成立する. $x = {}^t(x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{L}^4$ をとると,

$$\begin{aligned} \Sigma(A)(v(x)) &= \Sigma(A)(\sigma_0 \ \sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3) \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \\ &= (\sigma_0 \ \sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3)\sigma(A) \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \\ &= v(\sigma(A)x) \end{aligned}$$

を得る. したがって任意の $x \in \mathbb{L}^4$ と任意の $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ に対して,

$$\Sigma(A)(v(x)) = v(\sigma(A)x) \tag{3.5}$$

が成り立つ.

$SL(2, \mathbb{C})$ の Her への作用は $\mathbb{H}(3)$ を保存する. つまり任意の $v \in \mathbb{H}(3)$, $A \in SL(2, \mathbb{C})$ に対して $AvA^* \in \mathbb{H}(3)$ を満たす. 単位行列 $I_2 \in \mathbb{H}(3)$ における $SL(2, \mathbb{C})$ のイソトロピー部分群は

$$SU(2) = \{A \in SL(2, \mathbb{C}) \mid AA^* = I_2\}$$

なので $\mathbb{H}(3)$ は $SL(2, \mathbb{C})/SU(2)$ に微分同相であり, 主 $SU(2)$ 束

$$\pi : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{H}(3), \quad \pi(A) = AA^* \quad (3.6)$$

を得る.

3.4 σ の単位元における微分写像 $d\sigma_I : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{o}(1, 3)$

補題 3.4. ([5], Lemma 11.3) $\sigma : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO_+(1, 3)$ の単位元 $I = I_2$ における微分写像 $d\sigma_I : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{o}(1, 3)$ はリ-環準同型で $X = \begin{pmatrix} X_1^1 & X_2^1 \\ X_1^2 & -X_1^1 \end{pmatrix}$ の像は

$$d\sigma(X) = \begin{pmatrix} 0 & \text{Re}(X_2^1 + X_1^2) & \text{Im}(X_2^1 - X_1^2) & 2 \text{Re } X_1^1 \\ \text{Re}(X_2^1 + X_1^2) & 0 & -2 \text{Im } X_1^1 & \text{Re}(-X_2^1 + X_1^2) \\ \text{Im}(X_2^1 - X_1^2) & 2 \text{Im } X_1^1 & 0 & -\text{Im}(X_2^1 + X_1^2) \\ 2 \text{Re } X_1^1 & \text{Re}(X_2^1 - X_1^2) & \text{Im}(X_2^1 + X_1^2) & 0 \end{pmatrix}$$

となる. ここで (ω_j^i) を $SO_+(1, 3)$ 上の $\mathfrak{o}(1, 3)$ 値のモーレーカルタン形式とし, $\varepsilon = (\varepsilon_j^i)$ を $SL(2, \mathbb{C})$ 上の $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 値のモーレーカルタン形式とすると,

$$\begin{aligned} \sigma^*\omega^1 &= \text{Re}(\varepsilon_2^1 + \varepsilon_1^2), & \sigma^*\omega^2 &= \text{Im}(\varepsilon_2^1 - \varepsilon_1^2), & \sigma^*\omega^3 &= 2 \text{Re } \varepsilon_1^1 \\ \sigma^*\omega_2^1 &= -2 \text{Im } \varepsilon_1^1, & \sigma^*\omega_1^3 &= \text{Re}(\varepsilon_2^1 - \varepsilon_1^2), & \sigma^*\omega_2^3 &= \text{Im}(\varepsilon_2^1 + \varepsilon_1^2) \end{aligned} \quad (3.7)$$

が成立する. さらに,

$$\phi = \omega^1 + i\omega^2, \quad \psi = \omega_1^3 - i\omega_2^3$$

と定めるとき,

$$\sigma^*\phi = \varepsilon_2^1 + \varepsilon_1^2, \quad \sigma^*\psi = \varepsilon_2^1 - \varepsilon_1^2$$

が成立. ただし, $\omega_0^i = \omega^i$ と表記している.

Proof. $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ とする. $d\Sigma(X) : \text{Her} \rightarrow \text{Her}$ を考える. $a(t) \in SL(2, \mathbb{C})$ を $a(0) = I_2, a'(0) = X$ を満たすものとする. 任意の $v \in \text{Her}$ に対して,

$$d\Sigma(X)(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Sigma(a(t))(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (a(t)va(t)^*) = Xv + vX^*$$

が成立. ここで例えば $\sigma_0 \in \text{Her}$ に対しては,

$$d\Sigma(X)\sigma_0 = \text{Re}(X_2^1 + X_1^2)\sigma_1 + \text{Im}(X_2^1 - X_1^2)\sigma_2 + 2 \text{Re } X_1^1\sigma_3$$

$\sigma_3 \in \text{Her}$ に対しては,

$$d\Sigma(X)\sigma_3 = 2 \operatorname{Re} X_1^1 \sigma_0 + \operatorname{Re}(-X_2^1 + X_1^2) \sigma_1 - \operatorname{Im}(X_2^1 + X_1^2) \sigma_2$$

が成立し, $d\sigma(X)$ の 1 列目, 4 列目が求まる. 2, 3 列目も同様に求めることで, $d\sigma(X)$ が求まる.

次に $\Omega = (\omega_j^i)$ とおき, $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ とする. ここで可換図式

$$\begin{array}{ccc} \text{SL}(2, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\sigma} & \text{SO}_+(1, 3) \\ L_{A^{-1}} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow L_{\sigma(A)^{-1}} \\ \text{SL}(2, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\sigma} & \text{SO}_+(1, 3) \end{array}$$

を考える. 実際 $x \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ とすると, σ は準同型より,

$$L_{\sigma(A)^{-1}}(\sigma(x)) = \sigma(A)^{-1}\sigma(x) = \sigma(A^{-1}x) = \sigma(L_{A^{-1}}(x))$$

なので可換図式である. よって $x = A$ の場合を考えて,

$$\begin{array}{ccc} T_A \text{SL}(2, \mathbb{C}) & \xrightarrow{d\sigma_A} & T_{\sigma(A)} \text{SO}_+(1, 3) \\ (dL_{A^{-1}})_A \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow (dL_{\sigma(A)^{-1}})_{\sigma(A)} \\ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) & \xrightarrow{d\sigma_I} & \mathfrak{o}(1, 3) \end{array}$$

も可換図式であるので,

$$d\sigma_I \circ (dL_{A^{-1}})_A = (dL_{\sigma(A)^{-1}})_{\sigma(A)} \circ d\sigma_A \quad (3.8)$$

が成立. よって $X \in T_A \text{SL}(2, \mathbb{C})$ に対して,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \sigma^* \omega_0^0 & \cdots & \sigma^* \omega_3^0 \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma^* \omega_0^3 & \cdots & \sigma^* \omega_3^3 \end{pmatrix} (X) = (\sigma^* \Omega)(X) \\ & = \Omega(d\sigma_A(X)) \\ & = \sigma(A)^{-1} d\sigma_A(X) \quad (\because d\sigma_A(X) \in T_{\sigma(A)} \text{SO}_+(1, 3)) \\ & = d\sigma_I(A^{-1}X) \quad (\because (3.8)) \\ & = d\sigma_I(\varepsilon(X)) \\ & = \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{Re}(\varepsilon_2^1 + \varepsilon_1^2) & \operatorname{Im}(\varepsilon_2^1 - \varepsilon_1^2) & 2 \operatorname{Re} \varepsilon_1^1 \\ \operatorname{Re}(\varepsilon_2^1 + \varepsilon_1^2) & 0 & -2 \operatorname{Im} \varepsilon_1^1 & \operatorname{Re}(-\varepsilon_2^1 + \varepsilon_1^2) \\ \operatorname{Im}(\varepsilon_2^1 - \varepsilon_1^2) & 2 \operatorname{Im} \varepsilon_1^1 & 0 & -\operatorname{Im}(\varepsilon_2^1 + \varepsilon_1^2) \\ 2 \operatorname{Re} \varepsilon_1^1 & \operatorname{Re}(\varepsilon_2^1 - \varepsilon_1^2) & \operatorname{Im}(\varepsilon_2^1 + \varepsilon_1^2) & 0 \end{pmatrix} (X) \end{aligned}$$

が分かる. 各成分を比較することで補題は示された. \square

3.5 可換図式

定義 3.5. Her のナルコーン $N(3)$ を

$$N(3) = v(N^3) = \{v \in \text{Her} \setminus \{0\} \mid \det v = 0\}$$

で定める.

任意の $t \in \mathbb{R}^\times$, $\mathbf{n} \in N^3$ に対して

$$v(t\mathbf{n}) = tv(\mathbf{n})$$

を満たすので, $v: N^3 \rightarrow N(3)$ は写像

$$v: N^3/\mathbb{R}^\times \rightarrow N(3)/\mathbb{R}^\times, \quad v([\mathbf{n}]) = [v(\mathbf{n})] \quad (3.9)$$

を誘導する. $\mathbb{H}(3)$ の無限遠点集合に対応する \mathbb{S}^2 は

$$\mathbb{S}_\infty^2 = N(3)/\mathbb{R}^\times$$

と表すことができる. よって $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ は自然に $N(3)/\mathbb{R}^\times$ に作用して, この作用に関する

$$[\sigma_0 + \sigma_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in N(3)/\mathbb{R}^\times$$

のイソトロピー群は

$$G_0 = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C}, z \neq 0 \right\}$$

である. 主 G_0 束 π_1 を

$$\pi_1: \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow N(3)/\mathbb{R}^\times, \quad \pi_1(A) = A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A^* = [A_1 A_1^*]$$

と表す. ここで A_1 は A の第 1 列ベクトルとする. 一方で $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の $\mathbb{C}P^1$ への作用に関して $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}P^1$ のイソトロピー群も G_0 である. 主 G_0 束 π_2 を

$$\pi_2: \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}P^1, \quad \pi_2(A) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [A_1]$$

と表す. ここでナルコーン $N(3) \subset \text{Her}$ は

$$N(3) = \left\{ \pm z z^* = \pm \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} \mid z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus 0 \right\}$$

と表すことができる. 写像 $\iota: \mathbb{C}P^1 \rightarrow N(3)/\mathbb{R}^\times$ を

$$\iota([z]) = [z z^*]$$

で定めると, ι は微分同相写像であり, $\mathbb{C}P^1$ 上の $SL(2, \mathbb{C})$ 作用と $N(3)/\mathbb{R}^\times$ 上の $SL(2, \mathbb{C})$ 作用で equivariant である. 実際, $A \in SL(2, \mathbb{C})$, $[z] \in \mathbb{C}P^1$ とすると,

$$\iota(A[z]) = [(Az)(Az)^*] = [A(zz^*)A] = A\iota([z])A^*$$

が成立する. 特に $[z] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ の場合を考えると,

$$\iota \circ \pi_2 = \pi_1$$

を得る. 写像 Π を

$$\Pi : SO_+(1, 3) \rightarrow N^3/\mathbb{R}^\times, \quad \Pi(e) = e[\epsilon_0 + \epsilon_3]$$

とすると, 以下で説明するように

$$\pi_1 = v \circ \Pi \circ \sigma$$

も成立する. よって可換図式

$$\begin{array}{ccc} SL(2, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\sigma} & SO_+(1, 3) \\ \swarrow \pi_2 & \downarrow \pi_1 & \downarrow \Pi \\ \mathbb{C}P^1 & \xrightarrow{\iota} & N(3)/\mathbb{R}^\times \xleftarrow{v} N^3/\mathbb{R}^\times \end{array} \quad (3.10)$$

を得る. $\pi_1 = v \circ \Pi \circ \sigma$ を示す. (3.5) より, 特に $x = \epsilon_0 + \epsilon_3 \in \mathbb{L}^4$ のときを考えると,

$$\Sigma(A)(\sigma_0 + \sigma_3) = v(\sigma(A)(\epsilon_0 + \epsilon_3))$$

が成立する. よって任意の $A \in SL(2, \mathbb{C})$ に対して,

$$\begin{aligned} \pi_1(A) &= A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A^* \\ &= [\Sigma(A)(\sigma_0 + \sigma_3)] \\ &= [v(\sigma(A)(\epsilon_0 + \epsilon_3))] \\ &= v(\sigma(A)[\epsilon_0 + \epsilon_3]) \\ &= v \circ \Pi \circ \sigma(A) \quad (\because \Pi \text{ の定義}) \end{aligned}$$

が成立するので, $\pi_1 = v \circ \Pi \circ \sigma$ は示された. よって (3.10) は示された.

4 $\mathbb{H}(3)$ 内の曲面

4.1 f に沿うフレーム

M をリーマン面とする. $v: \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}(3)$ は同型写像なので, はめ込み $\mathbf{x}: M \rightarrow \mathbb{H}^3$ から, はめ込み $f = v \circ \mathbf{x}: M \rightarrow \mathbb{H}(3)$ を得る.

$E: U \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ が $f: M \rightarrow \mathbb{H}(3)$ のフレームであることを $e = \sigma \circ E: U \rightarrow \mathrm{SO}_+(1, 3)$ が $\mathbf{x} = v^{-1} \circ f: M \rightarrow \mathbb{H}^3$ のフレームであるように定義する. 詳細は次の定義 4.1, 定義 4.2 で述べる.

定義 4.1. ([5], Definition 11.5) $U \subset M$ を開集合とする. $E: U \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ がはめ込み $f: M \rightarrow \mathbb{H}(3)$ に沿うフレームであるとは, E が滑らかで, U の各点で

$$f = EE^*$$

を満たすとき, つまり $f = \pi \circ E$ を満たすときをいう.

$e = \sigma \circ E: U \rightarrow \mathrm{SO}_+(1, 3)$ という写像を考えると, 補題 3.2 より, σ は 2:1 写像だったので, $e \leftrightarrow \pm E$ という対応がある. よって e が \mathbf{x} に沿うフレームであることと E が f に沿うフレームであることは同値である.

$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 上の $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 値のモーレーカルタン形式を E で U 上に引き戻したものを ε とする. つまり

$$E^{-1}dE = \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_2^1 \\ \varepsilon_1^2 & -\varepsilon_1^1 \end{pmatrix}$$

とする.

4.2 f に沿う first order フレーム

定義 4.2. ([5], Definition 11.6) $U \subset M$ を開集合とする. はめ込み $f: M \rightarrow \mathbb{H}(3)$ に沿うフレーム $E: U \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ が **first order** であるとは, E が U の各点で

$$\varepsilon_1^1 + \bar{\varepsilon}_1^1 = 0$$

を満たすときをいう.

\mathbf{x} に沿う first order なフレーム e を考えると, (1.7), (3.7) より,

$$\begin{aligned} e \text{ が } \mathbf{x} \text{ に沿う first order フレーム} &\Leftrightarrow \omega^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \operatorname{Re} \varepsilon_1^1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \varepsilon_1^1 + \bar{\varepsilon}_1^1 = 0 \end{aligned}$$

が成立する. よって e が \mathbf{x} に沿う first order なフレームであることと E が f の first order なフレームであることは同値である.

定義 4.3. M をリーマン面, $f : M \rightarrow \mathbb{H}(3)$ をはめ込みとし, f の単位法ベクトル場を $N : M \rightarrow \text{Her}$ とする. f の第一, 第二基本形式 \mathbf{I}, \mathbf{II} を

$$\mathbf{I} = \langle df, df \rangle = -\det df, \quad \mathbf{II} = -\langle df, dN \rangle$$

で定める. f の第一基本形式 \mathbf{I} がある滑らかな関数 $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて

$$\mathbf{I} = e^u dzd\bar{z}$$

とかけるとき, f は共形であるという.

補題 4.4. ([5], Lemma 11.7) $U \subset M$ は開集合とし, $f : M \rightarrow \mathbb{H}(3)$ をはめ込みとする. f に沿う first order フレームを $E : U \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ とする. $\varepsilon = (\varepsilon_j^i) = E^{-1}dE$ に対して, $\phi = \varepsilon_2^1 + \bar{\varepsilon}_1^2$ とおく. このとき f に誘導される M 上の計量 \mathbf{I} は

$$\mathbf{I} = \phi \bar{\phi}$$

と表せる. これより, M に \mathbf{I} に関する等温座標 z を入れるとき, ϕ が $(1, 0)$ 型または $(0, 1)$ 型の微分形式であると分かる.

Proof. $\varepsilon = E^{-1}dE$ より, $dE = E\varepsilon$, $dE^* = \varepsilon^*E^*$ であり, $f = EE^*$ より,

$$df = (dE)E^* + EdE^* = E\varepsilon E^* + E\varepsilon^*E^* = E(\varepsilon + \varepsilon^*)E^*$$

が成立する. E は first order なので,

$$\varepsilon + \varepsilon^* = \begin{pmatrix} 0 & \phi \\ \bar{\phi} & 0 \end{pmatrix}$$

である. $\det E = 1$ であり, f に誘導される M 上の計量は

$$\mathbf{I} = -\det(df) = -\det(\varepsilon + \varepsilon^*) = \phi \bar{\phi}$$

が成立する. ここで $\phi = adz + bd\bar{z}$ とおくと,

$$\mathbf{I} = \phi \bar{\phi} = a\bar{b}dz^2 + (|a|^2 + |b|^2)dzd\bar{z} + \bar{a}bd\bar{z}^2$$

であり, z は \mathbf{I} に関する等温座標であるから, $\mathbf{I} = e^{2u}dzd\bar{z}$ と書けるので $a \equiv 0$ または $b \equiv 0$ が分かる. よって ϕ は $(1, 0)$ 型または $(0, 1)$ 型の微分形式である. \square

4.3 Oriented, adapted フレーム, hyperbolic Gauss 写像

定義 4.5. ([5], Definition 11.8) M をリーマン面とする. 共形はめ込み $f : M \rightarrow \mathbb{H}(3)$ に沿う first order フレーム E が **oriented** とは, $\phi = \varepsilon_2^1 + \bar{\varepsilon}_1^2$ が $(1, 0)$ 型の微分形式. つまり M の複素座標 z に関して, ある写像 $a : U \rightarrow \mathbb{C}^\times$ が存在して,

$$\phi = a dz$$

を満たすときをいう。フレーム E が局所座標 (U, z) に **adapted** であるとは、 E が oriented で、さらに a が正値であるとき、つまり、ある滑らかな関数 $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して、

$$\phi = e^u dz$$

を満たすときをいう。

定義 4.6. ([5], Definition 11.9) $f : M \rightarrow \mathbb{H}(3)$ を共形はめ込みとし、 $\mathbf{x} : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ を $f = v \circ \mathbf{x}$ を満たすはめ込みとする。 f の **hyperbolic Gauss** 写像は、定義 1.11 の \mathbf{x} の hyperbolic Gauss 写像 $g : M \rightarrow N^3/\mathbb{R}^\times$ と (3.9) を用いて

$$g_f = v \circ g : M \rightarrow N(3)/\mathbb{R}^\times$$

で定義される。

4.4 First order フレームによる Codazzi 方程式, hyperbolic Gauss 写像

補題 4.7. ([5], Lemma 11.10) 共形はめ込み $f : M \rightarrow \mathbb{H}(3)$ に沿う first order フレームを $E : U \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ とし、 $e = \sigma \circ E : U \rightarrow \mathrm{SO}_+(1, 3)$ とおく。 $\varepsilon = (\varepsilon_j^i) = E^{-1}dE$ を U 上の $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 値のモーレーカルタン形式とし、 $\Omega = (\omega_j^i) = e^{-1}de$ を U 上の $\mathfrak{o}(1, 3)$ 値のモーレーカルタン形式とする。

$$\phi = \varepsilon_2^1 + \bar{\varepsilon}_1^2 = \omega^1 + i\omega^2, \quad \psi = \bar{\varepsilon}_2^1 - \varepsilon_1^2 = \omega_1^3 - i\omega_2^3$$

とする。カルタンの補題より、 ω_0^i を ω^i と表記すると、

$$\begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

を満たす U 上の関数 h_{11}, h_{12}, h_{22} ($h_{21} = h_{12}$) を定めることができる。 h をホップ不変量、 H を平均曲率とする。つまり、

$$h = \frac{1}{2}(h_{11} - h_{22}) - ih_{12}, \quad H = \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22})$$

とおく。このとき、

$$d\phi = -2\varepsilon_1^1 \wedge \phi \tag{4.1}$$

$$\psi = h\phi + H\bar{\phi} \tag{4.2}$$

が成り立ち、Codazzi 方程式は

$$(dh - 4h\varepsilon_1^1) \wedge \phi + dH \wedge \bar{\phi} = 0 \tag{4.3}$$

と表される. f の hyperbolic Gauss 写像は U 上で, $E_1 : U \rightarrow \mathbb{C}^2$ を E の第 1 列ベクトルとして,

$$g_f = \iota[E_1] = [E_1 E_1^*] \quad (4.4)$$

と表される. 特に E が z に adapted であるとき, つまり $\phi = e^u dz$ のとき,

$$\varepsilon_1^1 = \frac{1}{2}(u_z dz - u_{\bar{z}} d\bar{z}) \quad (4.5)$$

が成立する. これは Codazzi 方程式 (4.3) は,

$$(he^{2u})_{\bar{z}} = e^{-2u} H_z \quad (4.6)$$

となる.

Proof. 最初に (4.1) を示す. 構造方程式より, $d\varepsilon = -\varepsilon \wedge \varepsilon$ が成り立つ. したがって

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_1^1 & d\varepsilon_2^1 \\ d\varepsilon_1^2 & -d\varepsilon_1^1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_2^1 \\ \varepsilon_1^2 & -\varepsilon_1^1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_2^1 \\ \varepsilon_1^2 & -\varepsilon_1^1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \varepsilon_2^1 \wedge \varepsilon_1^2 & 2\varepsilon_1^1 \wedge \varepsilon_2^1 \\ -2\varepsilon_1^1 \wedge \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1^2 \wedge \varepsilon_2^1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

が成立するので, E が first order より, $d\varepsilon_2^1 = -2\varepsilon_1^1 \wedge \varepsilon_2^1$, $d\varepsilon_1^2 = \overline{d\varepsilon_1^2} = -(-2\bar{\varepsilon}_1^1 \wedge \bar{\varepsilon}_1^2) = -2\varepsilon_1^1 \wedge \bar{\varepsilon}_1^2$ を得る. よって

$$d\phi = d\varepsilon_2^1 + d\bar{\varepsilon}_1^2 = -2\varepsilon_1^1 \wedge \varepsilon_2^1 - 2\varepsilon_1^1 \wedge \bar{\varepsilon}_1^2 = -2\varepsilon_1^1 \wedge \phi$$

が成立する. (4.2) は (2.4) より, 従う.

次に (4.3) を示す. (4.7) より,

$$\begin{aligned} d\psi &= d(\bar{\varepsilon}_2^1 - \varepsilon_1^2) \\ &= -2\bar{\varepsilon}_1^1 \wedge \bar{\varepsilon}_2^1 - 2\varepsilon_1^1 \wedge \varepsilon_1^2 \\ &= 2\varepsilon_1^1 \wedge \bar{\varepsilon}_2^1 - 2\varepsilon_1^1 \wedge \varepsilon_1^2 \\ &= 2\varepsilon_1^1 \wedge (h\phi + H\bar{\phi}) \quad (\because (4.2)) \\ &= 2h\varepsilon_1^1 \wedge \phi + 2H\varepsilon_1^1 \wedge \bar{\phi} \end{aligned}$$

が成立. 一方で (4.1) と (4.2) を用いると,

$$\begin{aligned} d\psi &= d(h\phi + H\bar{\phi}) \\ &= dh \wedge \phi + h(-2\varepsilon_1^1 \wedge \phi) + dH \wedge \bar{\phi} + H(-2\bar{\varepsilon}_1^1 \wedge \bar{\phi}) \\ &= dh \wedge \phi - 2h\varepsilon_1^1 \wedge \phi + 2H\varepsilon_1^1 \wedge \bar{\phi} + dH \wedge \bar{\phi} \\ &= (dh - 2h\varepsilon_1^1) \wedge \phi + (2H\varepsilon_1^1 + dH) \wedge \bar{\phi}. \end{aligned}$$

よって辺々引いて,

$$0 = (dh - 4h\varepsilon_1^1) \wedge \phi + dH \wedge \bar{\phi}$$

が成立し, (4.3) が分かる.

次に (4.4) を示す. $\mathbf{x}: M \rightarrow \mathbb{H}^3$ を $f = v \circ \mathbf{x}$ を満たすはめ込みとする. \mathbf{x} の hyperbolic Gauss 写像 g は $g = \Pi \circ e$ で与えられる. 可換図式 (3.10) と g_f の定義より,

$$g_f = v \circ g = v \circ \Pi \circ e = \tau \circ \pi_2 \circ E = \tau[E_1].$$

よって示された.

最後に E が z に adapted だと仮定して, (4.5), (4.6) を示す. (3.7), (2.6) より,

$$\varepsilon_1^1 = \frac{i}{2}\omega_1^2 = \frac{1}{2}(u_z dz - u_{\bar{z}} d\bar{z})$$

が分かる. よって (4.5) は示された. (4.3) より,

$$\begin{aligned} (dh - 4h\varepsilon_1^1) \wedge \phi + dH \wedge \bar{\phi} = 0 &\Leftrightarrow (h_{\bar{z}} d\bar{z} + 2hu_{\bar{z}} d\bar{z}) \wedge e^u dz + H_z dz \wedge e^u d\bar{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^u (h_{\bar{z}} + 2hu_{\bar{z}} - H_z) d\bar{z} \wedge dz = 0 \\ &\Leftrightarrow h_{\bar{z}} + 2hu_{\bar{z}} = H_z \\ &\Leftrightarrow h_{\bar{z}} e^{2u} + 2hu_{\bar{z}} e^{2u} = e^{2u} H_z \\ &\Leftrightarrow (he^{2u})_{\bar{z}} = e^{2u} H_z \end{aligned}$$

よって (4.6) は示された. □

5 Bryant 表現公式

5.1 CMC 1 曲面における正則ナルフレームの存在

定義 5.1. ([5], Definition 11.12) M を連結なリーマン面とする. 写像 $F : M \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ をはめ込みとし, $\alpha = F^{-1}dF$ とおく. $\det \alpha = 0$ であるとき, F はナルであるという.

定理 5.2. ([5], Theorem 11.11) M を連結なリーマン面とし, $f : M \rightarrow \mathbb{H}(3)$ を CMC 1 曲面の共形はめ込みとする. M の任意の局所座標 (U, z) で U が単連結であるものに対して, f に沿うフレーム $F : U \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ で正則かつナルであるはめ込みが存在する. つまり $\alpha = F^{-1}dF$ が $(1, 0)$ 型の微分形式で $\det \alpha = 0$ であるものが存在する. またそのようなフレームの一つを F とするとき, 他の任意の正則ナルなフレームはある定数 $K \in \mathrm{SU}(2)$ を用いて, FK で表される.

Proof. M の局所座標を (U, z) とし, U は単連結であるとする. $E : U \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ を first order で (U, z) に adapted なフレームとする. $\varepsilon = E^{-1}dE$ とすると,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_2^1 \\ \varepsilon_1^2 & -\varepsilon_1^1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 & \frac{1}{2}(\phi + \bar{\psi}) \\ \frac{1}{2}(\bar{\phi} - \psi) & -\varepsilon_1^1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 & \frac{1}{2}(-\phi + \bar{\psi}) \\ \frac{1}{2}(\bar{\phi} - \psi) & -\varepsilon_1^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.1)$$

とかける. $\beta = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 & \frac{1}{2}(-\phi + \bar{\psi}) \\ \frac{1}{2}(\bar{\phi} - \psi) & -\varepsilon_1^1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2)$ とおくと, (4.2), $H \equiv 1$ より,

$$\beta = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 & \frac{1}{2}(-\phi + \bar{\psi}) \\ \frac{1}{2}(\bar{\phi} - \psi) & -\varepsilon_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 & \frac{1}{2}\bar{h}\bar{\phi} \\ -\frac{1}{2}h\phi & -\varepsilon_1^1 \end{pmatrix}$$

である. ここで $\varepsilon_2^1 = \frac{1}{2}\bar{h}\bar{\phi} + \phi$, $\varepsilon_1^2 = -\frac{1}{2}h\phi$ であることと, (4.1), (4.7) より

$$\begin{aligned} d\beta &= \begin{pmatrix} d\varepsilon_1^1 & \frac{1}{2}(d\bar{h} \wedge \bar{\phi} + \bar{h}d\bar{\phi}) \\ -\frac{1}{2}(dh \wedge \phi + hd\phi) & -d\varepsilon_1^1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\varepsilon_2^1 \wedge \varepsilon_1^2 & \frac{1}{2}(d\bar{h} \wedge \bar{\phi} - 2\bar{h}\varepsilon_1^1 \wedge \bar{\phi}) \\ -\frac{1}{2}(dh \wedge \phi - 2h\varepsilon_1^1 \wedge \phi) & \varepsilon_2^1 \wedge \varepsilon_1^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\frac{1}{2}\bar{h}\bar{\phi} + \phi) \wedge \frac{1}{2}h\phi & \frac{1}{2}(d\bar{h} \wedge \bar{\phi} - 2\bar{h}\varepsilon_1^1 \wedge \bar{\phi}) \\ -\frac{1}{2}(dh \wedge \phi - 2h\varepsilon_1^1 \wedge \phi) & -(\frac{1}{2}\bar{h}\bar{\phi} + \phi) \wedge \frac{1}{2}h\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\bar{h}\bar{\phi} \wedge \frac{1}{2}h\phi & \frac{1}{2}(d\bar{h} \wedge \bar{\phi} - 2\bar{h}\varepsilon_1^1 \wedge \bar{\phi}) \\ \frac{1}{2}(-dh \wedge \phi + 2h\varepsilon_1^1 \wedge \phi) & \frac{1}{2}\bar{h}\bar{\phi} \wedge \frac{1}{2}h\phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned}\beta \wedge \beta &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\bar{h}\bar{\phi} \wedge h\phi & \bar{h}\varepsilon_1^1 \wedge \bar{\phi} \\ -h\phi \wedge \varepsilon_1^1 & -\frac{1}{4}h\phi \wedge \bar{h}\bar{\phi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\bar{h}\bar{\phi} \wedge h\phi & -\bar{h}\varepsilon_1^1 \wedge \bar{\phi} \\ h\varepsilon_1^1 \wedge \phi & \frac{1}{4}\bar{h}\bar{\phi} \wedge h\phi \end{pmatrix}\end{aligned}$$

が成立する。よって

$$d\beta + \beta \wedge \beta = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(d\bar{h} - 4\bar{h}\varepsilon_1^1) \wedge \bar{\phi} \\ \frac{1}{2}(dh - 4h\varepsilon_1^1) \wedge \phi & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。よって (4.3) と $H \equiv 1$ であることより, $d\beta + \beta \wedge \beta = 0$ を得る。 β は U 上の $\mathfrak{su}(2)$ 値の 1 次形式であるから, カルタン・ダルブーの定理 ([5], Theorem 2.25) より,

$$B^{-1}dB = \beta$$

を満たす $B: U \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ が存在する。ここで $F = EB^{-1}: U \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ とすると,

$$FF^* = (EB^{-1})(B^{-1})^*E^* = EE^* = f$$

が成り立つので, F は f に沿うフレームである。このとき,

$$\begin{aligned}\alpha &= F^{-1}dF \\ &= BE^{-1}((dE)B^{-1} + EdB^{-1}) \\ &= B(\varepsilon - \beta)B^{-1} \\ &= B \begin{pmatrix} 0 & e^u dz \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B^{-1}\end{aligned}$$

となるため, U 上で α は $(1, 0)$ 型である。よって F は U 上で正則である。 U 上で $\alpha \neq 0$ より F ははめ込みである。また $\det \alpha = 0$ より F はナルである。よって F は f に沿う正則ナルフレームである。

他の任意の f に沿う正則ナルなフレーム \tilde{F} は $K: U \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ を用いて $\tilde{F} = FK$ で与えられる。 F と \tilde{F} が正則なので, $K = F^{-1}\tilde{F}: U \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ も正則であり, このとき K は定数写像となる。 \square

5.2 正則ナルフレームによる曲面

補題 5.3. ([5], Lemma 11.14) M を連結なリーマン面とし, $F: M \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ を正則ナルはめ込みとする。このとき, $f = FF^*: M \rightarrow \mathbb{H}(3)$ は共形はめ込みである。

Proof. $f = FF^*$ より,

$$df = d(FF^*) = F(\alpha + \alpha^*)F^*$$

がわかる. $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & -\alpha_1^1 \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= -\det(df) = -\det(\alpha + \alpha^*) \\ &= -((\alpha_1^1 + \bar{\alpha}_1^1)(-\alpha_1^1 - \bar{\alpha}_1^1) - (\alpha_2^1 + \bar{\alpha}_1^2)(\alpha_1^2 + \bar{\alpha}_2^1)) \\ &= (\alpha_1^1 + \bar{\alpha}_1^1)(\alpha_1^1 + \bar{\alpha}_1^1) + (\alpha_2^1 + \bar{\alpha}_1^2)(\alpha_1^2 + \bar{\alpha}_2^1) \\ &= (\alpha_1^1\alpha_1^1 + \alpha_2^1\alpha_1^2) + (\bar{\alpha}_1^1\bar{\alpha}_1^1 + \bar{\alpha}_2^1\bar{\alpha}_1^2) + 2\alpha_1^1\bar{\alpha}_1^1 + \alpha_2^1\bar{\alpha}_2^1 + \alpha_1^2\bar{\alpha}_1^2 \\ &= 2\alpha_1^1\bar{\alpha}_1^1 + \alpha_2^1\bar{\alpha}_2^1 + \alpha_1^2\bar{\alpha}_1^2 \quad (\because \det \alpha = 0) \end{aligned}$$

と表すことができる. F ははめ込みであるため, $dF \neq 0$ より, M 上で $\alpha = F^{-1}dF \neq 0$ である. つまり $\mathbf{I} = \langle df, df \rangle = -\det(df)$ の値は正である. よって f ははめ込みである. \square

次の定理は定理 5.2 の逆が成り立つことを示している.

5.3 Bryant 表現公式

定理 5.4. (Bryant 表現公式)([5], Theorem 11.15) M は連結なリーマン面とする. $F: M \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ を正則ナルはめ込みとする. つまり

$$F^{-1}dF = \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & -\alpha_1^1 \end{pmatrix}$$

とおくとき, $\alpha_j^i (i, j = 1, 2)$ は M 上の正則な 1 次形式であり, M 上で $\alpha \neq 0$ かつ $\det \alpha = 0$ を満たすとする. このとき, $f = FF^*: M \rightarrow \mathbb{H}(3)$ は CMC 1 曲面の共形はめ込みである. さらに f の第一基本形式 \mathbf{I} , ホップ微分 $\mathbf{II}^{2,0}$, hyperbolic Gauss 写像 g_f に関して次が成り立つ: M 上の任意の複素座標系 (U, z) をとると, U 上の正則関数 $g_j^i (i, j = 1, 2)$ を用いて

$$\alpha_j^i = g_j^i dz$$

と表すことができる. ここで $e^u = |g_2^1| + |g_1^2|$ とおくと, f に誘導される U 上の計量は

$$\mathbf{I} = e^{2u} dz d\bar{z} \quad (5.2)$$

で与えられ, U 上のホップ微分 $\mathbf{II}^{2,0}$ は,

$$\mathbf{II}^{2,0} = \frac{1}{2} h e^{2u} dz dz = \frac{g_1^2 dg_2^1 - g_2^1 dg_1^2}{2g_1^1} dz \quad (5.3)$$

で与えられる. また f の hyperbolic Gauss 写像 $g_f: M \rightarrow N(3)/\mathbb{R}^\times \cong \mathbb{C}P^1$ を $\mathbb{C}P^1$ への写像とすると, F_1 を F の第 1 列ベクトルとして, U 上で,

$$g_f = \begin{cases} [\dot{F}_1] & (\dot{F}_1 \neq 0) \\ [F_1] & (\dot{F}_1 = 0) \end{cases} \quad (5.4)$$

と表せる.

Proof. f が共形はめ込みであることは補題 5.3 より, 従う. $U_0 \subset U$ を空でない任意の単連結な開部分集合とする. V を

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ z_2 & -z_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \setminus \{0\} \mid (z_1)^2 + z_2 z_3 = 0 \right\}$$

とする. F は正則ナルであるから, $\alpha = F^{-1}dF = g dz$ を満たす正則写像

$$g = \begin{pmatrix} g_1^1 & g_2^1 \\ g_1^2 & -g_1^1 \end{pmatrix} : U_0 \rightarrow V \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$$

が定まる.

次に f に沿う (U_0, z) に adapted な first order フレームを構成する. 射影 π_0 を

$$\pi_0 : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow V, \quad \pi_0(a, b) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ab & a^2 \\ -b^2 & ab \end{pmatrix}$$

と定めると, これは正則な 2 重被覆である. U_0 は単連結なので, g は正則なりフト $(a, b) : U_0 \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ を持つ. つまり $\pi_0 \circ (a, b) = g$ を満たし, U_0 上で

$$g_1^1 = -ab, \quad g_2^1 = a^2, \quad g_1^2 = -b^2 \quad (5.5)$$

が成立する. よって U_0 上で,

$$F^{-1}dF = \alpha = \begin{pmatrix} -ab & a^2 \\ -b^2 & ab \end{pmatrix} dz \quad (5.6)$$

が成立. ここで滑らかな関数 $u : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ と $p, q : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$e^u = |g_2^1| + |g_1^2| = |a|^2 + |b|^2, \quad p = e^{-\frac{u}{2}} a, \quad q = e^{-\frac{u}{2}} b$$

と定める. このとき,

$$|p|^2 + |q|^2 = e^{-u} (|a|^2 + |b|^2) = 1 \quad (5.7)$$

であるから, U_0 上の滑らかな写像

$$K = \begin{pmatrix} p & -\bar{q} \\ q & \bar{p} \end{pmatrix} = e^{-\frac{u}{2}} \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} : U_0 \rightarrow \mathrm{SU}(2) \quad (5.8)$$

を得る. f に沿う U_0 上のフレーム $E = FK : U_0 \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ を考える. $\varepsilon = E^{-1}dE$ とす

ると,

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= E^{-1}dE = K^{-1}F^{-1}(dF)K + K^{-1}F^{-1}FdK \\
&= e^{-u} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -ab & a^2 \\ -b^2 & ab \end{pmatrix} dz \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} + K^{-1}dK \\
&= e^{-u} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} dz + K^{-1}dK \\
&= e^{-u} \begin{pmatrix} e^u \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^u \end{pmatrix} dz + \begin{pmatrix} \bar{p} & \bar{q} \\ -q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dp & -d\bar{q} \\ dq & d\bar{p} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & e^u dz \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{p}dp + \bar{q}dq & -\bar{p}d\bar{q} + \bar{q}d\bar{p} \\ -qdp + pdq & qd\bar{q} + pd\bar{p} \end{pmatrix} \tag{5.9}
\end{aligned}$$

と計算できる. この結果と (5.7) より, $\varepsilon_1^1 + \bar{\varepsilon}_1^1 = \bar{p}dp + \bar{q}dq + qd\bar{q} + pd\bar{p} = d(p\bar{p} + q\bar{q}) = 0$ となるから E は U_0 上の f に沿う first order フレームである. また,

$$\phi = \varepsilon_2^1 + \bar{\varepsilon}_1^2 = e^u dz \tag{5.10}$$

となるため, E は (U_0, z) に adapted である. よって f に沿う (U_0, z) に adapted な first order フレームを構成できた.

次に f の第一基本形式 \mathbf{I} を計算する. E は f に沿うフレームであるから,

$$df = (dE)E^* + EdE^* = E(\varepsilon + \varepsilon^*)E^*$$

であり, 補題 4.4 と (5.10) より,

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= -\det(df) \\
&= \phi\bar{\phi} \\
&= e^{2u} dzd\bar{z}
\end{aligned}$$

より (5.2) は示された.

次に $H \equiv 1$ を示す. (5.9) より,

$$\begin{aligned}
\psi &= \bar{\varepsilon}_2^1 - \varepsilon_1^2 \\
&= 2(qdp - pdq) + e^u d\bar{z} \\
&= 2e^{-\frac{u}{2}}(bd(e^{-\frac{u}{2}}a) - ad(e^{-\frac{u}{2}}b)) + e^u d\bar{z} \\
&= 2e^{-\frac{u}{2}} \left\{ b \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{u}{2}}adu + e^{-\frac{u}{2}}da \right) - a \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{u}{2}}bdu + e^{-\frac{u}{2}}db \right) \right\} + e^u d\bar{z} \\
&= 2e^{-u}(bda - adb) + e^u d\bar{z}
\end{aligned}$$

が成立する. また (4.2) より,

$$\psi = h\phi + H\bar{\phi} = he^u dz + He^u d\bar{z}.$$

ここで a, b は正則であることから da, db は $(1, 0)$ 型の 1 次形式である. よって $bda - adb$ は $(1, 0)$ 型. よって $bda - adb = \frac{1}{2}he^{2u}dz$, $H \equiv 1$ が分かる.

次に (5.3) を示す. (2.5) より,

$$\mathbf{II}^{2,0} = \frac{1}{2}he^{2u}dzdz = (bda - adb)dz$$

である. 一方, (5.5) より,

$$\begin{aligned} \frac{g_1^2 dg_2^1 - g_2^1 dg_1^2}{2g_1^1} dz &= \frac{-b^2 d(a^2) - a^2 d(-b^2)}{-2ab} dz \\ &= \frac{-2ab^2 da + 2a^2 b db}{-2ab} dz \\ &= (bda - adb)dz \end{aligned}$$

なので, (5.3) が分かる.

最後に (5.4) を示す. $g_f : M \rightarrow N(3)/\mathbb{R}^\times \cong \mathbb{C}P^1$ を $\mathbb{C}P^1$ への写像とみなすと (4.4) より,

$$g_f = [E_1] \quad (5.11)$$

で与えられる. $E = FK$ と (5.8) より,

$$E_1 = F \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

を得る.

$$F^{-1}dF = \alpha = \begin{pmatrix} -pq & p^2 \\ -q^2 & pq \end{pmatrix} e^u dz = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -q & p \end{pmatrix} e^u dz$$

より, α の第 1 列ベクトルを α_1 とすると,

$$\alpha_1 = -q \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} e^u dz$$

が分かる. $F^{-1}dF = \alpha$ より, $dF = F\alpha$ であるから,

$$dF_1 = F\alpha_1 = -qF \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} e^u dz \quad (5.13)$$

が成立する. よって (5.12), (5.13) より, $\dot{F}_1 = \frac{dF_1}{dz}$ とすると,

$$\dot{F}_1 = -qe^u F \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = -qe^u E_1 : U \rightarrow \mathbb{C}^2$$

と表される. $q \neq 0$ のとき, $[E_1] = [\dot{F}_1] \in \mathbb{C}P^1$ となる. $q = 0$ のとき, $p \neq 0$ であり, (5.12) より,

$$E_1 = F \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} = pF_1$$

よって $[E_1] = [F_1] \in \mathbb{C}P^1$ である. したがって (5.4) が示された. \square

6 \mathbb{E}^3 内の極小曲面との関係

6.1 行列モデルを用いた極小曲面の構成

第5章の結論を振り返ると、定理5.4より、 F が正則ナルであるとき、 $F^{-1}dF$ は U 上の同時に0にならない正則関数 a, b を用いて

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} -ab & a^2 \\ -b^2 & ab \end{pmatrix} dz$$

のように表せていた。 $p = e^{-\frac{u}{2}}a, q = e^{-\frac{u}{2}}b$ として、 $\phi = e^u dz$ とおくと、

$$\begin{pmatrix} -ab & a^2 \\ -b^2 & ab \end{pmatrix} dz = \begin{pmatrix} -pq & p^2 \\ -q^2 & pq \end{pmatrix} e^u dz = \begin{pmatrix} -\frac{p}{q} & \left(\frac{p}{q}\right)^2 \\ -1 & \frac{p}{q} \end{pmatrix} q^2 \phi \quad (6.1)$$

が成立するので、 $g = \frac{p}{q}, \omega = q^2 \phi$ とおくと、 g は U 上の有理型関数、 ω は U 上の正則な一次形式であり、

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} -g & g^2 \\ -1 & g \end{pmatrix} \omega$$

と表すことができる。この (g, ω) をWeierstrassデータという。

ここで3次元ユークリッド空間 \mathbb{E}^3 内の極小曲面に関して定理5.2, 定理5.4にあたる次の命題を紹介する。

命題 6.1. ([4], Proposition 8.26) M をリーマン面とし、 $f: M \rightarrow \mathbb{E}^3$ を共形はめ込みとする。はめ込み f が \mathbb{E}^3 内の極小曲面を与えることの必要十分条件は、局所座標 (U, z) に対して、 $f|_U = F + \bar{F}$ かつ $\langle dF, dF \rangle = 0$ をみたす正則関数 $F: U \rightarrow \mathbb{C}^3$ が存在することである。

([4], p266 Weierstrassの表現公式)より、 U 上の有理型関数 $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ と U 上の正則な $(1, 0)$ 型の微分形式 ω を用いて、

$$\alpha = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 + g^2 \\ -i(1 + g^2) \\ -2g \end{pmatrix} \omega \quad (6.2)$$

とすると、極小曲面の共形はめ込み $f: U \rightarrow \mathbb{E}^3$ の正則関数 $F: U \rightarrow \mathbb{C}^3$ は

$$dF = \alpha \quad (6.3)$$

の解である。ただし、 g が $z_0 \in U$ を k 位の極に持つとき、 ω は z_0 を $2k$ 位の零点に持つとする。ここで \mathbb{E}^3 を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 内の部分空間 $i \cdot \mathfrak{su}(2)$ と同一視する。 $i \cdot \mathfrak{su}(2)$ はパウリ行列 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を用いて、

$$i \cdot \mathfrak{su}(2) = \text{Span}_{\mathbb{R}}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \text{Span}_{\mathbb{C}}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

と表されるので,

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^3 \leftrightarrow x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3 \in i \cdot \mathfrak{su}(2)$$

という対応により \mathbb{E}^3 と $i \cdot \mathfrak{su}(2)$ を同一視できる. この同一視を自然に拡張すると \mathbb{C}^3 と $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ を

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \leftrightarrow z^1\sigma_1 + z^2\sigma_2 + z^3\sigma_3 \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$$

という対応で同一視することができる. このとき

$$\alpha = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 + g^2 \\ -i(1 + g^2) \\ -2g \end{pmatrix} \omega \leftrightarrow \alpha = \begin{pmatrix} -g & g^2 \\ -1 & g \end{pmatrix} \omega$$

のように対応する. よって (6.2), (6.3) より, 与えられた M 上の g, ω に対して,

$$dF = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 + g^2 \\ -i(1 + g^2) \\ -2g \end{pmatrix} \omega$$

の解 $F : M \rightarrow \mathbb{C}^3$ は

$$dF = \begin{pmatrix} -g & g^2 \\ -1 & g \end{pmatrix} \omega \tag{6.4}$$

の解 $F : M \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ であるとみなせる. $F : M \rightarrow \mathbb{C}^3$ の実部が \mathbb{E}^3 内の極小曲面の共形はめ込み $f : M \rightarrow \mathbb{E}^3$ を与えるから,

$$(F + \bar{F}) : M \rightarrow \mathbb{E}^3$$

を考えると, これは同一視により,

$$(F + F^*) : M \rightarrow i \cdot \mathfrak{su}(2)$$

に対応する. 実際

$$z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \leftrightarrow z = \begin{pmatrix} z^3 & z^1 + iz^2 \\ z^1 - iz^2 & -z^3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$$

と同一視していたことから,

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} \bar{z}^1 \\ \bar{z}^2 \\ \bar{z}^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{z}^3 & \bar{z}^1 + i\bar{z}^2 \\ \bar{z}^1 - i\bar{z}^2 & -\bar{z}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^3 & z^1 + iz^2 \\ z^1 - iz^2 & -z^3 \end{pmatrix}^* = z^* \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$$

と対応することが分かる． よって

$$(F + \bar{F}) : M \rightarrow \mathbb{E}^3 \leftrightarrow (F + F^*) : M \rightarrow i \cdot \mathfrak{su}(2)$$

を得る． $g : M \rightarrow \mathbb{C}^3$ を有理型関数, ω を M 上の正則な $(1, 0)$ 型微分形式とし,

$$\alpha = \begin{pmatrix} -g & g^2 \\ -1 & g \end{pmatrix} \omega$$

に対して, $\tilde{F} : M \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ を $d\tilde{F} = \alpha$ の解とすると,

$$\tilde{f} := \tilde{F} + \tilde{F}^* : M \rightarrow i \cdot \mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{E}^3$$

は命題 6.1 より, 極小曲面を構成する． また $F : M \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ を $F^{-1}dF = \alpha$ の解とすると,

$$f := FF^* : M \rightarrow \mathbb{H}(3) = \mathrm{Her} \cap \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$$

は定理 5.4 より, CMC 1 曲面を構成する．

6.2 \mathbb{E}^3 内の極小曲面と \mathbb{H}^3 内の CMC 1 曲面の関係

\tilde{F} と F の関係を調べる． ここで $\exp : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ を考えると,

$$(e^{\tilde{F}})^{-1}d(e^{\tilde{F}}) = (e^{\tilde{F}})^{-1}e^{\tilde{F}}d\tilde{F} = \alpha$$

であるので,

$$F = \exp \circ \tilde{F}$$

が成立する． これより次の可換図式を得る：

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{(d\pi)_I} & i \cdot \mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{E}^3 \\ \downarrow \exp & \swarrow \tilde{F} & \nearrow \tilde{f} \\ & M & \\ \downarrow & \swarrow F & \searrow f \\ \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{H}(3) = \mathrm{Her} \cap \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}). \end{array}$$

以上より, 与えられた g, ω に対して, \tilde{f} と f を「複素化」した \tilde{F} と F の間には $F = \exp \circ \tilde{F}$ という関係があることが分かる．

6.3 具体例

\mathbb{H}^3 内の CMC 1 曲面の具体例 ([7], 例 2.13) を考えてみる． リーマン面 M を複素平面 \mathbb{C} とする． (6.1) より,

$$g = 0, \quad \omega = -dz$$

とする。これより,

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ dz & 0 \end{pmatrix}$$

と分かる。まず F を求める。 $F = (F_{ij})$ とすると,

$$F_z dz = dF = \begin{pmatrix} F_{12} dz & 0 \\ F_{22} dz & 0 \end{pmatrix}$$

が成立する。これより,

$$(F_{11})_z = F_{12}, \quad (F_{21})_z = F_{22}, \quad (F_{12})_z = (F_{22})_z = 0$$

が成立する。よって $a_1, a_2, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ を用いて,

$$F(z) = \begin{pmatrix} a_1 z + c_1 & a_1 \\ a_2 z + c_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

と表せる。ここで、初期条件 $F(0) = I_2$ を与える。ここで I_2 は単位行列を表す。よって $c_1 = 1, c_2 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1$ が分かるため,

$$F(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}$$

と求まる。CMC 1 曲面のはめ込み $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}(3)$ は

$$f = FF^* = \begin{pmatrix} 1 & \bar{z} \\ z & |z|^2 + 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。これを $\mathbb{H}(3)$ の上半空間モデル \mathbb{H}_+^3 で考えてみる (詳細は 7.2 節を参照)。 \mathbb{H}_+^3 と \mathbb{H}^3 の同一視を

$$(w, t) \in \mathbb{H}_+^3 \leftrightarrow \begin{pmatrix} t + \frac{|w|^2}{t} & \frac{w}{t} \\ \frac{\bar{w}}{t} & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}(3) \quad (6.5)$$

で与える。よって $\mathbb{H}(3)$ 内のはめ込み f は

$$\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{1}{|z|^2 + 1} \right) \in \mathbb{H}_+^3 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \bar{z} \\ z & |z|^2 + 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}(3)$$

と同一視できる。これは中心 $(0, \frac{1}{2})$ で半径 $\frac{1}{2}$ の \mathbb{H}_+^3 の原点 (境界) に接する球面と分かる。これをホロ球面という。

$g = 0, \omega = -dz$ とし、ホロ球面に対応する \mathbb{E}^3 内の極小曲面を考えてみる。まず $\tilde{F} : \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ を求める。(6.4) より,

$$d\tilde{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ dz & 0 \end{pmatrix} dz$$

であるから, $\tilde{F}(0) = 0$ と初期条件を与えて, F と同様の議論で \tilde{F} を求めると,

$$\tilde{F}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

を得る. これは実際に $F = \exp \circ \tilde{F}$ を満たしている. よって極小曲面を与えるはめ込み $\tilde{f}: \mathbb{C} \rightarrow i \cdot \mathfrak{su}(2)$ は

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) = (\tilde{F} + \tilde{F}^*)(z) &= \begin{pmatrix} 0 & \bar{z} \\ z & 0 \end{pmatrix} \in i \cdot \mathfrak{su}(2) \\ &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z \\ -\operatorname{Im} z \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^3 \end{aligned}$$

であり, \tilde{f} は \mathbb{E}^3 内の平面を表す. よってホロ球面は \mathbb{E}^3 内の平面の対応物である.

第II部

与えられた関数 H を平均曲率に持つ \mathbb{H}^3 内の曲面の表現公式

第II部は“Kenmotsu type representation formula for surfaces with prescribed mean curvature in the hyperbolic 3-space”[2]で学習した内容を基に第7章から第10章までで構成される。第I部はBryant表現公式について述べたが、第II部では第8章のKenmotsu型表現公式(与えられた実数値関数 H を平均曲率に持つ \mathbb{H}^3 内の曲面の表現公式)、第9章のKenmotsu-Bryant型表現公式(\mathbb{H}^3 内の CMC H ($H > 1$) 曲面の表現公式)やKokubu-Bryant型表現公式(\mathbb{H}^3 内の CMC H ($H < 1$) 曲面の表現公式)を目標として進めていく。また、第7章でIwasawa分解を用いている点について説明する。Kenmotsu表現公式は H を与え、GH方程式を満たす Gauss 写像 g を与えることで、曲面を構成している。同様の議論で、Kenmotsu型表現公式も平均曲率 H を与え、ある方程式を満たす、Gauss 写像 g の対応物である写像 G を求め、曲面を構成したい。この g の対応物が normal Gauss 写像 G である。つまり Kenmotsu 表現公式と同様の議論をしたいという考えがIwasawa分解を用いた動機である。また、学習の際に[1]も参照したので、必要であれば、こちらも参考にさせていただきたい。

7 \mathbb{H}^3 内の曲面の normal Gauss 写像

7.1 Iwasawa 分解

$\text{Her}(\cong \mathbb{L}^4)$ 上の $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 作用は

$$g \cdot A = gAg^* \quad (g \in \text{SL}(2, \mathbb{C}), A \in \text{Her})$$

で与えられる。 $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ は \mathbb{H}^3 に等長的かつ推移的に作用し、 $\sigma_0 \in \mathbb{H}^3$ のイソトロピー群は $\text{SU}(2)$ であるから、(3.6)を用いると、

$$\mathbb{H}^3 = \text{SL}(2, \mathbb{C}) / \text{SU}(2) = \{\pi(g) = gg^* \mid g \in \text{SL}(2, \mathbb{C})\} \quad (7.1)$$

と表せる。また $\text{SU}(2)$ は $\mathbb{S}^2 \subset \sigma_0^\perp$ に等長的かつ推移的に作用し、 $\sigma_3 \in \mathbb{S}^2$ のイソトロピー群は $\text{U}(1)$ 、つまり

$$\text{U}(1) = \{(\cos \theta)\sigma_0 + i(\sin \theta)\sigma_3 \mid \theta \in [0, 2\pi)\} = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

であるから、

$$\mathbb{S}^2 = \text{SU}(2) / \text{U}(1) = \{h\sigma_3h^* \mid h \in \text{SU}(2)\}$$

が成立. $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の **Iwasawa** 分解は次で与えられる:

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) = \mathbf{S} \cdot \mathrm{SU}(2), \quad \mathbf{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & w \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \mid a > 0, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

つまり, 任意の $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ に対して, $s \in \mathbf{S}$, $h \in \mathrm{SU}(2)$ が一意的に存在し, $g = sh$ とできる. $\pi(g) = gg^* = ss^* = \pi(s)$ であるから, (7.1) より,

$$\mathbb{H}^3 = \{\pi(s) = ss^* \mid s \in \mathbf{S}\}.$$

よって \mathbb{H}^3 と \mathbf{S} は写像 $\pi|_{\mathbf{S}} : \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{H}^3$ で同一視できる. $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ から \mathbf{S} への射影を ϖ とする. \mathbf{S} のリー環 \mathfrak{s} を考えると, \mathfrak{s} は

$$\mathfrak{s} = \{t\sigma_3 + zE_{12} \mid t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}\} \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), \quad E_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である.

7.2 \mathbb{H}^3 の上半空間モデル \mathbb{H}_+^3

\mathbb{H}^3 の上半空間モデル $\mathbb{H}_+^3 = (\mathbb{R}_+^3, g)$ を $\mathbb{R}_+^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+$, $g = \frac{|dw|^2 + dt^2}{t^2}$ で定め, \mathbb{H}_+^3 と \mathbf{S} を次の写像 Ψ で同一視する:

$$\Psi : \mathbb{H}_+^3 \rightarrow \mathbf{S} \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}), \quad (w, t) \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{t} & \frac{w}{\sqrt{t}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{t}} \end{pmatrix}$$

補題 7.1. ([2], Lemma 1.1.) $(w, t) \in \mathbb{H}_+^3$, $s = \Psi(w, t)$, $x = \pi(s) = ss^*$ とおき,

$$X \in T_{(w,t)}\mathbb{H}_+^3, \quad \tilde{X} = d\Psi(X) \in T_s\mathbf{S}, \quad \tilde{\tilde{X}} = d(\pi \circ \Psi)(X) \in T_x\mathbb{H}^3$$

とする. つまり,

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_+^3 &\xrightarrow{\Psi} \mathbf{S} \xrightarrow{\pi} \mathbb{H}^3, & T_{(w,t)}\mathbb{H}_+^3 &\xrightarrow{d\Psi} T_s\mathbf{S} \xrightarrow{d\pi} T_x\mathbb{H}^3 \\ (w, t) &\mapsto s = \Psi(w, t) \mapsto x = ss^*, & X &\mapsto \tilde{X} \mapsto \tilde{\tilde{X}} \end{aligned}$$

とする. ここで $X = (X^1 + iX^2, X^3)$ と表す. $(d\pi)_{\sigma_0} : T_{\sigma_0}\mathbf{S} \xrightarrow{\cong} T_{\sigma_0}\mathbb{H}^3 = \sigma_0^\perp = i \cdot \mathfrak{su}(2)$ より,

$$(d\pi)_{\sigma_0}(dL_{s^{-1}}\tilde{\tilde{X}}) = s^{-1}\tilde{\tilde{X}}(s^{-1})^* = \frac{1}{t}(X^1\sigma_1 + X^2\sigma_2 + X^3\sigma_3) = \frac{1}{t}\underline{X} \in i \cdot \mathfrak{su}(2) \quad (7.2)$$

という等式が成立する. ここで, \underline{X} は X を $i \cdot \mathfrak{su}(2)$ の元と同一視したものとする.

Proof. $c(0) = (w, t)$, $c'(0) = X$ を満たす曲線 $c(\tau) = (w(\tau), t(\tau)) \in \mathbb{H}_+^3$ をとる. (7.2) の左から一つ目と二つ目の等号を示す.

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= (d\Psi)_{(w,t)}(X) \\ &= \frac{(\Psi \circ c)(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \\ &= \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \sqrt{t(\tau)} & \frac{w(\tau)}{\sqrt{t(\tau)}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{t(\tau)}} \end{pmatrix} \Big|_{\tau=0} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{t'(\tau)}{2\sqrt{t(\tau)}} & \frac{2w'(\tau)t(\tau) - w(\tau)t'(\tau)}{2t(\tau)\sqrt{t(\tau)}} \\ 0 & -\frac{t'(\tau)}{2t(\tau)\sqrt{t(\tau)}} \end{pmatrix} \Big|_{\tau=0} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{X^3}{2\sqrt{t}} & \frac{2(X^1 + iX^2)t - wX^3}{2t\sqrt{t}} \\ 0 & -\frac{X^3}{2t\sqrt{t}} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と計算できる. $s = \Psi(w, t) = \begin{pmatrix} \sqrt{t} & \frac{w}{\sqrt{t}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{t}} \end{pmatrix}$ ので, $s^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{t}} & -\frac{w}{\sqrt{t}} \\ 0 & \sqrt{t} \end{pmatrix}$ より,

$$dL_{s^{-1}}\tilde{X} = s^{-1}\tilde{X} = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} \frac{X^3}{2} & X^1 + iX^2 \\ 0 & -\frac{X^3}{2} \end{pmatrix} \in T_{\sigma_0}\mathbf{S} = \mathfrak{s}$$

である. 一方,

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{X}} &= d(\pi \circ \Psi)_{(w,t)}(X) \\ &= \frac{d}{d\tau} c(\tau)c(\tau)^* \Big|_{\tau=0} \\ &= \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \sqrt{t(\tau)} & \frac{w(\tau)}{\sqrt{t(\tau)}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{t(\tau)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{t(\tau)} & 0 \\ \frac{w(\tau)}{\sqrt{t(\tau)}} & \frac{1}{\sqrt{t(\tau)}} \end{pmatrix} \Big|_{\tau=0} \\ &= \tilde{X}s^* + s\tilde{X}^*\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}s^{-1}\tilde{\tilde{X}}(s^{-1})^* &= s^{-1}\tilde{X} + \tilde{X}^*(s^{-1})^* \\ &= s^{-1}\tilde{X} + (s^{-1}\tilde{X})^* \\ &= \frac{1}{t} \begin{pmatrix} X^3 & X^1 + iX^2 \\ X^1 - iX^2 & X^3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{t}(X^1\sigma_1 + X^2\sigma_2 + X^3\sigma_3)\end{aligned}$$

であり二つ目の等号が示された.

また $(d\pi)_{\sigma_0}$ が単位元における微分写像 $(d\pi)_{\sigma_0} : T_{\sigma_0}\mathbf{S} \ni A \mapsto A + A^* \in T_{\sigma_0}\mathbb{H}^3$ であるから,

$$(d\pi)_{\sigma_0}(dL_{s^{-1}}\tilde{X}) = s^{-1}\tilde{X} + (s^{-1}\tilde{X})^* = s^{-1}\tilde{\tilde{X}}(s^{-1})^*$$

より一つ目の等号も示された. \square

第 I 部の adapted フレームの定義を思い出す. M をリーマン面, $f : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ を共形はめ込み, (U, z) を可縮な局所座標とする. $E : U \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ が f の adapted フレームであるとする. このとき, E は

$$f|_U = \pi \circ E = EE^*$$

を満たす滑らかな写像で, $E \cdot \sigma_3$ は f の単位法ベクトル場, $E \cdot (\sigma_1 - i\sigma_2)$ の双対形式 $\omega^1 + i\omega^2$ がある滑らかな関数 $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて

$$\omega^1 + i\omega^2 = e^u dz$$

を満たす. f の adapted フレーム $E : U \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ に Iwasawa 分解を用いると,

$$E = \mathcal{S} \mathcal{H} \quad (\mathcal{S} = \varpi \circ E : U \rightarrow \mathbf{S}, \mathcal{H} : U \rightarrow \mathrm{SU}(2))$$

と分解できる. \mathcal{S} は $f = \pi \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \mathcal{S}^*$ を満たす.

7.3 曲面の normal Gauss 写像

定義 7.2. ([2], p880) $f : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ を共形はめ込みとする. f の adapted フレームを $E : U \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ とし, E を $E = \mathcal{S} \mathcal{H}$ ($\mathcal{S} : U \rightarrow \mathbf{S}$, $\mathcal{H} : U \rightarrow \mathrm{SU}(2)$) と Iwasawa 分解する. このとき f の normal Gauss 写像 $G : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ を

$$G := \mathcal{H} \sigma_3 \mathcal{H}^*$$

で定める.

この G が normal Gauss 写像とよばれる理由を次の補題を用いて述べる.

補題 7.3. ([2], Lemma 1.2.) $f : M \rightarrow \mathbb{H}_+^3$ の単位法ベクトル場を N とする. すなわち $x \in M$ に対して, $N(x) \in T_{f(x)}f(M) \subset \mathbb{E}^3$ とする. このとき,

$$G = \frac{1}{t} \underline{N}$$

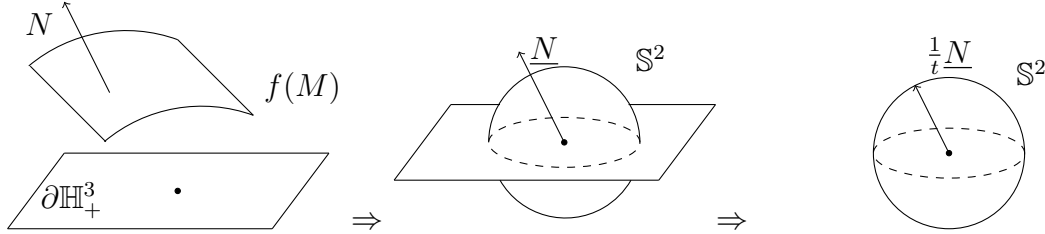
が成立する. ここで, \underline{N} は N を $i \cdot \mathfrak{su}(2)$ の元と同一視したものとする.

Proof. $\tilde{N} = d\Psi(N)$, $\tilde{\tilde{N}} = d(\pi \circ \Psi)(N)$ とおくと,

$$\begin{aligned} G &= \mathcal{H} \sigma_3 \mathcal{H}^* \\ &= \mathcal{S}^{-1} (E \sigma_3 E^*) (\mathcal{S}^{-1})^* \\ &= \mathcal{S}^{-1} \tilde{\tilde{N}} (\mathcal{S}^{-1})^* \\ &= d\pi(dL_{\mathcal{S}^{-1}} \tilde{\tilde{N}}) \quad (\because \text{補題 7.1}) \\ &= \frac{1}{t} \underline{N} \quad (\because \text{補題 7.1}) \end{aligned}$$

が成立する. よって示された. \square

$G = \frac{1}{t}N$ の幾何的な説明を行う. \mathbb{R}_+^3 を 3次元ユークリッド空間 \mathbb{E}^3 の上半空間とみなし, \mathbb{H}_+^3 内のはめ込み曲面上の点 $f(z) = (w, t)$ における単位法ベクトル $N(z)$ を \mathbb{E}^3 の原点に平行移動することで $i \cdot \mathfrak{su}(2) = \sigma_0^\perp \cong \mathbb{E}^3$ 内のベクトル $N(z)$ を得る. $N(z)$ をユークリッドノルムに関して正規化すると, normal Gauss 写像 $G = \frac{1}{t}N : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ を得る.



補足 7.4. ([2], p880) \mathbb{E}^3 の等長変換群は半直積 $\mathbb{E}^3 \rtimes \text{SU}(2)$ である. 一方, $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ は $\text{SU}(2)$ と補完的な部分の半直積に分解されない. そして $g = sh$ に対して normal Gauss 写像の変換則 $G_{g \cdot f} = h \cdot G_f$ が成立するのは \mathbf{S} の正規化群 $\mathbf{N}(\mathbf{S})$ の元であるときのみである. ここで $\mathbf{N}(\mathbf{S})$ は

$$\mathbf{N}(\mathbf{S}) = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C}, z \neq 0 \right\}$$

である.

7.4 Normal Gauss 写像と hyperbolic Gauss 写像の関係

ステレオ射影 $P_1 : \mathbb{S}^2 \setminus \{\sigma_3\} \rightarrow \mathbb{C}$ ($P_2 : \mathbb{S}^2 \setminus \{-\sigma_3\} \rightarrow \mathbb{C}$) によって \mathbb{S}^2 と $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を同一視する. この同一視により normal Gauss 写像 G を $\hat{\mathbb{C}}$ への写像とみなすことができる.

命題 7.5. ([2], p881) normal Gauss 写像 $G : M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ は可縮開集合 U 上で

$$G = P_1 \circ G = \frac{p}{q} = \frac{\overline{E_{22}}}{E_{21}} \quad \left(G = P_2 \circ G = \frac{q}{p} = \frac{E_{21}}{\overline{E_{22}}} \right) \tag{7.3}$$

と表せる. ただし

$$E = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix} = \mathcal{S} \mathcal{H}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} p & -\bar{q} \\ q & \bar{p} \end{pmatrix}$$

とする.

Proof. まず $G : M \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{\sigma_3\}$ を計算し

$$\begin{aligned} G &= \mathcal{H} \sigma_3 \mathcal{H}^* = \begin{pmatrix} |p|^2 - |q|^2 & 2p\bar{q} \\ 2\bar{p}q & |q|^2 - |p|^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^2 \subset i \cdot \mathfrak{su}(2) \\ &\leftrightarrow \left(p\bar{q} + \bar{p}q, \frac{1}{i}(p\bar{q} - \bar{p}q), |p|^2 - |q|^2 \right) \in \mathbb{E}^3 \end{aligned}$$

を得る. $P_1 : \mathbb{S}^2 \setminus \{\sigma_3\} \cong \mathbb{E}^3 \setminus \{(0, 0, 1)\} \ni (X, Y, Z) \mapsto \frac{X+iY}{1-Z} \in \hat{\mathbb{C}}$ より,

$$P_1 \circ G = \frac{p\bar{q} + \bar{p}q + p\bar{q} - \bar{p}q}{1 - |p|^2 + |q|^2} = \frac{2p\bar{q}}{2|q|^2} = \frac{p}{q}$$

が分かる. また

$$E = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & w \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -\bar{q} \\ q & \bar{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + wq & -a\bar{q} + w\bar{p} \\ \frac{q}{a} & \frac{\bar{p}}{a} \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

より, $\frac{p}{q} = \frac{\overline{E_{22}}}{E_{21}}$ も分かる. よって示された. \square

f の **generalized Gauss 写像** $\mathcal{G} : M \rightarrow \text{Gr}_2(\mathbb{L}^4)$ は M 内の点からその接空間への写像である. グラスマン多様体 $\text{Gr}_2(\mathbb{L}^4)$ は \mathbb{L}^4 内の向きづけられた space like な 2次元平面からなる集合であり,

$$\text{Gr}_2(\mathbb{L}^4) = \text{SL}(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^\times = \mathbb{Q}_1^2 := \{[g(\sigma_1 - i\sigma_2)g^*] \mid g \in \text{SL}(2, \mathbb{C})\}$$

という等質空間の構造を持つ. ここで $[w]$ は $w \in \mathbb{C}^4 = \mathbb{L}^4 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ に対して, 原点を通る複素直線 $\mathbb{C}w$ を表す. $\text{Gr}_2(\mathbb{L}^4)$ 上の複素座標 $(g_{11}/g_{21}, g_{12}/g_{22}) \in \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$ ($g = (g_{ij}) \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$) をとる. 実際 $g \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$, $z \in \mathbb{C}^\times$ とすると,

$$g \cdot z = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zg_{11} & \frac{g_{12}}{z} \\ zg_{21} & \frac{g_{22}}{z} \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

より, $(g_{11}/g_{21}, g_{12}/g_{22})$ は $\text{Gr}_2(\mathbb{L}^4)$ の複素座標になっていることが分かる. $\mathcal{G} : M \rightarrow \text{Gr}_2(\mathbb{L}^4) \cong \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$ を 2つの **hyperbolic Gauss 写像**

$$\mathcal{G}_1 = \frac{E_{11}}{E_{21}}, \quad \mathcal{G}_2 = \frac{E_{12}}{E_{22}} : M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

の組 $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ と考える. (7.5) より, $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ は $U(1)$ の違いによらないので, フレーム E の取り方によらず M 上で大域的に定義される. ここで hyperbolic Gauss 写像 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ と normal Gauss 写像 G の関係について次の命題が分かる.

命題 7.6. ([2], p881) 2つの hyperbolic Gauss 写像 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ は normal Gauss 写像 $G : M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ を用いて,

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{S}[G], \quad \mathcal{G}_2 = \mathcal{S} \left[-\frac{1}{G} \right]$$

と表される. ただし $g[\zeta] = (g_{11}\zeta + g_{12})/(g_{21}\zeta + g_{22})$ ($\zeta \in \hat{\mathbb{C}}$), つまり $g = (g_{ij}) \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ による $\hat{\mathbb{C}}$ 上の共形な作用とする.

Proof. $\mathcal{G}_1 = \mathcal{S}[G]$ を確かめる. $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} a & w \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$ として, (7.3), (7.4) より

$$\mathcal{S}[G] = \frac{aG + w}{\frac{1}{a}} = \frac{a^2G + w}{\frac{1}{a}} = \frac{ap + wq}{\frac{q}{a}} = \frac{E_{11}}{E_{21}} = \mathcal{G}_1$$

が成立し, 示された. $\mathcal{G}_2 = \mathcal{S} \left[-\frac{1}{G} \right]$ も同様に確かめることができる. \square

補足 7.7. ここでの hyperbolic Gauss 写像 \mathcal{G}_1 は第 I 部の定義 4.6 の hyperbolic Gauss 写像 g_f と一致する. 実際 (5.11) より,

$$g_f = [E_1] = \left[\begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{21} \end{pmatrix} \right] \leftrightarrow \frac{E_{11}}{E_{21}} = \mathcal{G}_1$$

と表される. よって g_f と \mathcal{G}_1 は一致することが分かる.

7.5 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 値のモーレーカルタン形式 $E^{-1}dE$

M をリーマン面, $f : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ を共形はめ込み, (U, z) を M の可縮な局所座標とし, $E : U \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ を f の adapted フレームとする. ϕ を $\phi := \omega^1 + i\omega^2 = e^u dz$ とする. ρ を M 上の接続形式, つまり $\rho = \omega_1^2$ とする. このとき f によって誘導される計量は $\mathbf{I} = \phi \cdot \bar{\phi}$ によって与えられ,

$$d\phi + i\rho \wedge \phi = 0$$

が成立する. f の平均曲率を H とし, ホップ不変量を h とし, ホップ微分を $\Phi = h\phi \cdot \phi$ とする. ここでのホップ微分 Φ は第 I 部の (2.5) でのホップ微分 $\mathbf{II}^{2,0}$ と $\Phi = 2\mathbf{II}^{2,0}$ という関係があることに注意する. 以下 Φ のことをホップ微分ということとする.

命題 7.8. ([2], p882) U 上の adapted フレーム E による $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 上のモーレーカルタン形式の引き戻し $\varepsilon := E^{-1}dE$ は

$$E^{-1}dE = \varepsilon = \varepsilon_{\mathfrak{h}} + \varepsilon_{\mathfrak{m}}, \quad (7.6)$$

$$\varepsilon_{\mathfrak{h}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\rho & H\phi + \bar{h}\bar{\phi} \\ -H\bar{\phi} - h\phi & -i\rho \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{\mathfrak{m}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \phi \\ \bar{\phi} & 0 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

と表される. ここで直和分解 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{su}(2) \oplus i \cdot \mathfrak{su}(2) =: \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ に関して, $\varepsilon = \varepsilon_{\mathfrak{h}} + \varepsilon_{\mathfrak{m}}$ と分解している.

Proof. (5.1) と同様の計算で分かる. □

8 Kenmotsu 型表現公式

8.1 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 値モーレーカルタン形式 $\mathcal{S}^{-1}d\mathcal{S}$

M をリーマン面, $f : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ を共形はめ込み, (U, z) を M の可縮な局所座標とし, $E = \mathcal{S}\mathcal{H} : U \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) = \mathbf{S} \cdot \mathrm{SU}(2)$ を f の (U, z) に関する adapted フレームとする. $\mathcal{S} = \varpi \circ E : M \rightarrow \mathbf{S} \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ は U 上で,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{-1}d\mathcal{S} &= \mathcal{H}E^{-1}(dE)\mathcal{H}^{-1} + \mathcal{H}d(\mathcal{H}^{-1}) \\ &= \mathcal{H}(\varepsilon_{\mathfrak{h}} + \varepsilon_{\mathfrak{m}})\mathcal{H}^* - (d\mathcal{H})\mathcal{H}^* \\ &= \mathcal{H}\varepsilon_{\mathfrak{m}}\mathcal{H}^* + \mathcal{H}(\varepsilon_{\mathfrak{h}} - \mathcal{H}^{-1}d\mathcal{H})\mathcal{H}^* \end{aligned}$$

を満たす. よって $\mathcal{S}^{-1}d\mathcal{S} =: \tau = \tau_{\mathfrak{m}} + \tau_{\mathfrak{h}}$ とするとき,

$$\tau_{\mathfrak{m}} = \mathcal{H}\varepsilon_{\mathfrak{m}}\mathcal{H}^*, \quad \tau_{\mathfrak{h}} = \mathcal{H}(\varepsilon_{\mathfrak{h}} - \mathcal{H}^{-1}d\mathcal{H})\mathcal{H}^* \quad (8.1)$$

となることが分かる. α を U 上の $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 値の $(1, 0)$ 型の微分形式で

$$\alpha := \mathcal{H}E_{12}\mathcal{H}^*\phi = \mathcal{H} \begin{pmatrix} 0 & \phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{H}^*, \quad E_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2)$$

と定義すると,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{-1}d\mathcal{S} + (\mathcal{S}^{-1}d\mathcal{S})^* &= 2\tau_{\mathfrak{m}} \\ &= 2\mathcal{H}\varepsilon_{\mathfrak{m}}\mathcal{H}^* \\ &= \mathcal{H} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{\phi} & 0 \end{pmatrix} \right\} \mathcal{H}^* \\ &= (\mathcal{H}E_{12}\mathcal{H}^*\phi) + (\mathcal{H}E_{12}\mathcal{H}^*\phi)^* \\ &= \alpha + \alpha^* \end{aligned} \quad (8.2)$$

を得る. 従って $\mathcal{S}^{-1}d\mathcal{S}$ の \mathfrak{m} 成分 $\tau_{\mathfrak{m}}$ が $\frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*)$ であると分かる. ここで $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} p & -\bar{q} \\ q & \bar{p} \end{pmatrix}$

とおくとき, α は

$$\alpha = \mathcal{H}E_{12}\mathcal{H}^*\phi = \begin{pmatrix} -pq & p^2 \\ -q^2 & pq \end{pmatrix} \phi$$

となるため, normal Gauss 写像 $P_i \circ G : M \rightarrow \hat{\mathbb{C}} (i = 1, 2)$ を用いると, $\omega_1 = q^2\phi$, $\omega_2 = p^2\phi$ として

$$\alpha = \begin{cases} \begin{pmatrix} -(P_1 \circ G) & (P_1 \circ G)^2 \\ -1 & (P_1 \circ G) \end{pmatrix} \omega_1 & \text{on } G^{-1}(\mathbb{S}^2 \setminus \{\sigma_3\}) \subset M \\ \begin{pmatrix} -(P_2 \circ G) & 1 \\ -(P_2 \circ G)^2 & (P_2 \circ G) \end{pmatrix} \omega_2 & \text{on } G^{-1}(\mathbb{S}^2 \setminus \{-\sigma_3\}) \subset M \end{cases}$$

と表すことができる。以後 $G = P_1 \circ G$, $\omega = \omega_1$ を採用して,

$$\alpha = \begin{pmatrix} -G & G^2 \\ -1 & G \end{pmatrix} \omega \quad \text{on } G^{-1}(\mathbb{C}) \subset M \quad (8.3)$$

と表すこととする。

U 上の \mathfrak{s} 値の 1 次形式 $\mathcal{S}^{-1}d\mathcal{S}$ に関する次の命題が分かる。

命題 8.1. ([2], p883)

$$\mathcal{S}^{-1}d\mathcal{S} = \tau_{\mathfrak{m}} + \tau_{\mathfrak{h}} = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*) + \frac{1}{4}[\sigma_3, \alpha + \alpha^*] \quad (8.4)$$

と表すことができる。ここで $[\cdot, \cdot]$ はリー括弧を表す。

Proof. (8.2) より, U 上の \mathfrak{s} 値の 1 次形式 $\mathcal{S}^{-1}d\mathcal{S}$ は \mathfrak{m} 成分 $\tau_{\mathfrak{m}}$ は $\frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*)$ だった。 \mathfrak{h} 成分 $\tau_{\mathfrak{h}}$ が $\frac{1}{4}[\sigma_3, \alpha + \alpha^*]$ であることを示す。 $\mathcal{S}^{-1}d\mathcal{S}$ は \mathfrak{s} 値の 1 次形式であるから, 実数値 1 次形式 β , 複素数値 1 次形式 γ を用いて,

$$\mathcal{S}^{-1}d\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

と表すことができる。このとき $\mathfrak{m} = \mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{h} = i \cdot \mathfrak{su}(2)$ より,

$$\begin{aligned} \tau_{\mathfrak{m}} &= \frac{1}{2}(\tau + \tau^*) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\beta & \gamma \\ \bar{\gamma} & -2\beta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*) \\ \tau_{\mathfrak{h}} &= \frac{1}{2}(\tau - \tau^*) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\bar{\gamma} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。一方で $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, $[\sigma_3, A] = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ -2c & 0 \end{pmatrix}$ と計算できるから, $[\sigma_3, \alpha + \alpha^*] = \begin{pmatrix} 0 & 2\gamma \\ -2\bar{\gamma} & 0 \end{pmatrix}$ である。よって $\tau_{\mathfrak{h}} = \frac{1}{4}[\sigma_3, \alpha + \alpha^*]$ を得る。 \square

8.2 可積分方程式と Gauss · Codazzi 方程式

(7.7) の $\varepsilon_{\mathfrak{h}}, \varepsilon_{\mathfrak{m}}$ を $\varepsilon_{\mathfrak{h}} = \varepsilon'_{\mathfrak{h}} + \varepsilon''_{\mathfrak{h}}$, $\varepsilon_{\mathfrak{m}} = \varepsilon'_{\mathfrak{m}} + \varepsilon''_{\mathfrak{m}}$ と (1, 0) 型の 1 次形式と (0, 1) 型の 1 次形式に分解する。つまり,

$$\varepsilon'_{\mathfrak{h}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\rho' & H\phi \\ -h\phi & -i\rho' \end{pmatrix}, \quad \varepsilon''_{\mathfrak{h}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\rho'' & \bar{h}\bar{\phi} \\ -H\bar{\phi} & -i\rho'' \end{pmatrix}, \quad \varepsilon'_{\mathfrak{m}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon''_{\mathfrak{m}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{\phi} & 0 \end{pmatrix}$$

とする。ただし ρ', ρ'' はそれぞれ ρ の (1, 0) 成分, (0, 1) 成分を表す。このとき, 次の命題が成り立つ。

命題 8.2. ε に関する可積分方程式 $d\varepsilon + \varepsilon \wedge \varepsilon = 0$ は \mathfrak{h} 成分と \mathfrak{m} 成分に分解することができる, Gauss・Codazzi 方程式と同値である. つまり,

$$\begin{aligned} d\varepsilon + \varepsilon \wedge \varepsilon = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} d\varepsilon_{\mathfrak{h}} + [\varepsilon'_{\mathfrak{h}} \wedge \varepsilon''_{\mathfrak{h}}] + [\varepsilon'_m \wedge \varepsilon''_m] = 0 \\ d\varepsilon_m + [\varepsilon'_m \wedge \varepsilon''_{\mathfrak{h}}] + [\varepsilon'_{\mathfrak{h}} \wedge \varepsilon''_m] = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -4e^{-2u}u_{z\bar{z}} = -1 + H^2 - |h|^2 \\ h_{\bar{z}} + 2hu_{\bar{z}} = H_z \end{cases} \end{aligned}$$

が成立する.

Proof. ウェッジ積の計算より,

$$\begin{aligned} d\varepsilon + \varepsilon \wedge \varepsilon = 0 &\Leftrightarrow d\varepsilon + \frac{1}{2}[\varepsilon \wedge \varepsilon] = 0 \\ &\Leftrightarrow d\varepsilon + [(\varepsilon'_{\mathfrak{h}} + \varepsilon'_m) \wedge (\varepsilon''_{\mathfrak{h}} + \varepsilon''_m)] = 0 \\ &\Leftrightarrow d\varepsilon_{\mathfrak{h}} + d\varepsilon_m + [\varepsilon'_{\mathfrak{h}} \wedge \varepsilon''_{\mathfrak{h}}] + [\varepsilon'_{\mathfrak{h}} \wedge \varepsilon''_m] + [\varepsilon'_m \wedge \varepsilon''_{\mathfrak{h}}] + [\varepsilon'_m \wedge \varepsilon''_m] = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} d\varepsilon_{\mathfrak{h}} + [\varepsilon'_{\mathfrak{h}} \wedge \varepsilon''_{\mathfrak{h}}] + [\varepsilon'_m \wedge \varepsilon''_m] = 0 \\ d\varepsilon_m + [\varepsilon'_m \wedge \varepsilon''_{\mathfrak{h}}] + [\varepsilon'_{\mathfrak{h}} \wedge \varepsilon''_m] = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

が成立する. ただし, $\alpha = Adz, \beta = Bd\bar{z}$ としたとき, $[\alpha \wedge \beta] = [A, B]dz \wedge d\bar{z}$ と計算するものとする. 最後の同値は \mathfrak{h} 成分と \mathfrak{m} 成分に分解している.

$$d\varepsilon_m + [\varepsilon'_m \wedge \varepsilon''_{\mathfrak{h}}] + [\varepsilon'_{\mathfrak{h}} \wedge \varepsilon''_m] = 0 \quad (8.5)$$

について計算すると,

$$\begin{aligned} d\varepsilon_m &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & d\phi \\ d\bar{\phi} & 0 \end{pmatrix}, \\ [\varepsilon'_m \wedge \varepsilon''_{\mathfrak{h}}] &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -H\phi \wedge \bar{\phi} & 2i\rho \wedge \phi \\ 0 & H\phi \wedge \bar{\phi} \end{pmatrix}, \\ [\varepsilon'_{\mathfrak{h}} \wedge \varepsilon''_m] &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} H\phi \wedge \bar{\phi} & 0 \\ -2i\rho \wedge \bar{\phi} & -H\phi \wedge \bar{\phi} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成立する. よって

$$d\varepsilon_m + [\varepsilon'_m \wedge \varepsilon''_{\mathfrak{h}}] + [\varepsilon'_{\mathfrak{h}} \wedge \varepsilon''_m] = 0 \Leftrightarrow d\phi = -i\rho \wedge \phi$$

が成り立つ. $d\phi + i\rho \wedge \phi = 0$ が成立していたから, (8.5) は成立する. 次に,

$$d\varepsilon_{\mathfrak{h}} + [\varepsilon'_{\mathfrak{h}} \wedge \varepsilon''_{\mathfrak{h}}] + [\varepsilon'_m \wedge \varepsilon''_m] = 0$$

について計算すると,

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{\mathfrak{h}} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} id\rho & d(H\phi + \bar{h}\bar{\phi}) \\ d(-H\bar{\phi} - h\phi) & -id\rho \end{pmatrix}, \\ [\varepsilon'_{\mathfrak{h}} \wedge \varepsilon''_{\mathfrak{h}}] &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (|h|^2 - H^2)\phi \wedge \bar{\phi} & 2i\rho \wedge (H\phi + \bar{h}\bar{\phi}) \\ 2i(-H\bar{\phi} - h\phi) \wedge \rho & -(|h|^2 - H^2)\phi \wedge \bar{\phi} \end{pmatrix}, \\ [\varepsilon'_m \wedge \varepsilon''_m] &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \phi \wedge \bar{\phi} & 0 \\ 0 & -\phi \wedge \bar{\phi} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る. (1,1) 成分, (2,2) 成分をみると,

$$d\rho = \frac{i}{2}(1 - H^2 + |h|^2)\phi \wedge \bar{\phi} = -\frac{i}{2}K\phi \wedge \bar{\phi}$$

が分かり, これは Gauss 方程式 $d\omega_2^1 = K\omega^1 \wedge \omega^2$ と同値である. つまり, 定理 2.10 より, $-4e^{-2u}u_{z\bar{z}} = -1 + H^2 - |h|^2$ が成り立つことと同値. 一方, (1,2) 成分, (2,1) 成分をみると,

$$d(H\phi + \bar{h}\bar{\phi}) = -i\rho \wedge (H\phi + \bar{h}\bar{\phi})$$

が分かり, これは Codazzi 方程式 $d(\omega_1^3 - i\omega_2^3) = -i\omega_2^1 \wedge (\omega_1^3 - i\omega_2^3)$ と同値なので, つまり定理 2.10 より, $h_{\bar{z}} + 2hu_{\bar{z}} = H_z$ と同値. よって

$$d\varepsilon_{\mathfrak{h}} + [\varepsilon'_{\mathfrak{h}} \wedge \varepsilon''_{\mathfrak{h}}] + [\varepsilon'_m \wedge \varepsilon''_m] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4e^{-2u}u_{z\bar{z}} = -1 + H^2 - |h|^2 \\ h_{\bar{z}} + 2hu_{\bar{z}} = H_z \end{cases}$$

を得る. 以上より,

$$d\varepsilon + \varepsilon \wedge \varepsilon = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4e^{-2u}u_{z\bar{z}} = -1 + H^2 - |h|^2 \\ h_{\bar{z}} + 2hu_{\bar{z}} = H_z \end{cases} \quad (8.6)$$

を得る. (8.6) の (\Leftrightarrow) は与えられた u, H, h に対して, $\phi = e^u dz$, $\rho = -i(u_z dz - u_{\bar{z}} d\bar{z})$ とし, ε を (7.6), (7.7) のように定めると, $F^{-1}dF = \varepsilon$ は解 F を持つことを意味する. \square

8.3 G と H の満たす方程式

$d\varepsilon_m$ を $d\varepsilon'_m$ と $d\varepsilon''_m$ に分解すると,

$$\begin{aligned} d\varepsilon'_m &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & d\phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ [\varepsilon''_{\mathfrak{h}} \wedge \varepsilon'_m] &= [\varepsilon'_m \wedge \varepsilon''_{\mathfrak{h}}] = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -H\phi \wedge \bar{\phi} & 2i\rho \wedge \phi \\ 0 & H\phi \wedge \bar{\phi} \end{pmatrix}, \\ [\varepsilon''_m \wedge \varepsilon'_m] &= [\varepsilon'_m \wedge \varepsilon''_m] = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \phi \wedge \bar{\phi} & 0 \\ 0 & -\phi \wedge \bar{\phi} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と計算できた. $d\phi + i\rho \wedge \phi = 0$ の成立から,

$$d\varepsilon'_m + [\varepsilon''_h \wedge \varepsilon'_m] = -H[\varepsilon''_m \wedge \varepsilon'_m] \quad (8.7)$$

を得る. この式から次の補題が分かる.

補題 8.3. ([2], p883) α と H に関して

$$d\alpha + \frac{1}{4}[[\sigma_3, \alpha^*] \wedge \alpha] = -\frac{1}{2}H[\alpha^* \wedge \alpha] \quad (8.8)$$

が成立する.

Proof. 命題 8.1 より, τ_h, τ_m を $\tau_h = \tau'_h + \tau''_h, \tau_m = \tau'_m + \tau''_m$ と $(1, 0)$ 型の 1 次形式と $(0, 1)$ 型の 1 次形式に分解して,

$$\tau'_h = \frac{1}{4}[\sigma_3, \alpha], \quad \tau''_h = \frac{1}{4}[\sigma_3, \alpha^*], \quad \tau'_m = \frac{1}{2}\alpha, \quad \tau''_m = \frac{1}{2}\alpha^*$$

と表す. これより, (8.8) は

$$d\tau'_m + [\tau''_h \wedge \tau'_m] = -H[\tau''_m \wedge \tau'_m] \quad (8.9)$$

と書き直すことができる. (8.7) を用いてこの式を示す. (8.1) より,

$$\tau''_h = \mathcal{H}(\varepsilon''_h - \mathcal{H}^{-1}\mathcal{H}_{\bar{z}}d\bar{z})\mathcal{H}^*, \quad \tau'_m = \mathcal{H}\varepsilon'_m\mathcal{H}^*, \quad \tau''_m = \mathcal{H}\varepsilon''_m\mathcal{H}^*$$

と表せる. $\varepsilon'_m = Bdz$ とおくと,

$$\begin{aligned} d\tau'_m &= d\mathcal{H} \wedge \varepsilon'_m\mathcal{H}^* + \mathcal{H}(d\varepsilon'_m)\mathcal{H}^* - \mathcal{H}\varepsilon'_m \wedge d\mathcal{H}^* \\ &= \mathcal{H}_{\bar{z}}B\mathcal{H}^*d\bar{z} \wedge dz + \mathcal{H}(d\varepsilon'_m)\mathcal{H}^* - \mathcal{H}B(\mathcal{H}^*)_{\bar{z}}dz \wedge d\bar{z} \end{aligned}$$

が成立. ここで最後の項は ε'_m が 1 次形式であるから符号がマイナスになっていることに注意する. また

$$[\tau''_m \wedge \tau'_m] = [\mathcal{H}\varepsilon''_m\mathcal{H}^* \wedge \mathcal{H}\varepsilon'_m\mathcal{H}^*] = \mathcal{H}[\varepsilon''_m \wedge \varepsilon'_m]\mathcal{H}^*$$

と,

$$\begin{aligned} [\tau''_h \wedge \tau'_m] &= [\mathcal{H}(\varepsilon''_h - \mathcal{H}^{-1}\mathcal{H}_{\bar{z}}d\bar{z})\mathcal{H}^* \wedge \mathcal{H}\varepsilon'_m\mathcal{H}^*] \\ &= \mathcal{H}[(\varepsilon''_h - \mathcal{H}^{-1}\mathcal{H}_{\bar{z}}d\bar{z}) \wedge \varepsilon'_m]\mathcal{H}^* \\ &= \mathcal{H}[\varepsilon''_h \wedge \varepsilon'_m]\mathcal{H}^* - \mathcal{H}_{\bar{z}}B\mathcal{H}^*d\bar{z} \wedge dz + \mathcal{H}B\mathcal{H}^{-1}\mathcal{H}_{\bar{z}}\mathcal{H}^*d\bar{z} \wedge dz \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, $(\mathcal{H}\mathcal{H}^*)_{\bar{z}} = 0$ より, $\mathcal{H}_{\bar{z}}\mathcal{H}^* = -\mathcal{H}(\mathcal{H}^*)_{\bar{z}}$. つまり, $-\mathcal{H}B(\mathcal{H}^*)_{\bar{z}}dz \wedge d\bar{z} + \mathcal{H}B\mathcal{H}^{-1}\mathcal{H}_{\bar{z}}\mathcal{H}^*d\bar{z} \wedge dz = 0$ がわかるので,

$$\begin{aligned} d\tau'_m + [\tau''_h \wedge \tau'_m] &= -H[\tau''_m \wedge \tau'_m] \\ \Leftrightarrow \mathcal{H}(d\varepsilon'_m)\mathcal{H}^* + \mathcal{H}[\varepsilon''_h \wedge \varepsilon'_m]\mathcal{H}^* &= -H\mathcal{H}[\varepsilon''_m \wedge \varepsilon'_m]\mathcal{H}^* \\ \Leftrightarrow d\varepsilon'_m + [\varepsilon''_h \wedge \varepsilon'_m] &= -H[\varepsilon''_m \wedge \varepsilon'_m] \end{aligned}$$

を得る. よって (8.7) より, (8.9) は示された. これより, (8.8) は示された. \square

8.4 ω の表し方

(8.3), (8.8) より, 次が分かる.

補題 8.4. ([2], p883) ω は G と H を用いて

$$\omega(=\omega_1) = \frac{2(\bar{G})_z}{\{(1 - |G|^2) + H(1 + |G|^2)\}(1 + |G|^2)} dz \quad (8.10)$$

と表せる.

Proof. (8.3) より,

$$d\alpha = \begin{pmatrix} -G_z d\bar{z} \wedge \omega - Gd\omega & 2GG_z d\bar{z} \wedge \omega + G^2 d\omega \\ -d\omega & G_z d\bar{z} \wedge \omega + Gd\omega \end{pmatrix}$$

が成立. また,

$$[\sigma_3, \alpha^*] = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2\bar{G} & 0 \end{pmatrix} \bar{\omega}$$

より,

$$[[\sigma_3, \alpha^*] \wedge \alpha] = 2 \begin{pmatrix} 1 + |G|^4 & -2G \\ 2\bar{G}|G|^2 & -(1 + |G|^4) \end{pmatrix} \bar{\omega} \wedge \omega$$

と計算できる. さらに

$$[\alpha^* \wedge \alpha] = \begin{pmatrix} 1 - |G|^4 & -2G(1 + |G|^2) \\ -2\bar{G}(1 + |G|^2) & |G|^4 - 1 \end{pmatrix} \bar{\omega} \wedge \omega$$

が分かる. したがって (8.8) より,

$$-G_z d\bar{z} \wedge \omega - Gd\omega + \frac{1}{2}(1 + |G|^4)\bar{\omega} \wedge \omega = -\frac{1}{2}H(1 - |G|^4)\bar{\omega} \wedge \omega \quad (8.11)$$

$$2GG_z d\bar{z} \wedge \omega + G^2 d\omega - G\bar{\omega} \wedge \omega = HG(1 + |G|^2)\bar{\omega} \wedge \omega \quad (8.12)$$

$$-d\omega + \bar{G}|G|^2 \bar{\omega} \wedge \omega = H\bar{G}(1 + |G|^2)\bar{\omega} \wedge \omega \quad (8.13)$$

を得る. (8.13) $\times G$ - (8.11) より,

$$\begin{aligned} G_z d\bar{z} \wedge \omega + \frac{1}{2}(-1 + |G|^4)\bar{\omega} \wedge \omega &= \frac{1}{2}H(1 + |G|^2)^2 \bar{\omega} \wedge \omega \\ \Leftrightarrow G_z d\bar{z} + \frac{1}{2}(-1 + |G|^4)\bar{\omega} &= \frac{1}{2}H(1 + |G|^2)^2 \bar{\omega} \\ \Leftrightarrow \bar{\omega} &= \frac{2G_z}{\{(1 - |G|^2) + H(1 + |G|^2)\}(1 + |G|^2)} d\bar{z} \\ \Leftrightarrow \omega &= \frac{2(\bar{G})_z}{\{(1 - |G|^2) + H(1 + |G|^2)\}(1 + |G|^2)} dz \end{aligned}$$

が成立する. この ω は (8.12) を満たすことも分かる. よって (8.10) が成立する. \square

8.5 M 上の誘導計量とホップ微分

命題 8.5. ([2], Proposition 2.1.) f に誘導される M 上の計量 \mathbf{I} とホップ微分 Φ は

$$\mathbf{I} = (1 + |G|^2)^2 \omega \cdot \bar{\omega} \quad (8.14)$$

$$\Phi = 2G_z \omega \cdot dz = \frac{4G_z(\bar{G})_z}{\{(1 - |G|^2) + H(1 + |G|^2)\}(1 + |G|^2)} dz \cdot dz \quad (8.15)$$

と表せる.

Proof. (7.3) と $\omega = q^2 \phi$ より,

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \phi \cdot \bar{\phi} \\ &= \frac{1}{|q|^4} \omega \cdot \bar{\omega} \\ &= \left(\frac{|p|^2 + |q|^2}{|q|^2} \right)^2 \omega \cdot \bar{\omega} \\ &= (1 + |G|^2)^2 \omega \cdot \bar{\omega} \end{aligned}$$

よって (8.14) は示された.

次に (8.15) を示す. 2 つ目の等号は ω を代入するだけなので, 1 つ目の等号, つまり $\Phi = 2G_z \omega \cdot dz$ を示す. f の単位法線ベクトル場を N とすると Φ は

$$\Phi = 2\langle f_{zz}, N \rangle dz dz$$

である. まず

$$2\langle f_{z\bar{z}}, N \rangle = e^{-2u} \operatorname{tr}(A_z[A, A^*]) \quad (8.16)$$

を示す. $f = \mathcal{S}\mathcal{S}^*$ より,

$$df = d(\mathcal{S}\mathcal{S}^*) = \mathcal{S}(\tau + \tau^*)\mathcal{S}^* = \mathcal{S}(2\tau_m)\mathcal{S}^* = \mathcal{S}(\alpha + \alpha^*)\mathcal{S}^*$$

また, $df = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}$ より, $\alpha = Adz$ とおくと,

$$f_z = \mathcal{S}A\mathcal{S}^*$$

が成立する. よって

$$f_{zz} = \mathcal{S}_z A \mathcal{S}^* + \mathcal{S} A_z \mathcal{S}^* + \mathcal{S} A (\mathcal{S}^*)_z$$

(8.4) より,

$$\mathcal{S}_z = \frac{1}{2} \mathcal{S}A + \frac{1}{4} \mathcal{S}[\sigma_3, A], \quad \mathcal{S}_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \mathcal{S}A^* + \frac{1}{4} \mathcal{S}[\sigma_3, A^*]$$

が成立する. また,

$$(\mathcal{S}^*)_z = (\mathcal{S}_{\bar{z}})^* = \frac{1}{2} A \mathcal{S}^* + \frac{1}{4} [\sigma_3, A] \mathcal{S}^*$$

が成立する. よって $A^2 = 0$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_z A \mathcal{S}^* + \mathcal{S} A (\mathcal{S}^*)_z &= \left(\frac{1}{2} \mathcal{S} A + \frac{1}{4} \mathcal{S} [\sigma_3, A] \right) A \mathcal{S}^* + \mathcal{S} A \left(\frac{1}{2} A \mathcal{S}^* + \frac{1}{4} [\sigma_3, A] \mathcal{S}^* \right) \\ &= \mathcal{S} A^2 \mathcal{S}^* + \frac{1}{4} \mathcal{S} \sigma_3 A^2 \mathcal{S}^* + \frac{1}{4} \mathcal{S} A^2 \sigma_3 \mathcal{S}^* - \frac{1}{2} \mathcal{S} A \sigma_3 A \mathcal{S}^* \\ &= -\frac{1}{2} \mathcal{S} A \sigma_3 A \mathcal{S}^* \\ &= g \mathcal{S} A \mathcal{S}^*\end{aligned}$$

を得る. よって $f_{zz} = \mathcal{S} (A_z + gA) \mathcal{S}^*$ を得る. また N は $f_z = \mathcal{S} A \mathcal{S}^*$ と $f_{\bar{z}} = \mathcal{S} A^* \mathcal{S}^*$ に直交するから, ベクトル積の性質から $N = \frac{1}{\sqrt{\langle N, N \rangle}} \mathcal{S} [A, A^*] \mathcal{S}^*$ と表せる. (8.14) より,

$$e^{2u} = (1 + |G|^2)^2 |w|^2$$

が成立することから,

$$\begin{aligned}\langle N, N \rangle &= \langle \mathcal{S} [A, A^*] \mathcal{S}^*, \mathcal{S} [A, A^*] \mathcal{S}^* \rangle \\ &= -\det(\mathcal{S} [A, A^*] \mathcal{S}^*) \\ &= -\det[A, A^*] \\ &= (1 + |G|^2)^4 |w|^4 \\ &= e^{4u}\end{aligned}$$

が分かるので, $N = e^{-2u} \mathcal{S} [A, A^*] \mathcal{S}^*$ と表せる. また, (3.2) と $\mathcal{S} : U \rightarrow \mathbf{S} \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ より,

$$\begin{aligned}\langle f_{zz}, N \rangle &= e^{-2u} \langle \mathcal{S} (A_z + gA) \mathcal{S}^*, \mathcal{S} [A, A^*] \mathcal{S}^* \rangle \\ &= e^{-2u} \langle (A_z + gA), [A, A^*] \rangle \\ &= e^{-2u} \langle A_z, [A, A^*] \rangle \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2u} \mathrm{tr}(A_z \widetilde{[A, A^*]}) \\ &= \frac{1}{2} e^{-2u} \mathrm{tr}(A_z [A, A^*])\end{aligned}$$

が成立する. 最後の等号は $-\widetilde{[A, A^*]} = [A, A^*]$ であることを使った. よって (8.16) は示された. 最後に,

$$e^{-2u} \mathrm{tr}(A_z [A, A^*]) = 2G_z w \quad (8.17)$$

を示す.

$$\begin{aligned}[A, A^*] &= \begin{pmatrix} |G|^2 - 1 & 2G \\ 2\bar{G} & 1 - |G|^2 \end{pmatrix} (1 + |G|^2) |w|^2 \\ &= \begin{pmatrix} |G|^2 - 1 & 2G \\ 2\bar{G} & 1 - |G|^2 \end{pmatrix} \frac{e^{2u}}{(1 + |G|^2)}\end{aligned}$$

が成立するので,

$$\begin{aligned} & e^{-2u} \operatorname{tr}(A_z[A, A^*]) \\ &= \frac{((-G_z w - G w_z)(|G|^2 - 1) + (2GG_z w + G^2 w_z)2\bar{G} - 2w_z G + (G_z w + G w_z)(1 - |G|^2))}{(1 + |G|^2)} \\ &= 2G_z w \end{aligned}$$

を得る. よって (8.17) は示された. したがって (8.15) は成立する. \square

補足 8.6. ([2], Remark 2.2.) (8.10) より, ω は滑らかである. また f ははめこみであるから, (8.14) より, ω は接束 TM 内の各点で 0 でない. よって (8.10) より, G は各点で正則ではない. (8.15) より,

$$\begin{aligned} G_z(x) = 0 \quad (x \in M) &\Leftrightarrow \Phi(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow 0 = h(x) = \frac{1}{2}(h_{11} - h_{22}) + ih_{12} \\ &\Leftrightarrow h_{11} = h_{22}, h_{12} = 0 \\ &\Leftrightarrow x \text{ は } f \text{ の臍点} \end{aligned}$$

が成立する.

8.6 G と H が満たす 2 階偏微分方程式

定理 8.7. ([2], Theorem 2.3.) f の normal Gauss 写像 $G(= P_1 \circ G) : M \rightarrow \mathbb{S}^2 \cong \hat{\mathbb{C}}$ は次の 2 階偏微分方程式

$$\frac{(1 - |G|^2) + H(1 + |G|^2)}{1 + |G|^2} G_{z\bar{z}} + \frac{2\{|G|^2 - H(1 + |G|^2)\}\bar{G}}{(1 + |G|^2)^2} G_z G_{\bar{z}} = H_z G_{\bar{z}} \quad (8.18)$$

を満たす.

Proof. $\omega = wdz$ とする. (8.13) より,

$$\begin{aligned} -d\omega + \bar{G}|G|^2 \bar{\omega} \wedge \omega &= H\bar{G}(1 + |G|^2) \bar{\omega} \wedge \omega \\ \Leftrightarrow d\omega &= \bar{G}\{|G|^2 - H(1 + |G|^2)\} \bar{\omega} \wedge \omega \\ \Leftrightarrow w_z d\bar{z} \wedge dz &= \bar{G}\{|G|^2 - H(1 + |G|^2)\} |w|^2 d\bar{z} \wedge dz \\ \Leftrightarrow (\bar{w})_z &= \frac{4\{|G|^2 - H(1 + |G|^2)\}G}{\{(1 - |G|^2) + H(1 + |G|^2)\}^2(1 + |G|^2)^2} G_{\bar{z}}(\bar{G})_z \end{aligned}$$

が分かる. また (8.10) より, $(\bar{w})_z$ を計算すると,

$$\begin{aligned} (\bar{w})_z &= \frac{2G_{z\bar{z}}}{\{(1 - |G|^2) + H(1 + |G|^2)\}(1 + |G|^2)} + \frac{4\{|G|^2 - H(1 + |G|^2)\}\bar{G}}{\{(1 - |G|^2) + H(1 + |G|^2)\}^2(1 + |G|^2)^2} G_{\bar{z}} G_z \\ &\quad + \frac{4\{|G|^2 - H(1 + |G|^2)\}G}{\{(1 - |G|^2) + H(1 + |G|^2)\}^2(1 + |G|^2)^2} G_{\bar{z}}(\bar{G})_z - \frac{2H_z G_{\bar{z}}}{\{(1 - |G|^2) + H(1 + |G|^2)\}^2} \end{aligned}$$

を得る. よって

$$\frac{(1 - |G|^2) + H(1 + |G|^2)}{1 + |G|^2} G_{z\bar{z}} + \frac{2\{|G|^2 - H(1 + |G|^2)\}\bar{G}}{(1 + |G|^2)^2} G_z G_{\bar{z}} = H_z G_{\bar{z}}$$

を得る. これで示された. \square

補足 8.8. ([2], Remark 2.4.) P_1 の代わりに P_2 を用いると, $\omega = \omega_2$ と $G (= P_2 \circ G) : M \rightarrow \mathbb{S} \cong \hat{\mathbb{C}}$ は (8.10), (8.18) の H を $-H$ と取り替えたものを満たす. (8.18) は H が一定の時, normal Gauss 写像の調和性を示している, **hyperbolic GH 方程式** という.

定理 8.9. ([2], Theorem 2.5.) $f : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ を CMC H 曲面の共形はめ込みとする. $\hat{\mathbb{C}}$ 上の計量を

$$h_H = \frac{4|d\zeta|^2}{\{|(1 - |\zeta|^2) + H(1 + |\zeta|^2)\}(1 + |\zeta|^2)|}$$

とすると f の normal Gauss 写像 $G (= P_1 \circ G) : M \rightarrow \mathbb{S}^2 \cong \hat{\mathbb{C}}$ は非正則な調和写像である. $|H| > 1$ のとき, h_H は特異点を持たない. $H = 1$ のとき, 特異点は $\zeta = \infty \in \hat{\mathbb{C}}$ である. $H = -1$ のとき, 特異点は $\zeta = 0 \in \hat{\mathbb{C}}$ である. $|H| < 1$ のとき, $|\zeta| = \sqrt{\frac{1+H}{1-H}}$ が特異点集合である.

Proof. 補題 8.6 より G は非正則である. (8.18) より, H が一定の時, G は

$$G_{z\bar{z}} + \frac{2\{|G|^2 - H(1 + |G|^2)\}\bar{G}}{\{(1 - |G|^2) + H(1 + |G|^2)\}(1 + |G|^2)} G_z G_{\bar{z}} = 0$$

を満たす. ここで, $h_H = \rho^2(\zeta)|d\zeta|^2$ とすると,

$$\frac{\rho_\zeta}{\rho} = \frac{\{|\zeta|^2 - H(1 + |\zeta|^2)\}\bar{\zeta}}{\{(1 - |\zeta|^2) + H(1 + |\zeta|^2)\}(1 + |\zeta|^2)}$$

と計算できる. よって G は

$$G_{z\bar{z}} + \frac{2\rho_G}{\rho} G_z G_{\bar{z}} = 0$$

を満たす. これは $G : M \rightarrow (\hat{\mathbb{C}}, h_H)$ が調和写像であることを示している. $H \neq 1$ のとき,

$$(1 - |\zeta|^2) + H(1 + |\zeta|^2) = 0 \Leftrightarrow |\zeta|^2 = \frac{1 + H}{1 - H}$$

が成立.

$$\begin{aligned} |H| > 1 \text{ のとき} & \quad \frac{1 + H}{1 - H} < 0 \\ H = -1 \text{ のとき} & \quad \frac{1 + H}{1 - H} = 0 \\ |H| < 1 \text{ のとき} & \quad \frac{1 + H}{1 - H} > 0 \end{aligned}$$

よって $|H| > 1$ のとき, 特異点を持たず, $H = -1$ のとき, 特異点は $\zeta = 0 \in \hat{\mathbb{C}}$ であり, $|H| < 1$ のとき, $|\zeta| = \sqrt{\frac{1+H}{1-H}}$ が特異点集合である. $H = 1$ のとき, $h_1 = \frac{2|d\zeta|^2}{1+|\zeta|^2}$ より, 特異点は $\zeta = \infty \in \hat{\mathbb{C}}$ である. \square

補足 8.10. ([2], Remark 2.6.) 定理 8.9 で定めた計量で特に $H = 0$ の場合, つまり,

$$h_0 = \frac{4|d\zeta|^2}{|(1 - |\zeta|^2)(1 + |\zeta|^2)|}$$

を **Kokubu's metric** という. $0 < H < 1$ のとき, (\mathbb{S}^2, h_H) の向き付けを保存する等長変換群は $U(1)/\{\pm\sigma_0\}$ で与えられる. 一方で, $H = 0$ のとき, (\mathbb{S}^2, h_0) の向き付けを保存する等長変換群は $(U(1) \cdot \sigma_1)/\{\pm\sigma_0\}$ で与えられる. よって h_H ($|H| < 1$) の中で, 等長変換群が最も大きいのは Kokubu's metric であると分かる.

8.7 Kenmotsu 型表現公式

ここまでの議論の逆が成り立ち, これを **Kenmotsu 型表現公式** という.

定理 8.11. (Kenmotsu 型表現公式)([2], Theorem 2.7.) M を単連結なリーマン面で $z_0 \in M$ を基準点とする. 与えられた M 上の滑らかな実数値関数 H に対して, 非正則な滑らかな写像 $\nu: M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ を

$$\frac{(1 - |\nu|^2) + H(1 + |\nu|^2)}{1 + |\nu|^2} \nu_{z\bar{z}} + \frac{2\{|\nu|^2 - H(1 + |\nu|^2)\}\bar{\nu}}{(1 + |\nu|^2)^2} \nu_z \nu_{\bar{z}} = H_z \nu_{\bar{z}} \quad (8.19)$$

を満たすようにとる. M 上の滑らかな 1 次形式 ω を

$$\omega = \frac{2(\bar{\nu})_z}{\{(1 - |\nu|^2) + H(1 + |\nu|^2)\}(1 + |\nu|^2)} dz$$

と定め, M 上の $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 値の 1 次形式 α と M 上の \mathfrak{s} 値の 1 次形式 μ をそれぞれ

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\nu & \nu^2 \\ -1 & \nu \end{pmatrix} \omega, \quad \mu = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*) + \frac{1}{4}[\sigma_3, \alpha + \alpha^*]$$

とするとき, $\mathcal{S}(z_0) = \sigma_0$ かつ $\mathcal{S}^{-1}d\mathcal{S} = \mu$ を満たす滑らかな写像 $\mathcal{S}: M \rightarrow \mathbf{S}$ が一意に存在する. ここで $f = \mathcal{S}\mathcal{S}^*$ とおくと, $\{w \in M \mid \omega(w) = 0\}$ を除いた範囲で, $f: M \rightarrow \mathbb{H}^3$ は共形はめ込みであり, その平均曲率は H , normal Gauss 写像は $G = P_1^{-1} \circ \nu$ で与えられる. さらに f により M に誘導される計量は $\mathbf{I} = (1 + |\nu|^2)^2 \omega \cdot \bar{\omega}$ でホップ微分は $\Phi = 2\nu_z \omega \cdot dz$ である.

Proof. M 上の \mathfrak{s} 値の 1 次形式 μ に対して,

$$d\mu + \mu \wedge \mu = 0 \Leftrightarrow \mathcal{S}^{-1}d\mathcal{S} = \mu \text{ を満たす } \mathcal{S}: M \rightarrow \mathbf{S} \text{ が存在する}$$

が成立する (可積分条件) から, $d\mu + \mu \wedge \mu = 0$ を確かめればよい.

$$\alpha + \alpha^* = \begin{pmatrix} -\nu\omega - \bar{\nu}\bar{\omega} & \nu^2\omega - \bar{\omega} \\ -\omega + \bar{\nu}^2\bar{\omega} & \nu\omega + \bar{\nu}\bar{\omega} \end{pmatrix},$$

$$[\sigma_3, \alpha + \alpha^*] = 2 \begin{pmatrix} 0 & \nu^2\omega - \bar{\omega} \\ \omega - \bar{\nu}^2\bar{\omega} & 0 \end{pmatrix}$$

から,

$$\mu = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\nu\omega - \bar{\nu}\bar{\omega} & 2(\nu^2\omega - \bar{\omega}) \\ 0 & \nu\omega + \bar{\nu}\bar{\omega} \end{pmatrix}$$

が成立する. このとき

$$\mu \wedge \mu = \begin{pmatrix} 0 & \nu(|\nu|^2 + 1)\omega \wedge \bar{\omega} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と計算できるから,

$$d\mu + \mu \wedge \mu = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d(\nu\omega + \bar{\nu}\bar{\omega}) = 0 \\ d(\nu^2\omega - \bar{\omega}) + \nu(|\nu|^2 + 1)\omega \wedge \bar{\omega} = 0 \end{cases} \quad (8.20)$$

を得る. 従って右辺のこの2式を示せばよい. (8.19) と (8.11), (8.12), (8.13) より,

$$-d(\nu\omega) + \frac{1}{2}(1 + |\nu|^4)\bar{\omega} \wedge \omega = -\frac{1}{2}H(1 - |\nu|^4)\bar{\omega} \wedge \omega \quad (8.21)$$

$$d(\nu^2\omega) - \nu\bar{\omega} \wedge \omega = H\nu(1 + |\nu|^2)\bar{\omega} \wedge \omega \quad (8.22)$$

$$-d\omega + \bar{\nu}|\nu|^2\bar{\omega} \wedge \omega = H\bar{\nu}(1 + |\nu|^2)\bar{\omega} \wedge \omega \quad (8.23)$$

を満たすことが分かる. (8.21) より, (8.20) の上の式が示される. (8.22), (8.23) より, (8.20) の下の式が示される. よって $d\mu + \mu \wedge \mu = 0$ が成立し, $\mathcal{S}(z_0) = \sigma_0$ を満たす $\mathcal{S}^{-1}d\mathcal{S} = \mu$ となる \mathcal{S} が一意的に存在することが分かる. 次に $f = \mathcal{S}\mathcal{S}^* : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ が共形はめ込みであることを示す.

$$df = d(\mathcal{S}\mathcal{S}^*) = \mathcal{S}(\mu + \mu^*)\mathcal{S}^* = \mathcal{S}(2\mu_{\mathfrak{m}})\mathcal{S}^* = \mathcal{S}(\alpha + \alpha^*)\mathcal{S}^*$$

より,

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \langle df, df \rangle \\ &= -\det(df) \\ &= -\det(\alpha + \alpha^*) \\ &= (1 + |\nu|^2)^2 \omega \cdot \bar{\omega} \end{aligned}$$

が成立する. ω は $(1, 0)$ 型微分形式だったから, f は共形である. 特に f ははめ込みである. 命題 8.5 より, ホップ微分も $\Phi = 2\nu_z\omega \cdot dz$ と表される. \square

8.8 $\mathbb{H}^3(-c^2)$ の場合

断面曲率 $-c^2$ ($c > 0$) の 3次元双曲空間 $\mathbb{H}^3(-c^2)$ を

$$\mathbb{H}^3(-c^2) = \{(x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{L}^4 \mid -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -\frac{1}{c^2}, x^0 > 0\}$$

と定義するとこれまでははめ込み $f : M \rightarrow \mathbb{H}^3 = \mathbb{H}^3(-1)$ を考え, 命題や定理を示した. ここでははめ込み $f : M \rightarrow \mathbb{H}^3(-c^2)$ の場合を考える. $f : M \rightarrow \mathbb{H}^3(-c^2)$ の adapted フレームは次のように定義される.

定義 8.12. ([2], p880) M をリーマン面, $f : M \rightarrow \mathbb{H}^3(-c^2)$ を共形はめ込み, (U, z) を可縮な局所座標とする. $E : U \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ が f の **adapted フレーム** であるとは, E が

$$f|_U = \frac{1}{c} \pi \circ E = \frac{1}{c} EE^*$$

を満たす滑らかな写像で, $E \cdot \sigma_3$ は f の単位法ベクトル場, $E \cdot (\sigma_1 - i\sigma_2)$ の双対形式 $\omega^1 + i\omega^2$ がある滑らかな関数 $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて

$$\omega^1 + i\omega^2 = e^u dz$$

とかけるときをいう.

以下 \mathbb{H}^3 のときと同様の議論で次の定理や命題が成り立つ. 証明は \mathbb{H}^3 のときと同様であるから省略する.

命題 8.13. ([2], p882) U 上の adapted フレーム E による $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 上のモーレーカルタン形式の引き戻し $\varepsilon := E^{-1}dE$ は

$$E^{-1}dE = \varepsilon = \varepsilon_{\mathfrak{h}} + \varepsilon_{\mathfrak{m}},$$

$$\varepsilon_{\mathfrak{h}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\rho & H\phi + \bar{h}\bar{\phi} \\ -H\bar{\phi} - h\phi & -i\rho \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{\mathfrak{m}} = \frac{c}{2} \begin{pmatrix} 0 & \phi \\ \bar{\phi} & 0 \end{pmatrix}$$

と表される.

命題 8.14. ([2], p883)

$$\mathcal{S}^{-1}d\mathcal{S} = \tau_{\mathfrak{m}} + \tau_{\mathfrak{h}} = \frac{c}{2}(\alpha + \alpha^*) + \frac{c}{4}[\sigma_3, \alpha + \alpha^*]$$

と表すことができる. ここで $[\cdot, \cdot]$ はリー括弧を表す.

補題 8.15. ([2], p883) ω は G と H を用いて

$$\omega(= \omega_1) = \frac{2(\bar{G})_z}{\{c(1 - |G|^2) + H(1 + |G|^2)\}(1 + |G|^2)} dz$$

と表せる.

定理 8.16. ([2], Theorem 2.3.) $f : M \rightarrow \mathbb{H}^3(-c^2)$ の normal Gauss 写像 $G(= P_1 \circ G) : M \rightarrow \mathbb{S}^2 \cong \hat{\mathbb{C}}$ は次の 2 階偏微分方程式

$$\frac{c(1 - |G|^2) + H(1 + |G|^2)}{1 + |G|^2} G_{z\bar{z}} + \frac{2\{c|G|^2 - H(1 + |G|^2)\}\bar{G}}{(1 + |G|^2)^2} G_z G_{\bar{z}} = H_z G_{\bar{z}} \quad (8.24)$$

を満たす.

定理 8.17. (Kenmotsu 型表現公式)([2], Theorem 2.7.) M を単連結なリーマン面で $z_0 \in M$ を基準点とする. 与えられた M 上の滑らかな実数値関数 H に対して, 非正則な滑らかな写像 $\nu: M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ を

$$\frac{c(1 - |\nu|^2) + H(1 + |\nu|^2)}{1 + |\nu|^2} \nu_{z\bar{z}} + \frac{2\{c|\nu|^2 - H(1 + |\nu|^2)\}\bar{\nu}}{(1 + |\nu|^2)^2} \nu_z \nu_{\bar{z}} = H_z \nu_{\bar{z}}$$

を満たすようにとる. M 上の滑らかな 1 次形式 ω を

$$\omega = \frac{2(\bar{\nu})_z}{\{c(1 - |\nu|^2) + H(1 + |\nu|^2)\}(1 + |\nu|^2)} dz$$

と定め, M 上の $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 値の 1 次形式 α と M 上の \mathfrak{s} 値の 1 次形式 μ を

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\nu & \nu^2 \\ -1 & \nu \end{pmatrix} \omega, \quad \mu = \frac{c}{2}(\alpha + \alpha^*) + \frac{c}{4}[\sigma_3, \alpha + \alpha^*]$$

とするとき, $\mathcal{S}(z_0) = \sigma_0$ かつ $\mathcal{S}^{-1}d\mathcal{S} = \mu$ を満たす滑らかな写像 $\mathcal{S}: M \rightarrow \mathbf{S}$ が一意的に存在する. ここで $f = \frac{1}{c}\mathcal{S}\mathcal{S}^*$ とおくと, $\{w \in M \mid \omega(w) = 0\}$ を除いた範囲で, $f: M \rightarrow \mathbb{H}^3(-c^2)$ は共形はめ込みであり, その平均曲率は H , normal Gauss 写像は $G = P_1^{-1} \circ \nu$ で与えられる. さらに f により M に誘導される計量は $\mathbf{I} = (1 + |\nu|^2)^2 \omega \cdot \bar{\omega}$ でホップ微分は $\Phi = 2\nu_z \omega \cdot dz$ である.

9 Adjusted Gauss 写像を用いた \mathbb{H}^3 内の CMC H 曲面の表現公式

9.1 導入

ここでは CMC 曲面を考える. Bryant 表現公式は正則なデータ (a, b) または Weierstrass データ (g, ω) を用いて \mathbb{H}^3 内の CMC 1 曲面を表現できた. 以下では $(\mathbb{S}^2, g_0 = \frac{4|d\zeta|^2}{(1+|\zeta|^2)^2})$ への調和写像を用いて, \mathbb{H}^3 内の CMC H 曲面 ($|H| > 1$) を表す Kenmotsu-Bryant 型表現公式を示す. 同様の議論で $(\mathbb{S}^2 \cong \hat{\mathbb{C}}, h_0)$ への調和写像を用いて, \mathbb{H}^3 内の CMC H 曲面 ($|H| < 1$) を表す Kokubu-Bryant 表現公式を示す. まず, \mathbb{H}^3 内の CMC H 曲面 ($|H| > 1$) について考えていく.

9.2 Adapted フレームの集合族

\mathbb{H}^3 内の等長な CMC H ($|H| > 1$) はめ込みと \mathbb{E}^3 内の等長な CMC $H_0 = \sqrt{H^2 - 1}$ はめ込みの間の全単射対応を **Lawson 対応** という. この対応は局所的または単連結な曲面に対して用いることができる.

M を可縮リーマン面, $f : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ を共形はめ込みとする. 複素座標 z をとり, $E : M \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ を f の adapted フレームとする. ϕ を $\phi := \omega^1 + i\omega^2 = e^u dz$ とする. M 上の計量は $\mathbf{I} = \phi \cdot \bar{\phi}$ である. ρ を $\rho = \omega_1^2$ とする. f は CMC H の等長なはめ込みでホップ微分は $\Phi = h\phi \cdot \phi$ であるとする. ここで次の命題を示す. この命題は Lawson 対応の説明となっている.

命題 9.1. ([2], p885) (7.6), (7.7) より, $\varepsilon = E^{-1}dE$ を次の ε_t ($0 \leq t \leq 1$), $\varepsilon_1 = \varepsilon$ のように拡張する:

$$\varepsilon_t := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\rho & (t + H_t)\phi + \bar{h}\bar{\phi} \\ (t - H_t)\bar{\phi} - h\phi & -i\rho \end{pmatrix}. \quad (9.1)$$

ここで $H_t = \sqrt{H_0^2 + t^2}$ としている. このとき, ε_t は $0 \leq t \leq 1$ で可積分条件を満たす. すなわち,

$$E_t^{-1}dE_t = \varepsilon_t$$

の解である滑らかな 1 パラメータ集合族 $\{E_t : M \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \mid t \geq 0\}$ を得る. この解 E_t は $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 内の元による左変換の違いを除いて一意的である.

Proof. $H_1 = \sqrt{H_0^2 + 1} = H$ であるから, (7.6), (7.7) より, ε_t は $t = 1$ で可積分条件を満たす.

$d\varepsilon_t + \varepsilon_t \wedge \varepsilon_t = 0$ を示す. (8.6) と同様の計算で

$$d\varepsilon_t + \varepsilon_t \wedge \varepsilon_t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4e^{-2u}u_{z\bar{z}} = -t^2 + H_t^2 - |h|^2 \\ h_{\bar{z}} + 2hu_{\bar{z}} = (H_t)_z \end{cases}$$

を得る. H が定数であるから, H_t も定数である. また $-t^2 + H_t^2 = H_0^2 = -1 + H^2$ が成立する (これが成立するように H_t を定めた).

$$\begin{aligned} d\varepsilon_t + \varepsilon_t \wedge \varepsilon_t = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} -4e^{-2u}u_{z\bar{z}} = -1 + H^2 - |h|^2 \\ h_{\bar{z}} + 2hu_{\bar{z}} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow d\varepsilon + \varepsilon \wedge \varepsilon = 0 \end{aligned}$$

が成立する. よって ε_t は $0 \leq t \leq 1$ で可積分条件を満たす. \square

$t > 0$ のとき, $f_t := \frac{1}{t}E_tE_t^*$ とし, $f_1 = f$ とかく. $f_t : M \rightarrow \mathbb{H}^3(-t^2)$ はホップ微分が Φ である CMC H_t の等長はめ込みである. E_t は f_t の adapted フレームである. $t = 0$ のとき, ε_0 は $\mathfrak{su}(2)$ 値であるから, 解は $E_0 : M \rightarrow \text{SU}(2)$ となり, E_0 は調和写像 $G_0 = E_0\sigma_3E_0^* : M \rightarrow (\mathbb{S}^2, g_0)$ を与え, ホップ微分が Φ で, Gauss 写像 G_0 である CMC H_0 の等長はめ込み $f_0 : M \rightarrow \mathbb{E}^3$ が存在する. この $\{f_t \mid t \geq 0\}$ を $f = f_1 : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ に関する canonical な 1 パラメータ集合族という. また $\{E_t \mid t \geq 0\}$ を $f = f_1$ に関する adapted フレームの canonical な 1 パラメータ集合族という.

9.3 Kenmotsu-Bryant 型表現公式

$E_t : M \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ ($t \geq 0$) を Iwasawa 分解により, $E_t = \mathcal{S}_t\mathcal{H}_t$ と分解する. すなわち $\mathcal{S}_t : M \rightarrow \mathbf{S}$, $\mathcal{H}_t : M \rightarrow \text{SU}(2)$ である. $t > 0$ のとき, $G_t := \mathcal{H}_t\sigma_3\mathcal{H}_t^*$ は f_t の normal Gauss 写像である. Kenmotsu 型表現公式は G_1 や H_1 によって決まり, ρ や Φ によらなかった. ここで $\mathcal{S}^{-1}d\mathcal{S} = \mathcal{H}_t(E_1^{-1}dE_1 - \mathcal{H}_1^{-1}d\mathcal{H}_1)\mathcal{H}_1^*$ なので, $E_1^{-1}dE_1$ の ρ や Φ は $\mathcal{H}_1^{-1}d\mathcal{H}_1$ に現れる. ρ や Φ は t によらず, (9.1) への現れ方もまた t によらない.

命題 9.2. ([2], p886) $F_t := E_1\mathcal{H}_t^{-1}$ は $f = f_1$ のフレームであり, これは $G_t : M \rightarrow \mathbb{S}^2 \cong \hat{\mathbb{C}}$ のみによって与えられる次の微分方程式を満たす:

$$F_t^{-1}dF_t = \frac{1}{2}(1 + H_1 - H_t)\alpha_t + \frac{1}{2}(1 - H_1 + H_t)\alpha_t^* + \frac{t}{4}[\sigma_3, \alpha_t + \alpha_t^*]. \quad (9.2)$$

ここで, α_t と ω_t は

$$\alpha_t = \mathcal{H}_tE_{12}\mathcal{H}_t^*\phi = \begin{pmatrix} -G_t & G_t^2 \\ -1 & G_t \end{pmatrix}\omega_t, \quad \omega_t = \frac{2(\overline{G_t})_z}{\{t(1 - |G_t|^2) + H_t(1 + |G_t|^2)\}(1 + |G_t|^2)}dz$$

とする.

Proof. F_t の定義と, $\mathcal{H}_t = \mathcal{S}_t^{-1}E_t$ より,

$$\begin{aligned} F_t^{-1}dF_t &= \mathcal{H}_tE_1^{-1}dE_1\mathcal{H}_t^* + \mathcal{H}_td(\mathcal{H}_t^{-1}) \\ &= \mathcal{H}_tE_1^{-1}dE_1\mathcal{H}_t^* + \mathcal{S}_t^{-1}E_t d(E_t^{-1})\mathcal{S}_t + \mathcal{S}_t^{-1}d(\mathcal{S}_t) \\ &= \mathcal{H}_tE_1^{-1}dE_1\mathcal{H}_t^* - \mathcal{S}_t^{-1}d(E_t)E_t^{-1}\mathcal{S}_t + \mathcal{S}_t^{-1}d(\mathcal{S}_t) \\ &= \mathcal{H}_t(E_1^{-1}dE_1 - E_t^{-1}dE_t)\mathcal{H}_t^* + \mathcal{S}_t^{-1}d\mathcal{S}_t. \end{aligned}$$

が成り立つ. また, (9.1) より,

$$E_1^{-1}dE_1 - E_t^{-1}dE_t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \{(1+H_1) - (t+H_t)\}\phi \\ \{(1-H_1) - (t-H_t)\}\bar{\phi} & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つので,

$$\mathcal{H}_t(E_1^{-1}dE_1 - E_t^{-1}dE_t)\mathcal{H}_t^* = \frac{1}{2}\{(1+H_1) - (t+H_t)\}\alpha_t + \frac{1}{2}\{(1-H_1) - (t-H_t)\}\alpha_t^*$$

が分かる. 命題 8.14 より,

$$\mathcal{S}_t^{-1}d\mathcal{S}_t = \frac{t}{2}(\alpha_t + \alpha_t^*) + \frac{t}{4}[\sigma_3, \alpha_t + \alpha_t^*]$$

と分かるので,

$$\begin{aligned} F_t^{-1}dF_t &= \mathcal{H}_t(E_1^{-1}dE_1 - E_t^{-1}dE_t)\mathcal{H}_t^* + \mathcal{S}_t^{-1}d\mathcal{S}_t \\ &= \frac{1}{2}(1+H_1-H_t)\alpha_t + \frac{1}{2}(1-H_1+H_t)\alpha_t^* + \frac{t}{4}[\sigma_3, \alpha_t + \alpha_t^*] \end{aligned}$$

が示された. \square

このようにして f_1 の normal Gauss 写像 G_1 の代わりに G_t を用いることができ, f_1 の \mathcal{S}_1 を (9.2) を満たす F_t に取り替えることができる. 特に G_1 を G_0 に取り替えると, 調和写像 $G_0 : M \rightarrow (\mathbb{S}^2, g_0)$ によって決まる可積分方程式を満たす $f = f_1$ のフレーム $F := F_0 = E_1\mathcal{H}_0^{-1}$ を得る. G_0 を f の **adjusted Gauss 写像** という. \mathbb{H}^3 内の単連結でない曲面 M に対しては adjusted Gauss 写像は普遍被覆 \tilde{M} 上でのみ定義される. (9.2) に $t = 0$ を代入した可積分方程式は $H_0 \neq 0$ のとき, Kenmotsu-Bryant 型表現公式を与え, $H_0 = 0$ のとき, Bryant 表現公式を与える. ここで **Kenmotsu-Bryant 型表現公式**の主張を述べる.

定理 9.3. (Kenmotsu-Bryant 型表現公式)([1], Theorem 3.2) M を単連結なリーマン面で $z_0 \in M$ を基準点とする. $H > 1$ を定数とし, $H_0 = \sqrt{H^2 - 1}$ とおく. 写像 $\nu : M \rightarrow (\mathbb{S}^2 \cong \hat{\mathbb{C}}, g_0 = \frac{4|d\zeta|^2}{(1+|\zeta|^2)^2})$ を非正則な調和写像とする. つまり, ν は非正則で

$$\nu_{z\bar{z}} - \frac{2\bar{\nu}}{1+|\nu|^2}\nu_z\nu_{\bar{z}} = 0$$

を満たすとする. M 上の滑らかな 1 次形式 ω を

$$\omega = \frac{2(\bar{\nu})_z}{H_0(1+|\nu|^2)^2}dz$$

と定め, M 上の $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 値の 1 次形式 α と M 上の $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 値の 1 次形式 μ を

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\nu & \nu^2 \\ -1 & \nu \end{pmatrix} \omega, \quad \mu = \frac{1}{2}\{(1+H-H_0)\alpha + (1-H+H_0)\alpha^*\}$$

とするとき, $F(z_0) = \sigma_0$ かつ $F^{-1}dF = \mu$ を満たす滑らかな写像 $F : M \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ が一意的に存在する. ここで $f = FF^*$ とおくと, $\{w \in M \mid \omega(w) = 0\}$ を除いた範囲で, $f : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ は CMC H 曲面の共形はめ込みであり, adjusted Gauss 写像は ν で与えられる. さらに f により M 上に誘導される計量 \mathbf{I} とホップ微分 Φ と f の Gauss 曲率 K は

$$\mathbf{I} = (1 + |\nu|^2)^2 \omega \cdot \bar{\omega}, \quad \Phi = \frac{4\nu_z(\bar{\nu})_z}{H_0(1 + |\nu|^2)^2} dzdz, \quad K = H_0^2 \left(1 - \frac{|\nu_z|^2}{|\nu|^2} \right)$$

である.

逆に CMC H ($H > 1$) 曲面の共形はめ込み $f : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ は上のように非正則な調和写像 $g : M \rightarrow (\hat{\mathbb{C}}, g_0)$ によって構成された CMC H 曲面の共形はめ込みと回転や平行移動の違いを除いて一致する.

Proof. 証明は定理 8.11 と同様なので省略. □

実際に (9.2) に $t = 0$ を代入した可積分方程式が Kenmotsu-Bryant 型表現公式や Bryant 表現公式を与えることを確かめる. (9.2) に $t = 0$ を代入すると,

$$F^{-1}dF = \frac{1}{2}(1 + H_1 - H_0)\alpha_0 + \frac{1}{2}(1 - H_1 + H_0)\alpha_0^*$$

となる. よって $H_0 \neq 0$ のとき, Kenmotsu-Bryant 型表現公式を与える.

特に $H_0 = 0$ のとき, $H_1 = \sqrt{H_0^2 + 1} = 1$ より,

$$F^{-1}dF = \alpha_0$$

となる. この F は $\det \alpha_0 = 0$ より, ナルなはめ込みであり, α_0 が $(1, 0)$ 型微分形式であるから, F は正則である. よって $H_0 = 0$ のとき, これは Bryant 表現公式を与える.

9.4 Kokubu-Bryant 型表現公式

これまでに述べた方法は \mathbb{H}^3 内の CMC H ($H > 1$) 曲面に対するものだった. この方法を \mathbb{H}^3 内の CMC H ($H < 1$) 曲面に対応させ表現公式を得ることができる.

$0 < H < 1$ として, $c_0 = \sqrt{1 - H^2}$ とおく. ホップ微分 Φ の CMC $H_t = \sqrt{t^2 - c_0^2}$ 曲面の等長はめ込みの canonical 1 パラメータ集合族 $\{f_t : M \rightarrow \mathbb{H}^3(-t^2) \mid t \geq c_0\}$ と f_t の adapted フレームの canonical 1 パラメータ集合族 $\{E_t : M \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \mid t \geq c_0\}$ が存在するという Lawson 型対応より, \mathbb{H}^3 内の CMC H ($0 < H < 1$) の等長はめ込みと $\mathbb{H}^3(-c_0^2)$ 内の極小曲面の等長はめ込みの間に全単射対応が存在する. $t \geq c_0$ に対して, $E_t : M \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ ($t \geq c_0$) を Iwasawa 分解により, $E_t = \mathcal{S}_t \mathcal{H}_t$ と分解する. ここで $\mathcal{S}_t : M \rightarrow \mathbf{S}$, $\mathcal{H}_t : M \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ とする. CMC $H = H_1$ ($0 < H < 1$) 曲面の共形はめ込み $f = f_1 : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ に対して, $F_t := E_t \mathcal{H}_t^{-1}$ ($t \geq c_0$) とする. (9.2) の議論と同様に, F_t は f_t ($t \geq c_0$) の normal Gauss 写像 $G_t = \mathcal{H}_t \sigma_3 \mathcal{H}_t^*$ を用いて, $f = f_1$ の表現を与える. 特に $\mathbb{S}^2 \cong \hat{\mathbb{C}}$ に Kokubu's metric $h_0 = \frac{4|d\zeta|^2}{|1 - |\zeta|^4|}$ を与えたときの調和写像 $G_{c_0} : M \rightarrow \mathbb{S}^2 \cong \hat{\mathbb{C}}$ を選ぶ. 補足 8.10 より, 特異計量

$$\left\{ h_{t, H_t} := \frac{4|d\zeta|^2}{|t(1 - |\zeta|^2) + H_t(1 + |\zeta|^2)|(1 + |\zeta|^2)|} \mid t \geq c_0 \right\}$$

の中で最も大きい等長変換群を持つ計量は Kokubu's metric だったため, h_0 を与えた. $G_{c_0} = \mathcal{H}_{c_0} \sigma_3 \mathcal{H}_{c_0}^* : M \rightarrow (\mathbb{S}^2 \cong \hat{\mathbb{C}}, h_0)$ を f の adjusted Gauss 写像と呼ぶ. G_{c_0} を用いて, **Kokubu-Bryant 型表現公式**が得られる.

定理 9.4. (Kokubu-Bryant 型表現公式)([2], Theorem 3.1) M を単連結なリーマン面で $z_0 \in M$ を基準点とする. $H < 1$ を定数とし, $c_0 = \sqrt{1 - H^2}$ とおく. 写像 $\nu : M \rightarrow (\mathbb{S}^2 \cong \hat{\mathbb{C}}, h_0)$ を非正則な調和写像とする. つまり, ν は非正則で

$$\nu_{z\bar{z}} + \frac{2|\nu|^2\bar{\nu}}{1 - |\nu|^4}\nu_z\nu_{\bar{z}} = 0$$

を満たすとする. M 上の滑らかな 1 次形式 ω を

$$\omega = \frac{2(\bar{\nu})_z}{c_0(1 - |\nu|^4)}dz$$

と定め, M 上の $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 値の 1 次形式 α と M 上の $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 値の 1 次形式 μ を

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\nu & \nu^2 \\ -1 & \nu \end{pmatrix} \omega, \quad \mu = \frac{1}{2}\{(1 + H)\alpha + (1 - H)\alpha^*\} + \frac{c_0}{4}[\sigma_3, \alpha + \alpha^*]$$

とするとき, $F(z_0) = \sigma_0$ かつ $F^{-1}dF = \mu$ を満たす滑らかな写像 $F : M \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ が一意的に存在する. ここで $f = FF^*$ とおくと, $\{w \in M \mid \omega(w) = 0\}$ を除いた範囲で, $f : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ は CMC H 曲面の共形はめ込みであり, adjusted Gauss 写像は ν で与えられる. さらに f により M に誘導される計量 \mathbf{I} と f の Gauss 曲率 K は

$$\mathbf{I} = (1 + |\nu|^2)^2\omega \cdot \bar{\omega}, \quad K = -c_0^2 \left(1 + \frac{|\nu_z|^2(1 - |\nu|^2)^2}{|\nu_z|^2(1 + |\nu|^2)^2} \right)$$

である.

逆に CMC H ($H < 1$) 曲面の共形はめ込み $f : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ は上のように非正則な調和写像 $\nu : M \rightarrow (\hat{\mathbb{C}}, h_0)$ によって構成された CMC H 曲面の共形はめ込みと回転や平行移動の違いを除いて一致する.

Proof. 証明は定理 8.11 と同様なので省略. □

9.5 具体例

Kenmotsu-Bryant 型表現公式 (定理 9.3) を用いて, \mathbb{H}^3 内の CMC H ($H > 1$) 曲面の具体例を考える. リーマン面 M を複素平面 \mathbb{C} とし, $H > 1$ を任意の定数とする. $H_0 = \sqrt{H^2 - 1}$ とおく. 非正則な調和写像 $\nu : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ として $\nu = \bar{z}$ をとる. α と ω は

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\bar{z} & \bar{z}^2 \\ -1 & \bar{z} \end{pmatrix}, \quad \omega = \frac{2}{H_0(1 + |z|^2)^2}dz$$

と表せる。Kenmotsu-Bryant 型表現公式より、

$$F^{-1}dF = \frac{1}{2}(1 + H - H_0)\alpha + \frac{1}{2}(1 - H + H_0)\alpha^*$$

を満たす $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ を求める。 $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\omega = wdz$ とおくと、

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{1}{2}(1 + H - H_0)w \begin{pmatrix} -a\bar{z} - b & a\bar{z}^2 + b\bar{z} \\ -c\bar{z} - d & c\bar{z}^2 + d\bar{z} \end{pmatrix} \\ F_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(1 - H + H_0)w \begin{pmatrix} -az - bz^2 & -a + bz \\ -cz - dz^2 & -c + dz \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.3)$$

を得る。それぞれ1行目の式について注目すると $b_z = -\bar{z}a_z$ と $a_{\bar{z}} = zb_{\bar{z}}$ が分かる。よってそれぞれ z, \bar{z} を変数とする関数 $P(z), Q(\bar{z}) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を用いて、

$$b = -\bar{z}a + Q(\bar{z}), \quad a = zb + P(z)$$

と書ける。よって

$$a = \frac{P(z) + zQ(\bar{z})}{1 + |z|^2}$$

これにより、 a_z を計算し (9.3) より、比較すると、

$$\frac{1 + H}{H_0}Q(\bar{z}) = \bar{z}P(z) - (1 + |z|^2)P'(z)$$

を得る。右辺を \bar{z} について整理すると、

$$\frac{1 + H}{H_0}Q(\bar{z}) = \bar{z}(P(z) - zP'(z)) - P'(z)$$

を得る。 $Q(\bar{z})$ は \bar{z} で表される関数なので、 $P(z) - zP'(z)$ と $P'(z)$ は定数である。よって c_1, c_2 を定数として

$$P(z) = c_1z + c_2$$

が分かり、

$$Q(\bar{z}) = \frac{H_0}{H + 1}(c_2\bar{z} - c_1)$$

を得る。ここで

$$h_+ = \frac{H + 1}{H_0}, \quad h_- = \frac{H - 1}{H_0}$$

とおき、特殊解

$$(P(z), Q(\bar{z})) = (-h_+z, 1), (1, h_-\bar{z})$$

を考える. a, b の P, Q には $(1, h_- \bar{z})$ を用いて計算し, c, d についても同様の議論ができるため, c, d の P, Q には $(-h_+ z, 1)$ を用いて計算すると,

$$F = \frac{1}{1 + |z|^2} \begin{pmatrix} h_- |z|^2 + 1 & \bar{z}(h_- - 1) \\ -z(h_+ - 1) & h_+ |z|^2 + 1 \end{pmatrix}$$

を得る. $h_+ h_- = 1$ を用いると, F が $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ への写像になっていて, $F(0) = I_2$ を満たすことが分かる (この条件を満たすように特殊解を選んだ). よって F を求めることができた. $f = FF^* : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}^3$ を計算すると,

$$f = \begin{pmatrix} \frac{h_- |z|^2 + 1}{|z|^2 + 1} & -\frac{2\bar{z}}{H_0(|z|^2 + 1)} \\ -\frac{2z}{H_0(|z|^2 + 1)} & \frac{h_+ |z|^2 + 1}{|z|^2 + 1} \end{pmatrix}$$

を得る. (6.5) より, \mathbb{H}^3 と上半空間モデル \mathbb{H}_+^3 を同一視して考えると,

$$\begin{pmatrix} \frac{h_- |z|^2 + 1}{|z|^2 + 1} & -\frac{2\bar{z}}{H_0(|z|^2 + 1)} \\ -\frac{2z}{H_0(|z|^2 + 1)} & \frac{h_+ |z|^2 + 1}{|z|^2 + 1} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^3 \leftrightarrow \left(-\frac{2\bar{z}}{H_0(h_+^2 |z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 + 1}{H_0(h_+^2 |z|^2 + 1)} \right) \in \mathbb{H}_+^3$$

となり, これは中心 $(0, (1 + \frac{1}{h_+^2})/2) = (0, \frac{H}{H+1})$, 半径 $\frac{1}{H+1}$ の球面を表す. よって $\nu = \bar{z}$ のとき, CMC H ($H > 1$) 曲面を上半空間モデルで図示すると, \mathbb{H}_+^3 の境界に接しない (浮いている) 球面であることが分かる. $H \rightarrow 1$ とすると, 第6章の具体例で述べたホロ球面と一致する.

10 3次元ユークリッド空間 \mathbb{E}^3 内の曲面に対する Kenmotsu 表現公式

10.1 f の adapted フレーム

第7章, 第8章では Kenmotsu 表現公式 [6] の Gauss 写像 g の対応物として normal Gauss 写像 G を用いることで, Kenmotsu 型表現公式を得ることができた. ここでは, Kenmotsu 表現公式の証明をこれまでの議論と同じ枠組みで再構成する. $H \equiv 0$ の曲面 (極小曲面) に関しては, Weierstrass の表現公式があるため, ここでは $H \neq 0$ としている.

$\mathbb{E}^3 \cong \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = i \cdot \mathfrak{su}(2)$ の同一視の下で, \mathbb{E}^3 の等長変換群の単位元を含む連結成分は, $\mathbb{E}^3 \rtimes \text{SU}(2)/\{\pm 1\}$ で与えられる. ここで $(\mathbb{E}^3 \rtimes \text{SU}(2)) \cong (i \cdot \mathfrak{su}(2) \rtimes \text{SU}(2))$ は $\mathbb{E}^3 \cong i \cdot \mathfrak{su}(2)$ に

$$(\mathbf{x}_1, h) \cdot \mathbf{x}_2 = h\mathbf{x}_2h^* + \mathbf{x}_1, \quad (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{E}^3 \cong i \cdot \mathfrak{su}(2), h \in \text{SU}(2))$$

のように作用している.

定義 10.1. ([2], p891) M を可縮なリーマン面とし, $f: M \rightarrow \mathbb{E}^3$ を共形はめ込みで Gauss 写像を g とする. 滑らかな写像 $E = (f, \mathcal{H}): M \rightarrow \mathbb{E}^3 \rtimes \text{SU}(2)$ が f の **adapted** フレームであるとは, $\mathcal{H}\sigma_3\mathcal{H}^* = g$ を満たし, ϕ を $\mathcal{H} \cdot E_{12} = \mathcal{H}(\frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2))\mathcal{H}^*$ に双対な M 上の $(1,0)$ 型の微分形式とすると, ある滑らかな関数 $u: M \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて

$$\phi = e^u dz$$

とかけるときをいう.

f に誘導される M 上の計量は $\mathbf{I} = \phi \cdot \bar{\phi}$ とかける. M 上の接続形式を ρ とかく. 平均曲率を H とし, ホップ微分を $\Phi = h\phi \cdot \phi$ とかく.

10.2 モーレーカルタン形式 $E^{-1}dE$

命題 10.2. ([2], p891) $\mathbb{E}^3 \rtimes \text{SU}(2)$ 上のモーレーカルタン形式の adapted フレーム $E = (f, \mathcal{H})$ による引き戻し $E^{-1}dE$ は

$$E^{-1}dE = \begin{pmatrix} 0 & \phi \\ \bar{\phi} & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathcal{H}^{-1}d\mathcal{H}, \quad \mathcal{H}^{-1}d\mathcal{H} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\rho & H\phi + \bar{h}\bar{\phi} \\ -H\bar{\phi} - h\phi & -i\rho \end{pmatrix} \quad (10.1)$$

と表せる.

Proof. $E^{-1}dE$ を計算するために, $E(3)$ を

$$E(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{b} & A \end{pmatrix} \mid \mathbf{b} \in \mathbb{E}^3, A \in \text{SO}(3) \right\}$$

とし, $\mathbb{E}^3 \rtimes \text{SU}(2)$ を

$$E = (f, \mathcal{H}) \in \mathbb{E}^3 \rtimes \text{SU}(2) \leftrightarrow E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & \pm \mathcal{H} \end{pmatrix} \in E(3)$$

のように同一視する. ただし \mathcal{H} を

$$\mathcal{H} \in \text{SU}(2) \leftrightarrow \pm \mathcal{H} \in \text{SO}(3)$$

と同一視している. $E^{-1} \in E(3)$ は

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm \mathcal{H}^{-1} f & \pm \mathcal{H}^{-1} \end{pmatrix}$$

であるから,

$$E^{-1}dE = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm \mathcal{H}^{-1} f & \pm \mathcal{H}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ df & \pm d\mathcal{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \pm \mathcal{H}^{-1} df & \mathcal{H}^{-1} d\mathcal{H} \end{pmatrix}$$

が成立する. よって $\mathcal{H}^{-1} \in \text{SU}(2)$ の $df \in \mathbb{E}^3$ への作用は $\mathcal{H}^{-1} df \mathcal{H}$ であり,

$$E^{-1}dE = \mathcal{H}^* df \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^{-1} d\mathcal{H}$$

が成立する.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^* df \mathcal{H} &= \mathcal{H}^*(\mathbf{e}_1 \omega^1 + \mathbf{e}_2 \omega^2) \mathcal{H} \\ &= \mathcal{H}^*(\mathcal{H} \sigma_1 \mathcal{H}^* \omega^1 + \mathcal{H} \sigma_2 \mathcal{H}^* \omega^2) \mathcal{H} \\ &= \sigma_1 \omega^1 + \sigma_2 \omega^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \phi \\ \bar{\phi} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より, 示された. □

10.3 g と H の満たす方程式

h や ρ によらない f のフレームに関する方程式を得るために, adapted フレーム E の $\text{SU}(2)$ 成分を取り除きたい. $\underline{\mathcal{H}} = (0, \mathcal{H}) : M \rightarrow \mathbb{E}^3 \rtimes \text{SU}(2)$ として, $F = E \underline{\mathcal{H}}^{-1}$ とおく. F は

$$F = (f, \mathcal{H})(0, \mathcal{H}^{-1}) = (f, \sigma_0) : M \rightarrow \mathbb{E}^3 \rtimes \text{SU}(2)$$

と表せる. $\underline{\mathcal{H}}^{-1} d\underline{\mathcal{H}} = 0 \oplus \mathcal{H}^{-1} d\mathcal{H}$ が成り立つので, (10.1) から h や ρ を取り除くことができ,

$$F^{-1}dF = df \oplus 0 = \mathcal{H} \begin{pmatrix} 0 & \phi \\ \bar{\phi} & 0 \end{pmatrix} \mathcal{H}^* \oplus 0$$

とかける. よって

$$\alpha = \mathcal{H} E_{12} \mathcal{H}^* \phi = \begin{pmatrix} -g & g^2 \\ -1 & g \end{pmatrix} \omega, \quad g = P_1 \circ g : M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

とおくと,

$$df = \alpha + \alpha^* \quad (10.2)$$

を得る. f に誘導される計量は $\mathbf{I} = \phi \cdot \bar{\phi} = \text{tr}(\alpha\alpha^*) = (1 + |g|^2)^2 \omega \cdot \bar{\omega}$ である.

10.4 ω の表し方

命題 10.3. ([2], p892) $\omega = wdz, \alpha = Adz$ とおき, f の単位法ベクトル場を N とすると, f の平均曲率 H について

$$H = 2e^{-2u} \langle f_{z\bar{z}}, N \rangle = e^{-4u} \text{tr}(A_{\bar{z}}[A, A^*]) = \frac{2g_{\bar{z}}}{(1 + |g|^2)^2 \bar{w}}$$

が成り立つ. これより, $H \neq 0$ である範囲で

$$\omega = wdz = \frac{2(\bar{g})_z}{H(1 + |g|^2)^2} dz$$

と表される.

Proof. 命題 8.5 のホップ微分 Φ の証明と同様に計算することで,

$$H = 2e^{-2u} \langle f_{z\bar{z}}, N \rangle = e^{-4u} \text{tr}(A_{\bar{z}}[A, A^*]) = 2e^{-2u} g_z w$$

が分かり, $e^{-2u} w = \frac{1}{(1 + |g|^2)^2 \bar{w}}$ より,

$$H = \frac{2g_{\bar{z}}}{(1 + |g|^2)^2 \bar{w}}$$

を得る. これを w について解くことで,

$$\omega = wdz = \frac{2(\bar{g})_z}{H(1 + |g|^2)^2} dz$$

を得る. □

10.5 GH 方程式

(10.2) の可積分方程式より. Gauss 写像に対する次の方程式が分かる :

$$H \left(g_{z\bar{z}} - \frac{2\bar{g}}{1 + |g|^2} g_z g_{\bar{z}} \right) = H_z g_{\bar{z}}. \quad (10.3)$$

この式は **generalized harmonic equation (GH 方程式)** と呼ばれる. 実際に可積分方程式を計算して GH 方程式を求めてみる. 可積分方程式 $d(df) = 0$ より,

$$\begin{aligned} 0 &= d\alpha + d\alpha^* \\ &= \begin{pmatrix} -d(g\omega) - d(\bar{g}\bar{\omega}) & d(g^2\omega) - d\bar{\omega} \\ -d\omega + d(g^2\bar{\omega}) & d(g\omega) + d(\bar{g}\bar{\omega}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -g_{\bar{z}}d\bar{z} \wedge \omega - gd\omega - (\bar{g})_z dz \wedge \bar{\omega} - \bar{g}d\bar{\omega} & 2gg_{\bar{z}}d\bar{z} \wedge \omega + g^2d\omega - d\bar{\omega} \\ -d\omega + 2\bar{g}(\bar{g})_z dz \wedge \bar{\omega} + \bar{g}^2d\bar{\omega} & g_{\bar{z}}d\bar{z} \wedge \omega + gd\omega + (\bar{g})_z dz \wedge \bar{\omega} + \bar{g}d\bar{\omega} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る. よって

$$-g_{\bar{z}}d\bar{z} \wedge \omega - gd\omega - (\bar{g})_z dz \wedge \bar{\omega} - \bar{g}d\bar{\omega} = 0 \quad (10.4)$$

$$2gg_{\bar{z}}d\bar{z} \wedge \omega + g^2d\omega - d\bar{\omega} = 0 \quad (10.5)$$

を得る. (10.4) $\times g$ + (10.5) より,

$$gg_{\bar{z}}d\bar{z} \wedge \omega - g(\bar{g})_z dz \wedge \bar{\omega} - (|g|^2 + 1)d\bar{\omega} = 0 \Leftrightarrow \frac{4gg_{\bar{z}}(\bar{g})_z}{H(1 + |g|^2)^2} = (1 + |g|^2)d\bar{\omega}$$

が成立する. これを計算することで,

$$H \left(g_{z\bar{z}} - \frac{2\bar{g}}{1 + |g|^2} g_z g_{\bar{z}} \right) = H_z g_{\bar{z}}.$$

を得る. よって GH 方程式 (10.3) が分かる.

補足 10.4. 定理 8.16 を思い出すと, (8.24) の式に $c = 0$ を代入して整理すると, GH 方程式と一致する. 図形的に説明をすると, これは断面曲率 $-c^2$ ($c > 0$) の 3次元双曲空間 $\mathbb{H}^3(-c^2)$ を $c = 0$ に近づけると, $\mathbb{H}^3(-c^2)$ がだんだんと平らになって $T_{\sigma_0}\mathbb{H}^3$ と同一視できる. つまり, \mathbb{E}^3 と同一視できることから分かる.

補足 10.5. ([2], p892) H が 0 でない定数のとき, $\omega \neq 0$ であることから, $g : M \rightarrow (\mathbb{S}^2, g_0)$ は非正則なことがわかり, GH 方程式から, g が調和写像であることがわかる. $H \equiv 0$ のとき, $g : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ は調和写像であることが知られているから, $\omega = wdz$ は M 上の正則な 1 次微分形式であると分かる.

10.6 Kenmotsu 表現公式

ここまでの議論の逆が成り立ち, これを **Kenmotsu 表現公式** という.

定理 10.6. (Kenmotsu 表現公式) ([2], p892) M を単連結なリーマン面, 基準点を $z_0 \in M$ とする. 滑らかな関数 $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ を与える. ただし $H \neq 0$ とする. この H に対して, 滑らかな写像 $\nu : M \rightarrow (\hat{\mathbb{C}}, g_0)$ を非正則で, GH 方程式をみたすものとする. つまり,

$$H \left(\nu_{z\bar{z}} - \frac{2\bar{\nu}}{1 + |\nu|^2} \nu_z \nu_{\bar{z}} \right) = H_z \nu_{\bar{z}}$$

をみたすものとする. M 上の滑らかな 1 次微分形式 ω を

$$\omega = \frac{2(\bar{\nu})_z}{H(1+|\nu|^2)^2} dz$$

で定める. M 上の $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 値の 1 次形式 α を

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\nu & \nu^2 \\ -1 & \nu \end{pmatrix} \omega$$

とおく. このとき, $f(z_0) = 0$ かつ $df = \alpha + \alpha^*$ を満たす滑らかな写像 $f: M \rightarrow i \cdot \mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{E}^3$ が一意的存在する. $\{w \in M \mid \omega(w) = 0\}$ を除いた範囲で, $f: M \rightarrow \mathbb{H}^3$ は共形はめ込みであり, その平均曲率は H , Gauss 写像は $g = P_1^{-1} \circ \nu: M \rightarrow \mathbb{S}^2$ で与えられる. さらに f により M に誘導される計量 \mathbf{I} とホップ微分 Φ と f の Gauss 曲率 K は

$$\mathbf{I} = (1 + |\nu|^2)^2 \omega \cdot \bar{\omega}, \quad \Phi = 2\nu_z \omega \cdot dz, \quad K = H^2 \left(1 - \frac{|\nu_z|^2}{|\nu_{\bar{z}}|^2} \right)$$

である.

参考文献

- [1] R. Aiyama and K. Akutagawa, Kenmotsu type representation formula for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{H}^3(-c^2)$ and $\mathbb{S}_1^3(c^2)$, *Ann. Global Anal. Geom.*, 17 (1998), 49-75.
- [2] R. Aiyama and K. Akutagawa, Kenmotsu type representation formula for surfaces with prescribed mean curvature in the hyperbolic 3-space, *Math. Soc. J.*, 52 (2000), 877-898.
- [3] R. L. Bryant, Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space, *Asterisque*, 154-155 (1987), 321-347.
- [4] J. N. Clelland, *From Frenet to Cartan: The Method of Moving Frames*, American Mathematical Society, 2017.
- [5] G. R. Jensen, E. Musso and L. Nicolodi, *Surfaces in Classical Geometries: A Treatment by Moving Frames*, Universitext, Springer, 2016.
- [6] K. Kenmotsu, Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature, *Math. Ann.*, 245 (1979), 89-99.
- [7] 梅原雅顕 (川上裕 記), 3次元双曲型空間の平均曲率1の曲面-極小曲面との関係をテーマとして-, 名古屋大学多元数理講究録9, 2009.