Existence of circle packings filling Riemann surfaces of infinite type

Yoshiki Kaneko
Tokyo Institute of Technology

abstract

If a Riemann surface is packable, i.e., filled by some circle packing, we can determine its conformal structure only by combinatorial data and their radii. G. B. Williams [11] proved that any noncompact Riemann surface of finite type is packable. In this paper, we prove that any Riemann surface of infinite type is packable.

無限型リーマン面を覆う circle packing の存在について

金子 佳希
東京工業大学

目 次

1 Introduction

circle packing とは内部で交わらない円の局所有限な集まりであり, circle packing による曲面の充填は離散的な接グラフのデータから曲面の等角構造を決定できるという特徴をもつ. これによって circle packing から測地線三角形の貼り合わせによるリーマン面の実現が得られ, 各三角形上の擬等角写像を貼り合わせて大域的な擬等角写像を構成する, といったことができる.

リーマン面上の circle packing が与えられたとき, その中心を頂点とし, 接する 2 つの円の中心を辺で結ぶことで, リーマン面のグラフを考えることができる. Koebe, Andreev, Thurston らは, 逆に閉リーマン面の三角形分割が任意に与えられたとき,

あるリーマン面及びある circle packing によって実現される, ということを示している. 証明は [2] などを参照. これ以後タイヒミュラー空間内において circle packing point, すなわちある circle packing によって覆われるリーマン面がどの程度存在するか, という研究が行われていた.

P. L. Bowers と K. Stephenson は [4], [5] において, 有限型リーマン面のタイヒミュラー空間において circle packing point 全体が稠密であることを示している. これは任意のリーマン面を circle packing で覆われるリーマン面で近似する, という方法を取っており, 特に種数 $g(\geq 2)$ の閉リーマン面の場合には circle packing point 全体が可算な真部分集合になっていることを示している.

更に, G. B. Williams は [11] において, 任意の有限型開リーマン面そのものについて, circle packing で覆うことができることを示している. 一般に, 有界な領域を充填するような circle packing は必ずしも存在しない. この議論の核となっているのは, リーマン面を有界な範囲から充填していき, 充填できないような部分を理想境界に押し付けていくことでリーマン面全体を覆う, という手法である.

本論文ではこの議論を拡張することで, 任意の無限型リーマン面がある circle packing によって覆われることを示した. 無限型リーマン面がパンツ分解可能な場合には, あるパンツから始めて隣のパンツ, 隣のパンツ, $\cdots$ と circle packing を広げていくことで, Williams の方法と同じようにリーマン面全体を覆う circle packing が構成できる. しかし一般にはパンツ分解可能ではなく, 分解に "半円板" が残ってしまう場合がある. このとき, パンツから始めて circle packing を構成しても半円板に circle packing が到達しない. そこで, 半円板を覆う circle packing も同時に構成していくことで, リーマン面全体を覆う circle packing を構成する.

本論文の構成について. 2 節では, 双曲三角形や双曲四角形に関する諸定理を用意する. 3 節では, [4] によって示された, 閉リーマン面のタイヒミュラー空間における circle packing point の稠密性の証明を記述している. 4 節では, [11] で示された, 任意の有限型開リーマン面を覆う circle packing の構成を記述し, それを無限型リーマン面にまで拡張する方法を示した.

謝辞

本論文の執筆に当たり, 指導教員として懇切丁寧に指導して頂いた川平友規先生に深く感謝申し上げます.

2　双曲三角形と双曲四角形

$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 上の計量 $ds_{\mathbb{D}}$ を

$$ds_{\mathbb{D}} = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$$

によって定義し, $ds_{\mathbb{D}}$ から定まる $\mathbb{D}$ 上の距離を $\rho_{\mathbb{D}}$ と書く. 同様に, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ 上の計量 $ds_{\mathbb{H}}$ を

$$ds_{\mathbb{H}} = \frac{|dz|}{\mathrm{Im}\, z}$$

によって定義し, $ds_{\mathbb{H}}$ から定まる $\mathbb{H}$ 上の距離を $\rho_{\mathbb{H}}$ と書く. 以下特に断りが無い限り, $\mathbb{D}, \mathbb{H}$ にはそれぞれこれらの距離が入っているとする.

4 つの円 $C_1, C_2, C_3, C_4 = C_1 \subset \mathbb{D}$ について, C_k と C_{k+1} が 1 点で接し, それ以外の円は共通部分をもたないとする. このとき

$$\mathbb{D} \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{3} \overline{C}_k \right)$$

は, $\mathbb{D}$ を 2 つの連結成分に分ける. このうち相対コンパクトな連結成分を, **3-隙間**という. 同様に, 4 つの円で囲まれた相対コンパクト領域を **4-隙間**という.

2.1 節では, 双曲三角形についていくつかの基本的な定理を用意する. なお, 特に断りがなく単に三角形といった場合には双曲三角形を表す.

2.2 節では, 4-隙間に対して連続かつ狭義単調増加に定まる Brooks パラメーターという実数を定義し, これによって 4-隙間が有限個の 3-隙間に分けられるための条件を考察する. 一般に, 任意の 4-隙間は無限個の円を追加することで 3-隙間に分けることができる. しかし, circle packing と三角形分割の対応を考える場合, 無限個の円を追加すると局所有限性が崩れてしまい, 三角形分割との対応が得られない. ここでは Brooks パラメーターに関する議論を行うことで, 4-隙間を十分小さく変形させることで有限個の 3-隙間に分けられるような 4-隙間が得られる, ということを示している.

2.1　双曲三角形に関する諸定理

命題 2.1.1 ([4], Section 2)**.** $a, b, c \in (0, \infty]$ を任意に固定したとき, 各辺の長さが $a+b, b+c, c+a$ であるような三角形が存在する. 更にこの三角形は, 自己等長写像によって移りあうものを除いて一意に定まる. これを $T(a, b, c)$ と書く.

証明. 存在は, 半径 a, b, c であるような円で 3-隙間を構成し, 中心を結ぶことで得られる三角形を考えることで従う (図 1). 一意性は明らかである. □

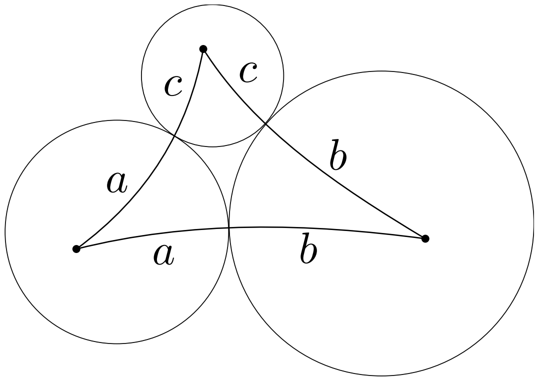

図 1: $T(a,b,c)$ の存在

命題 2.1.2 ([1], Theorem 7.13.1)**.** 三角形 T を任意に固定し, 内角をそれぞれ α, β, γ とする. このとき三角形の面積は $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ で与えられる.

証明. $\mathbb{H}$ において考える. $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ならば, 適当な等長変換によって

$$T = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| > 1, -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$$

であるとしてよいので

$$|T| = \iint_T \frac{dxdy}{(\operatorname{Im} z)^2} = \int_{-1}^{1} \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \right) dx = \pi$$

一般の $a, b, c \in (0, \infty]$ に対しても, 同様に求められる. □

三角形 $T(a,b,c)$ について, 半径 a の円に対応する頂点を v_a, v_a における内角の大きさを α と書く. 同様に, 頂点 v_b に対応する内角の大きさを β, 頂点 v_c に対応する内角の大きさを γ と書く.

定理 2.1.3 ([4], Lemma 2.2)**.** $b, c \in (0, \infty]$ を固定し, $a \in (0, \infty]$ のみを動かしたとき,

(1) $\alpha = \alpha(a)$ は狭義単調減少な連続関数であり, $\alpha(\infty) = 0$ かつ $\alpha \to \pi (a \to 0)$ を満たす.

(2) $\beta = \beta(a)$ は単調増加な連続関数であり, 特に $b < \infty$ ならば狭義単調増加である.

(3) 面積 $|T|$ は狭義単調増加な連続関数である.

証明. (1)$b, c < \infty$ のとき. 双曲線関数に関する余弦定理から

$$\cos\alpha = \frac{\cosh{(a+b)}\cosh{(a+c)} - \cosh{(b+c)}}{\sinh{(a+b)}\sinh{(a+c)}}$$

ここに

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

を代入して,

$$\cos\alpha = \frac{(e^{2a+2b}+1)(e^{2a+2c}+1)-2e^{2a}(e^{2b+2c}+1)}{(e^{2a+2b}-1)(e^{2a+2c}-1)}$$

よって $e^{2a}=A, e^{2b}=B, e^{2c}=C$ とおけば

$$\cos\alpha = \frac{(AB+1)(AC+1)-2A(BC+1)}{(AB-1)(AC-1)}$$

これを A に関して微分すると,

$$\frac{d}{dA}\cos\alpha = \frac{2(B-1)(C-1)(BCA^2-1)}{(BA-1)^2(CA-1)^2}$$

$a,b,c>0$ より $A,B,C>1$ なのでこれは常に正, すなわち $\cos\alpha$ は A に関して狭義単調増加であることが従う. よって α は a に関して狭義単調減少である.

また, $a\to 0$ としたとき $A\to 1$ より

$$\cos\alpha \to \frac{(B+1)(C+1)-2(BC+1)}{(B-1)(C-1)} = -1$$

よって $\alpha\to\pi$ がいえた. また, $a\to\infty$ としたとき $A\to\infty$ より

$$\cos\alpha \to \frac{BC}{BC} = 1$$

よって $\alpha\to 0$ であり, これにより $a=\infty$ における連続性も従う.

$b=\infty$ かつ $c<\infty$ のとき, 同じく余弦定理から

$$\cos\alpha = \frac{A(AC+1)-2AC}{A(AC-1)}$$

と書けるため従う. $b<\infty$ かつ $c=\infty$ の場合も同様. $b=c=\infty$ のとき, これも余弦定理から

$$\cos\alpha = \frac{A-2}{A}$$

と書けるため従う. 以上により示された.

(2)$b<\infty$ のとき.

$$\cos\beta = \frac{(AB+1)(BC+1)-2B(AC+1)}{(AB-1)(BC-1)}$$

を A に関して微分すると,

$$\frac{d}{dA}\cos\beta = \frac{2B(1-BC)(1-B)(1-C)}{(AB-1)^2(BC-1)^2}$$

$A,B,C>1$ より微分は常に負, すなわち $\cos\beta$ は狭義単調減少である. よって β も狭義単調増加である. $b=\infty$ のとき $\beta\equiv 0$ よりこれは広義単調増加である.

(3) $a<a'$ ならば (2) より $T(a,b,c)\subsetneq T(a',b,c)$ が成立するので従う. $\square$

系 2.1.4 ([4], Lemma 2.4)**.** $0 < \lambda < \Lambda < \infty$ 及び $\varepsilon > 0$ を任意に取ったときある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $(a,b,c) \in [\lambda,\Lambda]^3$ に対して

$$|T(a+\varepsilon,b,c)| - |T(a,b,c)| > \delta$$

が成立する.

証明. $|T(a+\varepsilon,b,c)| - |T(a,b,c)|$ はコンパクト集合 $[\lambda,\Lambda]^3$ 上の連続関数より最小値が存在する. 更に定理の (3) より最小値は非負である. よって結論を得る. □

定理 2.1.5 ([4], Lemma 2.3)**.** $a,b,c \in (0,\infty)$ 及び $\zeta \in (0,\infty]$ に対して

$$T := T(a,b,c), \quad \zeta T := T(\zeta a, \zeta b, \zeta c)$$

とする. 更に ζT の内角について, $\zeta a, \zeta b, \zeta c$ に対応するものをそれぞれ $\alpha(\zeta), \beta(\zeta), \gamma(\zeta)$ とする. このとき α, β, γ は ζ に関して狭義単調減少な連続関数である.

証明. $x \in \mathbb{D} \cap \mathbb{R}_{>0}$ に対して

$$\rho_{\mathbb{D}}(0,x) = \log\frac{1+x}{1-x} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{e^{\rho_{\mathbb{D}}(0,x)}-1}{e^{\rho_{\mathbb{D}}(0,x)}+1}$$

であることに注意する. $\rho_{\mathbb{D}}(0,x) = r$ を満たすような $x \in \mathbb{D} \cap \mathbb{R}_{>0}$ を x_r と書く.

T について, a に対応する円を C_a, その中心を v_a と書く. 同様に, b に対応するものを C_b 及び v_b, c に対応するものを C_c 及び v_c と書く. 適当な等長変換を考えることによって $v_a = 0$, $v_b = x_{a+b}$, 及び $v_c \in \mathbb{D} \cap \mathbb{H}$ を満たすとしてよい.

まず, $\zeta \in (0,1)$ を任意に固定し, $\alpha < \alpha(\zeta)$ であることを示す. $r \in (0,\infty)$ に対して $\lambda_r \in \mathbb{R}$ を以下で定義する.

$$\lambda_r := \frac{x_{\zeta r}}{x_r}$$

このとき λ_r は $r \in (0,\infty)$ に関して狭義単調増加である. 実際

$$\lambda_r = \frac{x_{\zeta r}}{x_r} = \frac{e^{\zeta r}-1}{e^{\zeta r}+1} \cdot \frac{e^r+1}{e^r-1}$$

より,

$$\frac{d}{dr}\lambda_r = 2e^{\zeta r + r}\frac{\zeta e^r - e^{\zeta r} - \zeta e^{-r} + e^{-\zeta r}}{(e^{\zeta r}+1)^2(e^r-1)^2}$$

これの分子を $f(r)$ とすれば,

$$f'(r) = \zeta e^r - \zeta e^{\zeta r} + \zeta e^{-r} - \zeta e^{-\zeta r} > 0$$

すなわち f は単調増加なので,

$$\frac{d}{dr}\lambda_r = 2e^{\zeta r + r}\frac{f(r)}{(e^{\zeta r}+1)^2(e^r-1)^2} > 2e^{\zeta r + r}\frac{f(0)}{(e^{\zeta r}+1)^2(e^r-1)^2} = 0$$

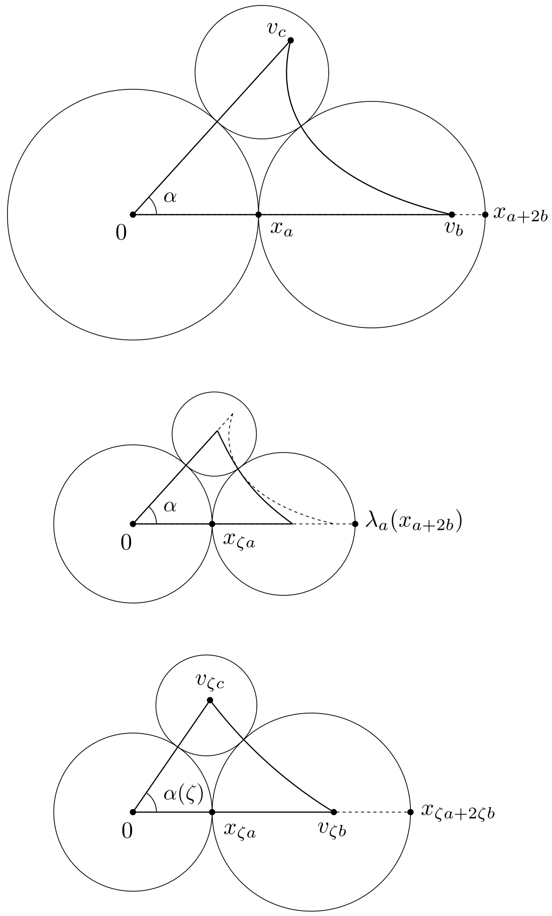

図 2: T（上段）と $\lambda_a(T)$（中段）と ζT（下段）

よって λ_r は $r \in (0, \infty)$ に関して狭義単調増加であることが従う.

今, a に対して相似変換 $\mathbb{C} \ni z \mapsto \lambda_a z \in \mathbb{C}$ を考えると, $\lambda_a(C_a) = C_{\zeta a}$ が成立する. 3 つの円 $\lambda_a(C_a), \lambda_a(C_b), \lambda_a(C_c) \subset \mathbb{D}$ によって得られる双曲三角形を $\lambda_a(T)$ と書く (図 2). λ_a は相似変換より, $\lambda_a(T)$ の a に対応する内角の大きさは α であることに注意する.

$\lambda_a(T)$ と ζT について. $\lambda_a(C_b)$ を双曲距離に関する円とみなしたとき,

$$(\lambda_a(C_b) \text{ の半径}) < (C_{\zeta b} \text{ の半径})$$

が成立する. 実際, $\lambda_a(C_b)$ と実軸との共通部分は $x_{\zeta a}$ 及び $\lambda_a(x_{a+2b})$ であり, $C_{\zeta b}$ と実軸との共通部分は $x_{\zeta a}$ 及び $x_{\zeta a+2\zeta b}$ であることから,

$$\lambda_a(x_{a+2b}) < x_{\zeta a+2\zeta b}$$

であることを示せばよい. これは λ_r の単調増加性より従う. 同様に,

$$(\lambda_a(C_c) \text{ の半径}) < (C_{\zeta c} \text{ の半径})$$

が成立する．これと定理 2.1.3 の (2) より $\alpha < \alpha(\zeta)$ が従う．

さて, $\zeta_1, \zeta_2 \in (0,\infty), \zeta_1 < \zeta_2$ を任意に固定する．このとき

$$\alpha(\zeta_2) = (T(\zeta_2 a, \zeta_2 b, \zeta_2 c) \text{ の } \zeta_2 a \text{ に対応する内角の大きさ})$$
$$\alpha(\zeta_1) = \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2} T(\zeta_2 a, \zeta_2 b, \zeta_2 c) \text{ の } \zeta_2 a \text{ に対応する内角の大きさ}\right)$$

と書ける．これと $\alpha < \alpha(\zeta)(\zeta \in (0,1))$ が成り立つことを合わせて, $\alpha(\zeta_1) > \alpha(\zeta_2)$ が従う．すなわち $\alpha(\zeta)$ は $\zeta \in (0,\infty)$ に関して狭義単調減少であることが従う．$\alpha(\zeta)$ の連続性は定理 2.1.3 の (1), (2) より従う．β, γ についても同様に示される． □

定理 2.1.6 ([3], Section 3)**.** $\{(a_n, b_n, c_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^3_{>0}$ を $(a,b,c) \in (0,\infty)^3$ に収束する点列とする．また, $T := T(a,b,c), T_n := T(a_n, b_n, c_n)$ に対して, $f_n : \partial T \to \partial T_n$ を次を満たす同相写像とする．

(i) a, b, c に対応する頂点を, a_n, b_n, c_n に対応する頂点へ移す．

(ii) 長さ $a+b, b+c, c+a$ の辺を, 長さ $a_n + b_n, b_n + c_n, c_n + a_n$ の辺へ移す．

(iii) f は各辺上で piecewise linear, すなわち, 長さ $a+b$ の辺を $t : 1-t$ に内分する点は, 長さ $a_n + b_n$ の辺を $t : 1-t$ に内分する点に移す．長さ $b+c, c+a$ の辺についても同様.

このときある擬等角写像 $F_n : T \to T_n$ が存在して, F_n は ∂T 上で f と一致し, かつ $\|\mu_{F_n}\|_\infty \to 0 (n \to \infty)$ を満たす．ただし, 擬等角写像については 3 節を参照.

証明の概略. $T \subset \mathbb{D}$ であるとし, 適当な等長変換によって T の内心は原点であるとする．T の各辺を双曲距離に関して 2^n 等分するような $3 \cdot 2^n$ 個の点を取る．そして, T の内心と $3 \cdot 2^{n-1}$ 個の点を結ぶことで, T は $3 \cdot 2^{n-1}$ 個の双曲三角形に分けられる.

各双曲三角形について, 頂点が一致するようなユークリッド三角形を考えると, $n \in \mathbb{N}$ が十分大きいとき, これらの三角形は十分等角に近いような擬等角写像で互いに移り合う.

今, T 及び T_n を $3 \cdot 2^n$ 個の双曲三角形に分け, 対応する双曲三角形を考える．n が十分大きいとき, これらの双曲三角形から得られるユークリッド三角形は, 十分等角に近いアフィン変換で移り合う.

よって $3 \cdot 2^n$ 個の三角形それぞれについて, 十分等角に近い擬等角写像が構成できる．これらを貼り合わせることで, F_n を得る (図 3). □

2.2 双曲四角形と Brooks パラメーター

4-隙間を成すような円 $C_1, C_2, C_3, C_4 \subset \mathbb{H}$ を任意に固定する．このとき, C_1, C_2 に接し 4-隙間に含まれるような円のうち, 半径が最大であるような円 C が一意に存在

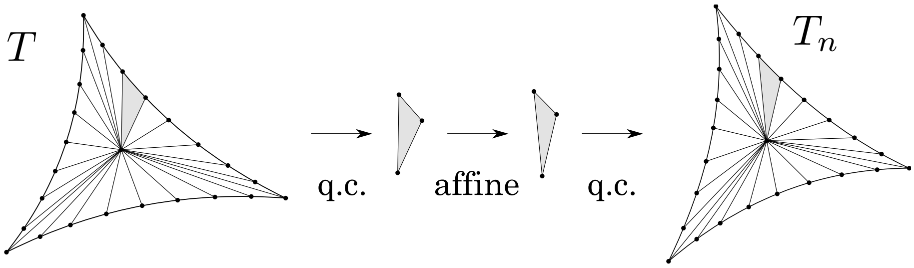

図 3: $n=3$ の場合

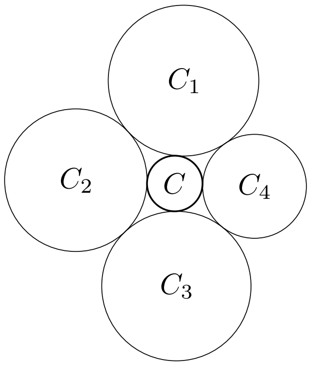

図 4: 水平かつ垂直な円

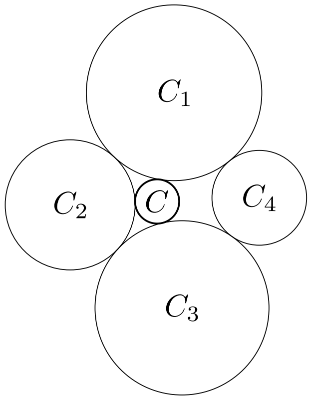

図 5: 真に水平な円

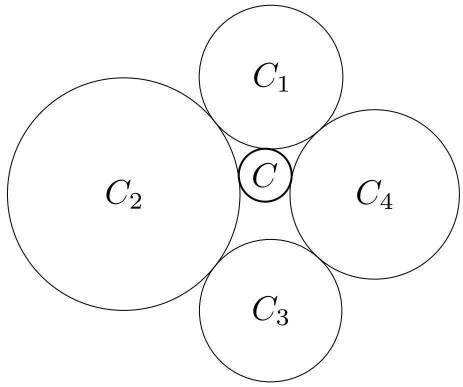

図 6: 真に垂直な円

する．この C は C_3, C_4 の少なくとも一方に接する．C_3 に接するとき C は水平であるといい, C_4 に接するとき C は垂直であるという．更に, 水平であって垂直でない円を真に水平な円 (図 5) といい, 垂直であって水平でない円を真に垂直な円 (図 6) という．

C が水平かつ垂直であるとき, 4-隙間は C によって 4 つの 3-隙間に分けられる．C が垂直, 水平のいずれか一方のみであるとき, C_1, C_2, C_3, C_4 及び C は 2 つの 3-隙間と 1 つの 4-隙間を成す．

C が真に水平であるとき, C_1, C, C_3, C_4 によって作られる 4-隙間について, C_1, C に接し 4-隙間に含まれるような円のうち半径が最大であるようなものを考えれば, 再びこの円について水平, 垂直を定義することができる．同様に, C が真に垂直であるとき, C, C_2, C_3, C_4 によって作られる 4-隙間について水平, 垂直の少なくとも一方を満たすような円が一意に定まる．

以上の考察から, 次のような整数列 $n_1, n_2, \cdots$ (有限列の場合もあれば無限列の場合もある) が C_1, C_2, C_3, C_4 に対して一意に定義できる．まず, C_1, C_2, C_3, C_4 に対して水平な円が取れない場合は $n_1 = 0$ とする．水平な円が取れる場合は, 水平な円によって新たに得られる 4-隙間に対して再び円を加える, という操作を水平な円が取れなくなるまで繰り返し, これによって加えられた円の個数を $n_1 \in \mathbb{N}$ とする．最後の円, すなわち n_1 番目の円が水平かつ垂直な場合は列を n_1 のみで定義し, 真に水平

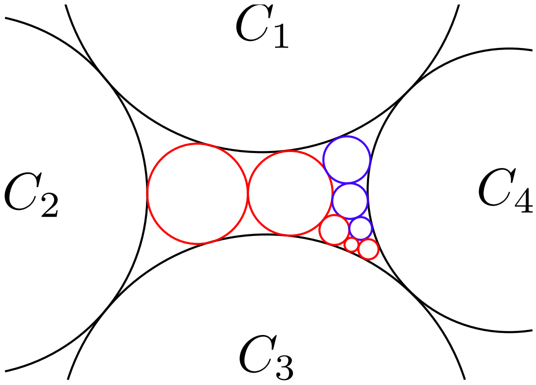

図 7: Brooks パラメーター

な場合は n_2 を次のように定義する．

n_1 番目の円は水平に取れる最後の円であったので, 次に追加される円は真に垂直である．これによって得られる新たな 4-隙間に垂直な円を追加する, という操作を垂直な円が取れなくなるまで繰り返し, その個数を $n_2 \in \mathbb{N}$ とする．最後の円, すなわち $n_1 + n_2$ 番目の円が水平かつ垂直の場合は列を n_1, n_2 で定義する．真に垂直な場合は, n_1 と同様に水平な円を追加していき, その個数を $n_3 \in \mathbb{N}$ とする．

以下同様に, 円を水平, 垂直, 水平, $\cdots$ と追加していき, その個数を $n_1, n_2, n_3, \cdots$ とする．水平かつ垂直な円が取れれば列は有限列であり, そのような円が取れなければ列は無限列になる．例えば, 図 7 の場合には

$$n_1 = 2, \quad n_2 = 2, \quad n_3 = 1, \quad n_4 = 1, \quad n_5 = 2$$

である．

以上により, C_1, C_2, C_3, C_4 から定まる列 $n_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n_2, n_3, \cdots \in \mathbb{N}$ が定義できた．これに対して Brooks パラメーターを定義するが, その前に連分数に関する次の命題を用意する．

命題 2.2.1 ([9], Appendix C)**.** 自然数列 $\{n_N\}_{N=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ に対して $\beta_N \in \mathbb{R}$ を次で定義する．

$$\beta_N := n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{\ddots \quad \vdots \atop n_{N-2} + \cfrac{1}{n_{N-1} + \cfrac{1}{n_N}}}}$$

このとき $\{\beta_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ は収束列である．

証明. まず, $\{r_N\}_{N \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$ に対して $p_N = p_N(r_1, \cdots, r_N), q_N = q_N(r_1, \cdots, r_N) \in \mathbb{R}$

を次の漸化式によって定義する.

$$p_0 = 0, \qquad p_1 = 1, \qquad p_N = r_N p_{N-1} + p_{N-2} \quad (N \geq 2)$$
$$q_0 = 1, \qquad q_1 = r_1, \qquad q_N = r_N q_{N-1} + q_{N-2} \quad (N \geq 2)$$

このとき任意の $N \in \mathbb{N}$ 及び任意の $r_1, \cdots, r_N \in \mathbb{R}_{>0}$ 対して,

$$\alpha_N := r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \cfrac{1}{\ddots \qquad \vdots \atop r_{N-2} + \cfrac{1}{r_{N-1} + \cfrac{1}{r_N}}}}$$

によって定義される $\alpha_N = \alpha_N(r_1, \cdots, r_N)$ は $\alpha_N = q_N/p_N$ を満たすことを, 数学的帰納法によって示す. $N = 1, 2$ の場合は明らかであり, $N \geq 3$ については

$$\alpha_N(r_1, \cdots, r_{N-2}, r_{N-1}, r_N) = \alpha_{N-1}(r_1, \cdots, r_{N-2}, r_{N-1} + 1/r_N)$$

と書けることから,

$$\begin{aligned}
&\alpha_N(r_1, \cdots, r_{N-2}, r_{N-1}, r_N) \\
&= \alpha_{N-1}(r_1, \cdots, r_{N-2}, R) && (R := r_{N-1} + 1/r_N) \\
&= \frac{q_{N-1}(r_1, \cdots, r_{N-2}, R)}{p_{N-1}(r_1, \cdots, r_{N-2}, R)} && (\text{帰納法の仮定}) \\
&= \frac{Rq_{N-2}(r_1, \cdots, r_{N-2}) + q_{N-3}(r_1, \cdots, r_{N-3})}{Rp_{N-2}(r_1, \cdots, r_{N-2}) + p_{N-3}(r_1, \cdots, r_{N-3})} && (\text{漸化式})
\end{aligned}$$

ここでこの式の分子は,

$$\begin{aligned}
&Rq_{N-2} + q_{N-3} \\
&= \left(r_{N-1} + \frac{1}{r_N}\right) q_{N-2} + q_{N-3} && (R\text{ の定義}) \\
&= r_{N-1}q_{N-2} + q_{N-3} + \frac{q_{N-2}}{r_N} \\
&= q_{N-1} + \frac{q_{N-2}}{r_N} && (\text{漸化式}) \\
&= \frac{r_N q_{N-1} + q_{N-2}}{r_N} \\
&= \frac{q_N(r_1, \cdots, r_N)}{r_N} && (\text{漸化式})
\end{aligned}$$

と計算できる. 分母も同様に計算できるので,

$$\begin{aligned}
&\alpha_N(r_1, \cdots, r_N) \\
&= \frac{Rq_{N-2}(r_1, \cdots, r_{N-2}) + q_{N-3}(r_1, \cdots, r_{N-3})}{Rp_{N-2}(r_1, \cdots, r_{N-2}) + p_{N-3}(r_1, \cdots, r_{N-3})} \\
&= \frac{q_N(r_1, \cdots, r_N)}{p_N(r_1, \cdots, r_N)}
\end{aligned}$$

よって示された. 特に, β_N についても

$$\beta_N = \frac{q_N(n_1, \cdots, n_N)}{p_N(n_1, \cdots, n_N)}$$

と書ける.

以下では, 変数を省略して $p_N = p_N(n_1, \cdots, n_N), q_N = q_N(n_1, \cdots, n_N)$ と書く. 漸化式より

$$\begin{pmatrix} p_N & q_N \\ p_{N+1} & q_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & n_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{N-1} & q_{N-1} \\ p_N & q_N \end{pmatrix}$$

と書けるので, 帰納的に

$$\begin{pmatrix} p_N & q_N \\ p_{N+1} & q_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & n_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & n_{N-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 & q_0 \\ p_1 & q_1 \end{pmatrix}$$

と書ける. 両辺の行列式を考えることで,

$$p_N q_{N+1} - p_{N+1} q_N = (-1)^N (p_0 q_1 - p_1 q_0) = (-1)^{N+1}$$

よって任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$|\beta_{N+1} - \beta_N| = \left| \frac{p_N q_{N+1} - p_{N+1} q_N}{p_N p_{N+1}} \right| = \frac{1}{p_N p_{N+1}}$$

が従う. 各 n_N は自然数であったので, 漸化式より p_N の発散速度はフィボナッチ数列

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^N - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^N \right\}$$

の発散速度以上である. よって $\{\beta_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ はコーシー列でありすなわち収束列である. □

定義. (**Brooks パラメーター**) C_1, C_2, C_3, C_4 に対して上記の操作を行うことで得られる整数列 $n_1, n_2, n_3, \cdots$ に対して, **Brooks パラメーター** β を以下で定義する.

整数列が有限列 $n_1, n_2, \cdots, n_N$ ならば

$$\beta := n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{\ddots \quad \vdots \quad n_{N-2} + \cfrac{1}{n_{N-1} + \cfrac{1}{n_N}}}}$$

整数列が無限列ならば, 命題 2.2.1 の記号を用いて

$$\beta := \lim_{N \to \infty} \beta_N$$

Brooks パラメーターは 4-隙間に対して定まるのではなく, 順番のついた 4 つの円 C_1, C_2, C_3, C_4 に対して定まるパラメーターであることに注意する.

命題 2.2.2 ([4], Section3)**.** Brooks パラメーター β について,

(1) β に対して $n_1, n_2, \cdots$ は一意に定まる. すなわち, $n_1, n_2 \cdots,$ と $m_1, m_2 \cdots,$ が同じ β を定めるならば, $n_1 = m_1, n_2 = m_2, \cdots$ が成立する.

(2) β が有理数となるための必要十分条件は, $n_1, n_2, \cdots$ が有限列となることである.

証明. (1) $n_1, n_2, \cdots$ から定まる Brooks パラメーターを β_1, $m_1, m_2, \cdots$ から定まる Brooks パラメーターを β_2 とおく. 仮定より $\beta_1 = \beta_2$ である.

β_1 の定義より, n_1 は β_1 の整数部分である. 同様に m_1 は β_2 の整数部分より, $n_1 = m_1$ が成立する. 次に, n_2 は $1/(\beta_1 - n_1)$ の整数部分であり, m_2 は $1/(\beta_2 - m_1)$ の整数部分である. よって $n_2 = m_2$ が成立する. 以下同様に, 任意の N に関して $n_N = m_N$ が成立するため, 結論を得る[*1].

(2) $n_1, n_2, \cdots$ が有限列ならば β が有理数となることは明らかなので, 逆を示す. β が有理数のとき. β は互いに素な自然数 p, q によって

$$\beta = \frac{q}{p}$$

と書ける. p, q は互いに素より, ユークリッドの互除法から次を満たすような $N \in \mathbb{N}$ 及び $n_1, \cdots, n_N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m_1, \cdots, m_{N-2} \in \mathbb{N}$ が存在する.

$$\begin{array}{rclcrcl}
p & = & q \times n_1 + m_1 & \Longleftrightarrow & \dfrac{p}{q} & = & n_1 + \dfrac{m_1}{q} \\
q & = & m_1 \times n_2 + m_2 & \Longleftrightarrow & \dfrac{q}{m_1} & = & n_2 + \dfrac{m_2}{m_1} \\
m_1 & = & m_2 \times n_3 + m_3 & \Longleftrightarrow & \dfrac{m_1}{m_2} & = & n_3 + \dfrac{m_3}{m_2} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
m_{N-3} & = & m_{N-2} \times n_{N-1} + 1 & \Longleftrightarrow & \dfrac{m_{N-3}}{m_{N-2}} & = & n_{N-1} + \dfrac{1}{m_{N-1}} \\
m_{N-2} & = & 1 \times n_N & \Longleftrightarrow & \dfrac{m_{N-2}}{1} & = & n_N
\end{array}$$

[*1] 一般の連分数についてこれは成り立たない. 例えば列 $1, 3$ と列 $1, 2, 1$ は

$$1 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}$$

のように同じ数を定める. 今回の場合, 有限列かつ末項が 1, は起こり得ないため一意性が保たれる.

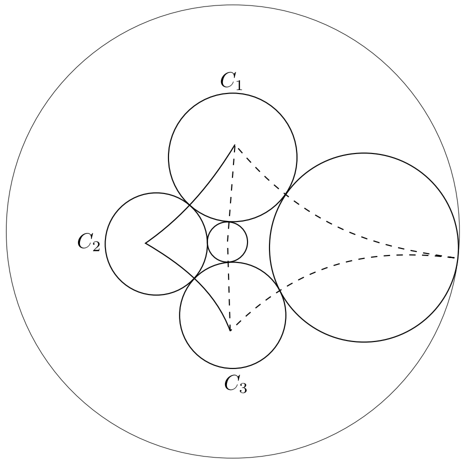

図 8: $\lambda = \lambda_0$ 及び $\lambda = \infty$

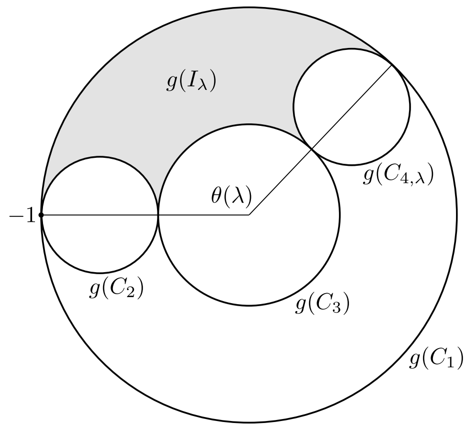

図 9: 一次分数変換 g

これらを用いることで

$$\frac{p}{q} = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{\ddots \qquad \vdots \atop n_{N-2} + \cfrac{1}{n_{N-1} + \cfrac{1}{n_N}}}}$$

と書けるので, β が有理数ならば β を定めるのは有限列 $n_1, \cdots, n_N$ である. $\square$

この命題より, 4-隙間を任意に固定したときその 4-隙間が有限個の 3-隙間に分けられるための十分条件のひとつは, Brooks パラメーターが有理数であるということが分かった. 次に, Brooks パラメーターが有理数であるような 4-隙間がどの程度存在するかを考察する.

C_1, C_2, C_3 を固定して, C_4 を C_1 及び C_3 に接するように動かすことを考える. C_2 と C_4 の中心の距離を λ とすれば, λ の下限 λ_0 は C_2 と C_4 が接するときに実現される. λ の上限は ∞ でありこれは C_4 の半径が ∞, すなわち C_4 と $\partial\mathbb{D}$ が接するときに実現される (図 8).

すなわち, C_1, C_2, C_3 及び $\lambda \in (\lambda_0, \infty)$ によって円 $C_4 = C_{4,\lambda}$ 及び 4-隙間 I_λ が定まる.

$C_1, C_2, C_3, C_{4,\lambda}$ は $\mathbb{D}$ 内 (あるいは $\mathbb{H}$ 内) の円なので, $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ の円円対応から次のような一次分数変換 g が存在する (図 9); ある $0 < r < 1$ に対して

$$g(C_1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$$
$$g(C_3) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le r\}$$
$$\overline{g(C_2)} \cap \overline{g(C_1)} = \{-1\}$$

このとき $\overline{g(C_{4,\lambda})} \cap \overline{g(C_1)} = \{e^{i(\pi-\theta(\lambda))}\}$ を満たすような $\theta = \theta(\lambda) \in (0, 2\pi)$ が定まる. この対応 $\lambda \mapsto \theta$ は明らかに狭義単調増加かつ連続である. また, $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ の円円対応より, $g(I_\lambda)$ に対しても Brooks パラメーターを考えることは可能であり, これは I_λ の Brooks パラメーターと一致する.

補題 2.2.3 ([6], Section 2)**.** I_λ の Brooks パラメーターは, λ に関して連続である.

証明. $g(I_\lambda)$ の Brooks パラメーターを β_θ と書く. $\lambda \mapsto \theta$ は連続であったので, $\theta \mapsto \beta_\theta$ が連続であることを示す.

θ を任意に固定する. β_θ が無理数のとき.

$$\beta_\theta = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cdots}}$$

であるとする. Brooks パラメーターの定義のために構成した無限個の円について, それぞれの中心及び半径は θ に関して連続的に変化する. よって任意の $N \in \mathbb{N}$ に対してある $\delta > 0$ が存在して, $|\theta - \theta'| < \delta$ ならば

$$\beta_{\theta'} = m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{1}{m_3 + \cdots}}, \qquad m_k = n_k \quad (k < N)$$

が成立する. 命題 2.2.1 より, N を大きくしていけば β_θ と $\beta_{\theta'}$ の差はいくらでも小さくできるので, θ における β_θ の連続性が従う.

β_θ が有理数のとき.

$$\beta_\theta = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{\ddots \qquad \vdots \atop n_{N-1} + \cfrac{1}{n_N}}}$$

であるとする. θ に十分近い θ' を任意に固定して,

$$\beta_{\theta'} = m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{1}{m_3 + \cdots}}$$

であるとする. θ と θ' の差が十分小さいとき, $n_1 + \cdots + n_N - 1$ 個目までの円について, 水平な円は水平のまま, 垂直な円は垂直なままであるとしてよい. ここで, $n_1 + \cdots + n_N$ 番目の円を C_θ と書くとき, C_θ は水平かつ垂直である. 以下では $C_{\theta'}$ の水平, 垂直それぞれの場合について考える.

$C_{\theta'}$ が水平かつ垂直の場合, $\beta_\theta = \beta_{\theta'}$ が成立する.

$C_{\theta'}$ が真に垂直な場合. $n_1 + \cdots + n_N - 1$ 個目の円, すなわち $C_{\theta'}$ の 1 つ前の円を D とする. $C_{\theta'}$ は真に垂直より $d(C_{\theta'}, g(C_3)) > 0$ が成立するが, $C_{\theta'}$ の変化は θ に関し

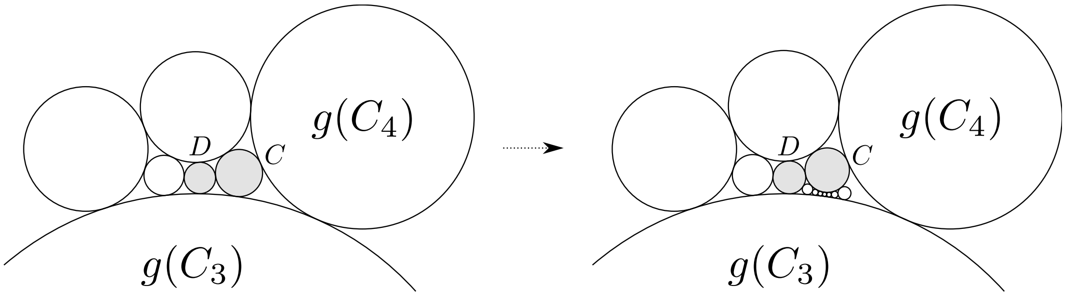

図 10: C が真に垂直かつ D が水平の場合

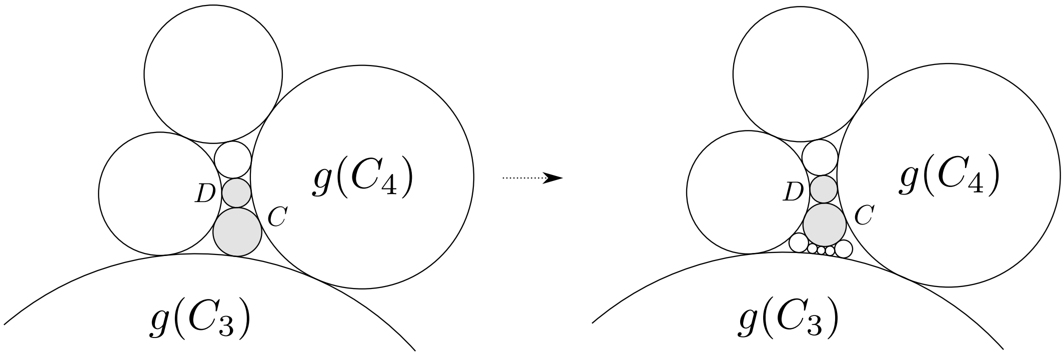

図 11: C が真に垂直かつ D が垂直の場合

て連続的なため, θ' を θ に近づけることで $d(C_{\theta'}, g(C_3))$ はいくらでも小さくできる. よって, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対してある $\delta > 0$ が存在して, $|\theta - \theta'| < \delta$ ならば

$$D\text{: 水平 (図 10)} \quad \Longrightarrow \quad m_i \begin{cases} = n_i & (i = 1, \cdots, N-1) \\ = n_N - 1 & (i = N) \\ = 1 & (i = N+1) \\ > k & (i = N+2) \end{cases} \tag{2.1}$$

$$D\text{: 垂直 (図 11)} \quad \Longrightarrow \quad m_i \begin{cases} = n_i & (i = 1, \cdots, N) \\ > k & (i = N+1) \end{cases} \tag{2.2}$$

が成立する. これより β_θ と $\beta_{\theta'}$ の差はいくらでも小さくできることがいえた.

同様に, $C_{\theta'}$ が真に水平な場合, $d(C_{\theta'}, g(C_4)) > 0$ はいくらでも小さくできる. よって, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対してある $\delta > 0$ が存在して, $|\theta - \theta'| < \delta$ ならば, D が水平 (図 12) のとき (2.2) の場合に帰着され, D が垂直 (図 13) のとき (2.1) の場合に帰着される.

以上により, β_θ が無理数の場合にも θ における β_θ の連続性が確かめられた. よって β_θ は θ に関して連続である. □

補題 2.2.4 ([6], Lemma 3.1)**.** I_λ の Brooks パラメーターは, λ に関して広義単調増加である.

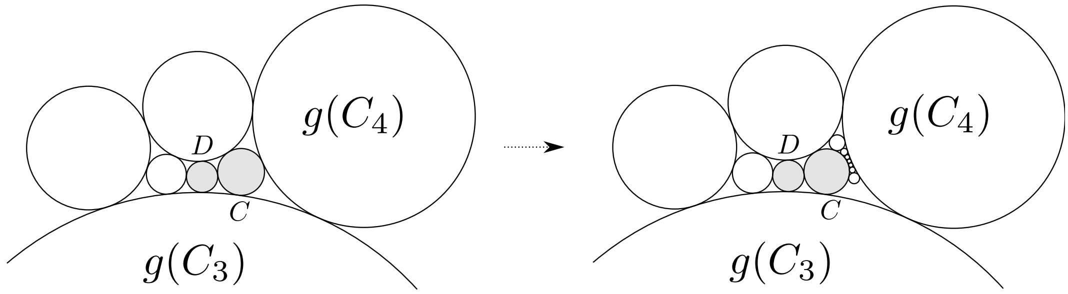

図 12: C が真に水平かつ D が水平の場合

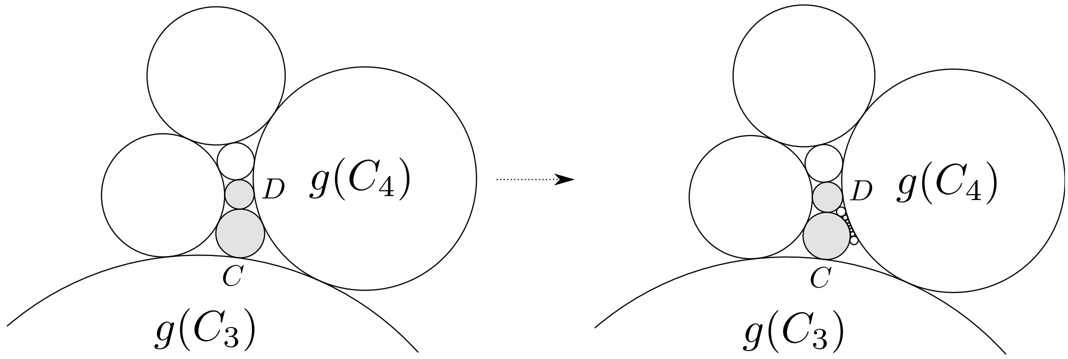

図 13: C が真に水平かつ D が垂直の場合

証明. 同じく, $\theta \mapsto \beta_\theta$ が広義単調増加であることを示す.

(I)β_θ の大小関係について. θ, θ' が

$$\beta_\theta = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cdots}}, \quad \beta_{\theta'} = m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{1}{m_3 + \cdots}}$$

かつ

$$n_k = m_k \quad (k < N), \qquad n_N < m_N \tag{2.3}$$

を満たすとする. このとき

$$n_N + \frac{1}{n_{N+1} + \cdots} < n_N + 1 \leq m_N \leq m_N + \frac{1}{m_{N+1} + \cdots}$$

すなわち

$$n_N + \frac{1}{n_{N+1} + \cdots} < m_N + \frac{1}{m_{N+1} + \cdots}$$

が成立する. また, $n_{N-1} = m_{N-1}$ より

$$n_{N-1} + \cfrac{1}{n_N + \cfrac{1}{n_{N+1} + \cdots}} > m_{N-1} + \cfrac{1}{m_N + \cfrac{1}{m_{N+1} + \cdots}}$$

が成立する．更に $n_{N-2}=m_{N-2}$ より

$$n_{N-2}+\cfrac{1}{n_{N-1}+\cfrac{1}{n_N+\cfrac{1}{n_{N+1}+\cdots}}}<m_{N-2}+\cfrac{1}{m_{N-1}+\cfrac{1}{m_N+\cfrac{1}{m_{N+1}+\cdots}}}$$

が成立する．以下同様に繰り返すことで，(2.3) の条件の下で

$$N\text{ が偶数} \iff \beta_\theta>\beta_{\theta'},\qquad N\text{ が奇数} \iff \beta_\theta<\beta_{\theta'}$$

となることが分かる．

(II) 関数 S_k^θ． β_θ に対応する円のうち k 番目のものを C_k^θ と書く． すなわち円 $C_1^\theta,\cdots,C_{n_1}^\theta$ が水平であり，円 $C_{n_1+1}^\theta,\cdots,C_{n_1+n_2}^\theta$ が垂直であり，$\cdots$ となっている．更に S_k^θ を

$$S_k^\theta=\begin{cases}1 & (C_k^\theta\text{ が真に水平})\\ 0 & (C_k^\theta\text{ が水平かつ垂直})\\ -1 & (C_k^\theta\text{ が真に垂直})\end{cases}$$

と定義する．(2.3) の条件の下では，

$$\begin{gathered}S_1^\theta=S_1^{\theta'}\\ S_2^\theta=S_2^{\theta'}\\ \vdots\\ S_{n_1+\cdots+n_N-1}^\theta=S_{n_1+\cdots+n_N-1}^{\theta'}\end{gathered}$$

が成立している．

N が偶数のとき．$S_{n_1+\cdots+n_N}^\theta=0$ ならば，$C_{n_1+\cdots+n_N-1}^\theta$ は真に垂直であり $C_{n_1+\cdots+n_N}^\theta$ は水平かつ垂直である．これと $n_N<m_N$ を合わせると，$C_{n_1+\cdots+n_N}^{\theta'}$ は真に垂直と分かるので

$$S_{n_1+\cdots+n_N}^\theta=0>S_{n_1+\cdots+n_N}^{\theta'}=-1$$

が従う．また，$S_{n_1+\cdots+n_N}^\theta\neq0$ ならば，$C_{n_1+\cdots+n_N}^\theta$ は真に垂直かつ $C_{n_1+\cdots+n_N+1}^\theta$ は真に水平である．一方，$n_N<m_N$ より $C_{n_1+\cdots+n_N}^{\theta'}$ は真に水平かつ $C_{n_1+\cdots+n_N+1}^{\theta'}$ は垂直なので，

$$\begin{gathered}S_{n_1+\cdots+n_N}^\theta=S_{n_1+\cdots+n_N}^{\theta'}=-1\\ \{0,1\}\ni S_{n_1+\cdots+n_N+1}^\theta>S_{n_1+\cdots+n_N+1}^{\theta'}=-1\end{gathered}$$

が成立する．

同様に，N が奇数かつ $S_{n_1+\cdots+n_N}^\theta=0$ ならば

$$S_{n_1+\cdots+n_N}^\theta=0<S_{n_1+\cdots+n_N}^{\theta'}=1$$

であり, N が奇数かつ $S^{\theta}_{n_1+\cdots+n_N} \neq 0$ ならば

$$S^{\theta}_{n_1+\cdots+n_N} = S^{\theta'}_{n_1+\cdots+n_N} = 1$$
$$S^{\theta}_{n_1+\cdots+n_N+1} = -1 < S^{\theta'}_{n_1+\cdots+n_N+1} \in \{0,1\}$$

が成立する.

以上の議論から, θ, θ' について $\beta_\theta < \beta_{\theta'}$ が成り立つための必要十分条件は,

$$S^{\theta}_k = S^{\theta'}_k \quad (k = 1, \cdots, k_0 - 1), \qquad S^{\theta}_{k_0} \neq S^{\theta'}_{k_0} \tag{2.4}$$

が成り立つような $k_0 \in \mathbb{N}$ に対して $S^{\theta}_{k_0} < S^{\theta'}_{k_0}$ が成立することと分かる. よって, β_θ が広義単調増加であることを示すためには, 任意の $\theta < \theta'$ について, (2.4) を満たすような $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在すれば $S^{\theta}_{k_0} < S^{\theta'}_{k_0}$ が成立することを示せばよい (そのような k_0 の存在は, 補題 2.2.5 で示す). 以下ではそのような k_0 が存在すると仮定する.

ここで次のような $R^{\theta}_k, B^{\theta}_k$ を定義する. $S^{\theta}_k \leq 0$, すなわち C^{θ}_k が垂直であるような k に対して,

$$R^{\theta}_k := |z|, \qquad z \in \overline{C^{\theta}_k} \cap \overline{g(C_{4,\theta})}$$

$S^{\theta}_k = 1$ であるような k に対しては R^{θ}_k は定義されない. また, $S^{\theta}_k \geq 0$, すなわち C^{θ}_k が水平であるような k に対して,

$$B^{\theta}_k := \pi - \arg z, \qquad z \in \overline{C^{\theta}_k} \cap \overline{g(C_3)}$$

$S^{\theta}_k = -1$ であるような k に対しては B^{θ}_k は定義されない (図 14).

(III)$R^{\theta}_k, B^{\theta}_k$ の単調性. 任意の C^{θ}_k に対して, C^{θ}_k に "上" から接する円を $C^{\theta}_{k,\mathrm{top}}$, "左" から接する円を $C^{\theta}_{k,\mathrm{left}}$ と書く. 例えば,

$$C^{\theta}_{1,\mathrm{top}} = C_1, \qquad C^{\theta}_{1,\mathrm{left}} = C_2$$

である.

また, (互いに素とは限らない)4 つの円 A, B, C, D に対して, $\mathbb{H} \backslash (\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup \overline{D})$ が相対コンパクト領域を成し, かつその領域から見て A, B, C, D が正の順に並んでいるとき, 相対コンパクト領域を $[A, B, C, D]$ と書く.

さて, θ, θ' が $\theta < \theta'$ を満たしかつ (2.4) を満たすような $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在するとする. このとき任意の $k = n_1 + 1, n_1 + 2, \cdots, k_0 - 1$ に対して

(1) $S^{\theta}_k = 1$ ならば, $B^{\theta}_k > B^{\theta'}_k$ かつ

$$[g(C_3), g(C_{4,\theta'}), C^{\theta'}_{k,\mathrm{top}}, C^{\theta}_k] \subsetneq [g(C_3), g(C_{4,\theta'}), C^{\theta'}_{k,\mathrm{top}}, C^{\theta'}_k]$$

(2) $S^{\theta}_k = -1$ ならば, $R^{\theta}_k > R^{\theta'}_k$ かつ

$$[g(C_3), g(C_{4,\theta}), C^{\theta}_k, C^{\theta}_{k,\mathrm{left}}] \supsetneq [g(C_3), g(C_{4,\theta}), C^{\theta'}_k, C^{\theta}_{k,\mathrm{left}}]$$

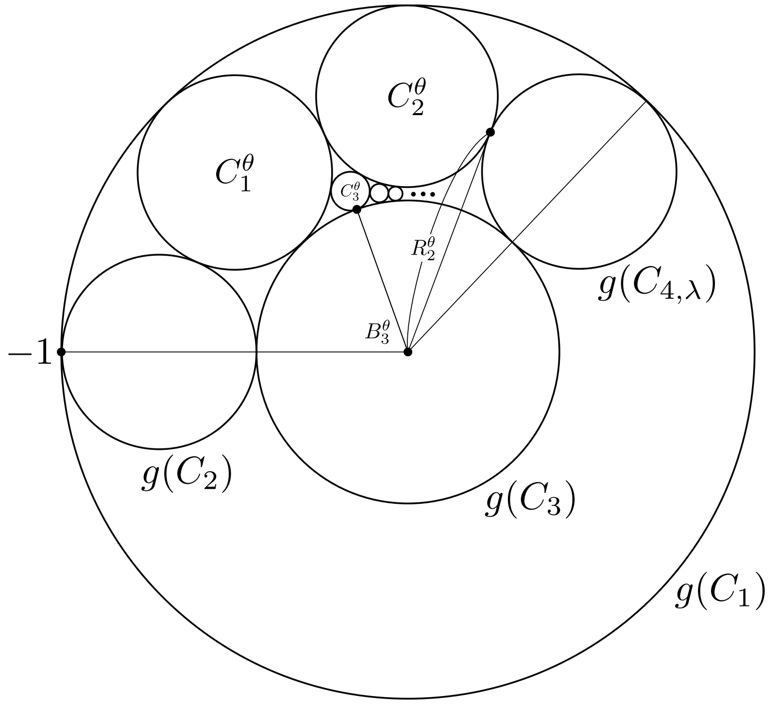

図 14: R_k^θ と B_k^θ

が成立することを, k に関する帰納法で示す.

$k = n_1 + 1$ のとき. $S_k^\theta = S_k^{\theta'} = -1$ であり, 対称性により $R_{n_1+1}^\theta$ は $w \in \overline{C_{n_1}^\theta} \cap \overline{C_{n_1+1}^\theta}$ の大きさに一致する (図 15). 一方, $\theta < \theta'$ より明らかに

$$(C_{n_1+1}^\theta \text{ の半径}) < (C_{n_1+1}^{\theta'} \text{ の半径})$$

が成立する. これらを合わせて $R_{n_1+1}^\theta > R_{n_1+1}^{\theta'}$ が従う. このとき包含関係

$$[g(C_3), g(C_{4,\theta}), C_{n_1+1}^\theta, C_{n_1}^\theta] \supsetneq [g(C_3), g(C_{4,\theta}), C_{n_1+1}^{\theta'}, C_{n_1}^\theta]$$

が成り立つことも容易に分かる. よって (2) の成立がいえた. (1) は, 仮定 $S_{n_1+1}^\theta = 1$ が偽なので真である.

一般の $k = n_1 + 1, n_1 + 2, \cdots, k_0 - 1$ について. $S_k^\theta = 1$ の場合. 帰納法の仮定 (2) を $C_{k,\mathrm{top}}^\theta$ に適用することで, C_k^θ と $C_{k,\mathrm{top}}^{\theta'}$ は内部で交わっている. よって, $g(C_3)$ と偏角 B_k^θ で接し, かつ $C_{k,\mathrm{top}}^{\theta'}$ と接するような円 D_k を考えると, これは $C_{k,\mathrm{left}}^\theta$ とは交わらない. 更に帰納法の仮定 (1) を $C_{k,\mathrm{left}}^\theta$ に適用することで, D_k は $C_{k,\mathrm{left}}^{\theta'}$ とも交わらないことが分かる. これより $C_k^{\theta'}$ は D_k を反時計回りにスライドさせた円であることが分かるので, $B_k^\theta > B_k^{\theta'}$ が従う (図 16). また, この議論により (1) の包含関係が成立するも分かるので, (1) の成立がいえた. (2) については仮定が偽なので真である.

$S_k^\theta = -1$ の場合. C_k^θ 及び $C_{k,\mathrm{top}}^\theta$ を $\theta - \theta'(< 0)$ だけ回転させると, これらは $g(C_{4,\theta'})$ と接し, $C_{k,\mathrm{left}}^\theta$ とは交わらない. よって $C_{k,\mathrm{left}}^\theta$ に対して帰納法の仮定 (1) を適用することで, 回転させた 2 つの円は $C_{k,\mathrm{left}}^{\theta'}$ とも交わらない. そこで 2 つの円について, $g(C_{4,\theta'})$

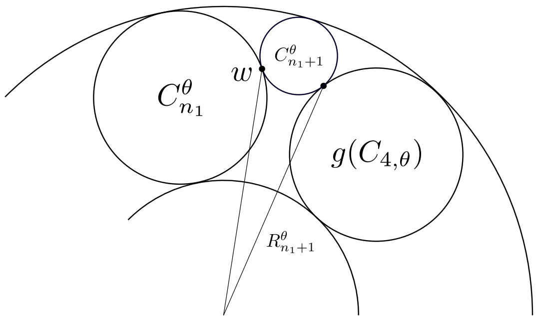

図 15: $k = n_1 + 1$ の場合

との接点は保ったまま $C^{\theta'}_{k,\mathrm{left}}$ に接するように拡大させる．このとき 2 つの円は内部で交わる．2 つの円のうち $C^{\theta}_{k,\mathrm{top}}$ に対応する方について考えると，帰納法の仮定 (2) より，$g(C_{4,\theta'})$ 及び $C^{\theta'}_{k,\mathrm{left}}$ に接したまま下にスライドさせることで $C^{\theta'}_{k,\mathrm{top}}$ が得られる．このことより $R^{\theta}_{k} > R^{\theta'}_{k}$ であることが従う (図 17)．同様の議論から包含関係についても分かるので，(2) がいえた．(1) については仮定が偽なので真である．

以上より，任意の $k = n_1 + 1, n_1 + 2, \cdots, k_0 - 1$ に対して (1), (2) が成立することがいえた．

(IV) この (1), (2) を用いて，k_0 に対して $S^{\theta}_{k_0} < S^{\theta'}_{k_0}$ が成立することを示す．

$S^{\theta}_{k_0} = -1$ のとき．仮定より $S^{\theta}_{k_0} \neq S^{\theta'}_{k_0}$ であり定義より $S^{\theta'}_{k_0} \in \{0, \pm 1\}$ なので，明らかに $S^{\theta}_{k_0} < S^{\theta'}_{k_0}$ が成立する．

$S^{\theta}_{k_0} = 0$ のとき．$C^{\theta}_{k_0}$ は $g(C_3)$ 及び $g(C_{4,\theta}), C^{\theta}_{k_0,\mathrm{top}}, C^{\theta}_{k_0,\mathrm{left}}$ と接している．このとき $C^{\theta}_{k_0}$ は，$g(C_{4,\theta'})$ と離れ，$C^{\theta'}_{k_0,\mathrm{top}}$ と交わり (帰納法の主張 (2))，$C^{\theta'}_{k_0,\mathrm{left}}$ と離れている (帰納法の主張 (1))．よって $C^{\theta'}_{k_0}$ は，$C^{\theta}_{k_0}$ を縮小し $g(C_2)$ 方向へスライドさせて得られる円であることが分かる．このとき $C^{\theta'}_{k_0}$ は $g(C_{4,\theta'})$ と離れているので，$C^{\theta'}_{k_0}$ は水平，すなわち $S^{\theta'}_{k_0} = 1$ が成立することが分かる．よって $S^{\theta}_{k_0} < S^{\theta'}_{k_0}$ が示された．

$S^{\theta}_{k_0} = 1$ のとき．上と同様の議論により $C^{\theta'}_{k_0}$ は真に水平，すなわち $S^{\theta}_{k_0} = S^{\theta'}_{k_0} = 1$ となり，これは仮定に反する．よって $S^{\theta}_{k_0} = 1$ は起こりえないことが分かる．

以上により $S^{\theta}_{k_0} < S^{\theta'}_{k_0}$ が成立することがいえたので，β_θ は θ に関して広義単調増加であることが従う． □

補題 2.2.5 ([6], Lemma 3.2)**.** I_λ の Brooks パラメーターは，λ に関して狭義単調増加である．

証明．$\theta \mapsto \beta_\theta$ が狭義単調増加であることを示す．(2.4) よりこれは，任意の $\theta, \theta', \theta < \theta'$ に対してある $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，$S^{\theta}_{k_0} \neq S^{\theta'}_{k_0}$ が成り立つことを示せばよい．

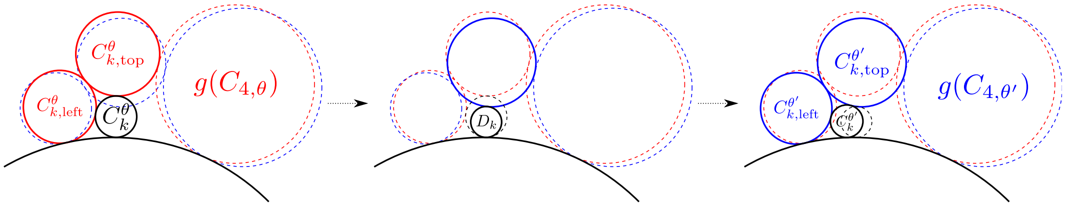

図 16: 帰納法: $S^{\theta}_{k} = 1$ の場合.

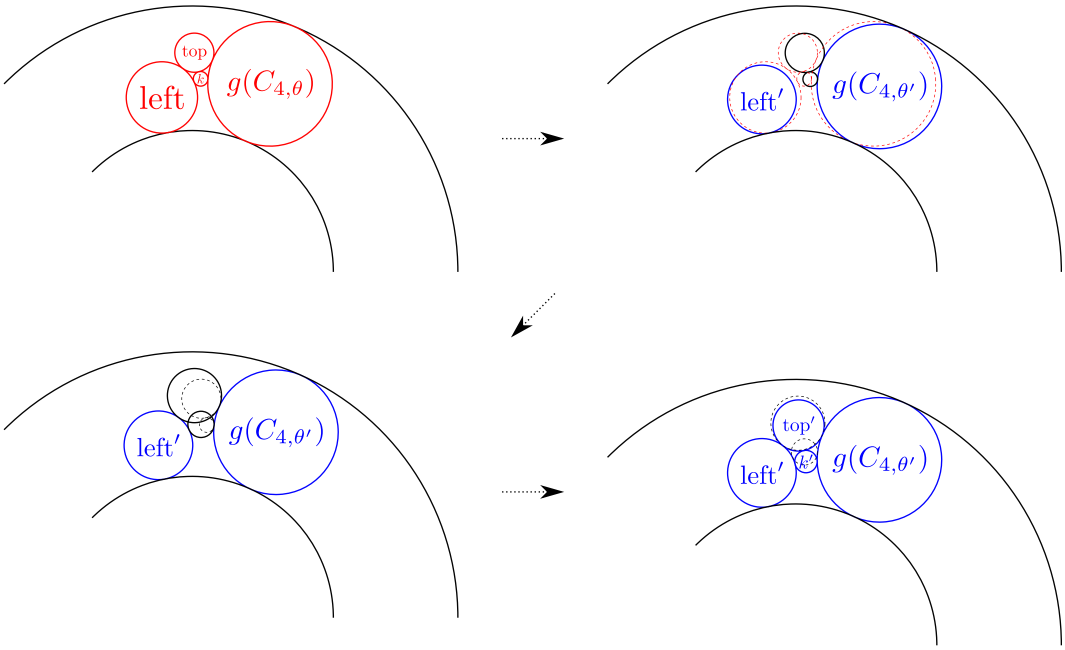

図 17: 帰納法: $S^{\theta}_{k} = -1$ の場合.

β_θ が有理数のとき.

$$\beta_\theta = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{\ddots \quad \vdots \atop n_{N-1} + \cfrac{1}{n_N}}}$$

に対して $k := n_1 + \cdots + n_N$ とする. このとき,

$$\begin{gathered} S^{\theta}_{1} = S^{\theta'}_{1} \\ \vdots \\ S^{\theta}_{k-1} = S^{\theta'}_{k-1} \end{gathered}$$

が成立すれば $S^{\theta}_{k} \neq S^{\theta'}_{k}$ となることを示せば十分である. 実際, β_θ が有理数より $S^{\theta}_{k} = 0$ であるが, これは上の補題の (IV) の議論に帰着される. よって β_θ が有理数ならば $\beta_\theta < \beta_{\theta'}$ が従う.

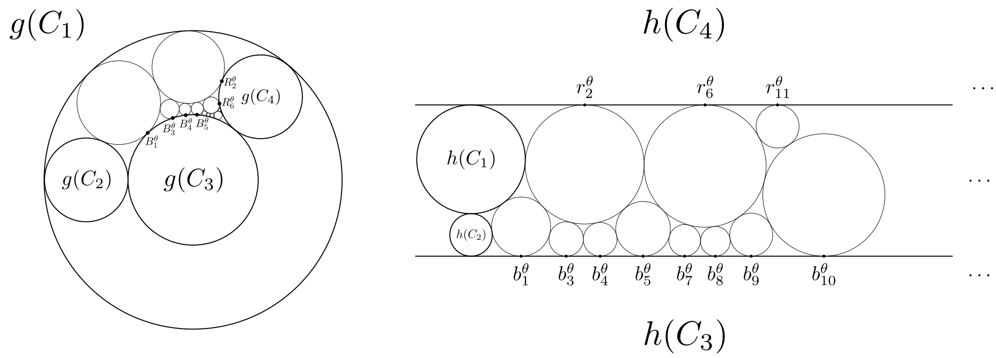

図 18: $h(C_1), h(C_2), h(C_3), h(C_4)$

β_θ が無理数のとき. $S_{k_0}^\theta \neq S_{k_0}^{\theta'}$ を満たすような k_0 が存在しない, すなわち任意の k に対して $S_k^\theta = S_k^{\theta'}$ が成立すると仮定する. このとき, 次が成立することを示す.

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ S_k^\theta=1}} B_k^\theta = \theta \tag{2.5}$$

そうすれば $B_k^\theta \to \theta, B_k^{\theta'} \to \theta'$ と分かるが, これは $\theta < \theta'$ 及び上の補題で示した $B_k^\theta > B_k^{\theta'}$ に反する.

適当な一次分数変換 h を取ることで,

$$\overline{h(C_2)} \cap \overline{h(C_3)} = 0$$
$$h(C_3) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$$
$$h(C_4) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 1\}$$

であるとしてよい (図 18). このとき, 4-隙間 I_λ は実軸正の方向に無限に続く帯の形をしており, 帯の下底に接する円は水平, 上底に接する円は垂直な円である. また, 水平な円 C_k^θ と下底との接点を b_k^θ, 垂直な円 C_k^θ と上底との接点を r_k^θ とすれば, (2.5) は

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ S_k^\theta=1}} b_k^\theta = \infty \tag{2.6}$$

と同値である. 以下ではこれを示す.

無理数 β_θ を定める無限列 $\{n_N\}_{n\in\mathbb{N}}$ を取る. これに対して 2 つの円 $C_{n_1}^\theta, C_{n_1+1}^\theta$ を考えると, これらは互いに接し, $C_{n_1}^\theta$ は帯の下底に, $C_{n_1+1}^\theta$ は帯の上底に接している. よって少なくとも一方の半径は $1/4$ 以上より, これらの面積の和は $\pi/16$ 以上である. 同様に, $C_{n_1+n_2+n_3}^\theta, C_{n_1+n_2+n_3+1}^\theta$ を考えると, それぞれは下底, 上底に接し, これらの面積の和は $\pi/16$ 以上である. 以下同様に 2 つの円

$$C_{n_1+\cdots+n_{2N+1}}^\theta, \quad C_{n_1+\cdots+n_{2N+1}+1}^\theta \qquad (N \in \mathbb{N})$$

の面積の和は $\pi/16$ 以上なので,

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^\theta\right| &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |C_n^\theta| \\ &\geq \sum_{N\in\mathbb{N}} (|C^\theta_{n_1+\cdots+n_{2N+1}}| + |C^\theta_{n_1+\cdots+n_{2N+1}+1}|) \\ &= \sum_{N\in\mathbb{N}} \frac{\pi}{16} = \infty\end{aligned}$$

これより $\{C_n^\theta\}_{n\in\mathbb{N}}$ は帯内の非有界領域であることが分かるので, 接点の列 $\{b_k^\theta\}_{k\in\mathbb{N}, S_k^\theta=1}$ も非有界と分かる. 単調増加性と合わせて (2.6) を得る. □

以上 3 つの補題により, $\lambda \in (\lambda_0, \infty)$ に Brooks パラーメーターを対応させる対応 $\beta = \beta(\lambda)$ は, 像への 1 対 1 対応を定めることがいえた.

4-隙間を定める 4 つの円 C_1, C_2, C_3, C_4 によって得られる双曲四角形の合同類は, C_1, C_2, C_3 の半径 R_1, R_2, R_3, 双曲四角形の C_2 における内角 α, C_2 と C_4 の中心間距離 λ の 5 つによって定まる. 更に上の定理より λ と Brooks パラメーター β の間には像への 1 対 1 対応が定まる. よってこのような双曲四角形を, 次の記号であらわす.

$$Q = Q(R_1, R_2, R_3, \alpha, \beta) \tag{2.7}$$

ここで, R_1, R_2, R_3 及び α を固定して β のみを動かす場合を考える. 集合 B を次で定義する.

$$B := \{\beta \in \mathbb{R}_{>0} \mid Q(R_1, R_2, R_3, \alpha, \beta) \text{ は 4-隙間を定める } \}$$

λ の定義域が開集合なので, B も開集合である.

定理 2.2.6 ([4], Lemma 3.1)**.** 任意の $\beta \in B$ 及び任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\beta_0 \in B$ が存在して, 以下が成立する.

(i) $|\beta_0 - \beta| < \varepsilon$.

(ii) β によって定まる C_4 の半径を $R_4(\beta)$ としたとき, $0 < R_4(\beta_0) - R_4(\beta) < \varepsilon$.

(iii) β_0 は有理数. すなわち, 隙間に円を追加することで有限個の 3-隙間に分けることができる.

証明. (i) 及び (iii) は $\lambda \mapsto \beta$ が連続かつ狭義単調増加より分かる. (ii) については, R_4 が λ に関して連続かつ極小値をもつことより分かる. □

この節の最後に, 定理2.1.5 と同様の定理が, 四角形に対しても成り立つことを示す.

4-隙間を成す円 C_1, C_2, C_3, C_4 から定まる四角形 Q を任意に取る. Q には内部を通る対角線が少なくとも 1 つ存在し, それによって Q を 2 つの三角形 T_1, T_2 に分けら

れる. これらに対して各辺を$\zeta \in (0,1)$倍した三角形$\zeta T_1, \zeta T_2$を考え, 再び対角線でこれらを貼り合わせたものをζQと書く. 対角線が2本取れる場合, ζQは対角線の選び方に依存することに注意する.

ζQは半径がζ倍された円$\zeta C_1, \zeta C_2, \zeta C_3, \zeta C_4$を互いに接するように配置して中心を結ぶことで実現することができる. このとき, ζC_1とζC_3, あるいはζC_2とζC_4が共通部分もつ場合がある. しかし, $\zeta \in (0,1)$を十分1に近く取ることで, これらは共通部分をもたないようにできる. このζQに関して次の定理が成り立つ.

定理 2.2.7 ([4], Lemma 3.2)**.** QをC_1, C_2, C_3, C_4から定まる四角形とする. このときある$\zeta_0 \in (0,1)$が存在して, 任意の$\zeta \in (\zeta_0, 1)$に対して$\zeta C_1, \zeta C_2, \zeta C_3, \zeta C_4$から定まる四角形$\zeta Q$が存在し, 更に$\zeta Q$の4つの角はそれぞれ対応する$Q$の4つの角よりも真に大きい. 更に$\zeta \to 1$としたとき, ζQの4つの角はそれぞれQの対応するものに収束する.

証明. ζQが存在することは上で示した通り. 角に関する主張は定理2.1.5より従う. □

3 閉リーマン面の場合

Sを双曲型リーマン面とし, Sには普遍被覆から定まる距離ρが入っているとする.

定義. (1) 領域$C \subset S$が**円**であるとは, 単連結かつ境界∂Cが$\mathbb{S}^1$と同相であって, ある$p_0 \in S$及び$r > 0$に対して

$$C = U(p_0, r) := \{p \in S \mid \rho(p, p_0) < r\}$$

と書けることをいう. また, S内の円の集合$\mathcal{C}$がSの**circle packing**であるとは, 任意の$C_i, C_j \in \mathcal{C}, C_i \neq C_j$に対して$C_i \cap C_j = \emptyset$かつ$|\overline{C}_i \cap \overline{C}_j| \leq 1$が成立し, 更に任意の$C_i \in \mathcal{C}$に対して

$$\left|\left\{C \in \mathcal{C} \;\middle|\; |\overline{C} \cap \overline{C}_i| = 1\right\}\right| < \infty$$

が成立することをいう.

(2) $k \in \mathbb{N}, k \geq 3$について, 円$C_1, C_2, \cdots, C_k, C_{k+1} = C_1$が**閉円鎖**であるとは, 次が成立することをいう.

$$|\overline{C}_i \cap \overline{C}_j| = \begin{cases} 1 & (i = 1, 2, \cdots, k, \;\; j = i+1) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

また, 閉円鎖$C_1, \cdots, C_k$に対して,

$$S \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{k} \overline{C}_i \right)$$

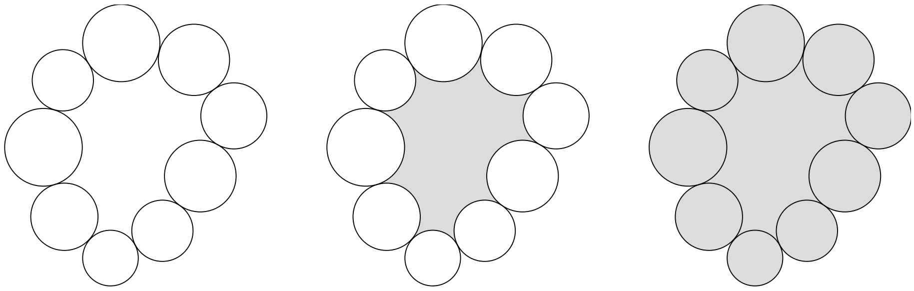

図 19: 閉円鎖 (左), k-隙間 (中央), $D(C_1,\cdots,C_k)$(右).

の相対コンパクトかつ単連結な連結成分を **k-隙間**という. 更に, k-隙間を成す閉円鎖 $C_1,\cdots,C_k$ に対して,

$$D(C_1,\cdots,C_k) := \mathrm{int}\left[\overline{C}_1 \cup \cdots \cup \overline{C}_n \cup (k\text{-隙間})\right]$$

とする. ただし, 集合 A に対して $\mathrm{int}(A)$ は A の内部を表す (図 19).

(3) circle packing $\mathcal{C}$ が S を**覆う**とは,

$$S\setminus\left(\bigcup_{C\in\mathcal{C}}\overline{C}\right)$$

が 3-隙間のみから成ることをいう.

3.1 節では, リーマン面の三角形分割と circle packing の関係について考察する. リーマン面を覆う circle packing が任意に与えられたとき, そこから重み付き三角形分割が自然に定まる. 一方で, 逆に重み付き三角形分割が与えられたとき, それを双曲三角形の張り合わせとして実現するような双曲曲面が定まる. そこで閉リーマン面の場合に, 三角形分割に対して特異点をもたない双曲曲面を実現するような重みが存在するための十分条件を与える.

3.2 節では, 種数 $g(\geq 2)$ の閉リーマン面のタイヒミュラー空間において circle packing point 全体が稠密に存在することを示す. ただし, これらの用語は以下で定義される.

定義. R をリーマン面とする.

(1) $K \geq 1$ に対して, 向きを保つ同相写像 $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ が ***K*-擬等角写像**であるとは, 次の 2 条件を満たすことをいう.

(i) 任意の長方形 $R=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{H}$ 及び a.e. $y\in[c,d]$ に対して, $f(\cdot,y):[a,b]\to\mathbb{R}$ は絶対連続. 同様に, a.e. $x\in[a,b]$ に対して $f(x,\cdot):[c,d]\to\mathbb{R}$ は絶対連続.

(ii) a.e.$z \in \mathbb{H}$ に対して次が成立する.

$$|\partial_{\bar{z}} f| \leq \frac{K-1}{K+1} |\partial_z f| \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{|\partial_z f| + |\partial_{\bar{z}} f|}{|\partial_z f| - |\partial_{\bar{z}} f|} \leq K$$

また, 各局所座標において K-擬等角であるようなリーマン面間の同相写像を, $\boldsymbol{K}$**-擬等角写像**という. 更に, f が K-擬等角であるような K の最小値を K_f と書く.

(2) R に対して, 擬等角写像 $f : R \to S$ の組を (S, f) と書く. また, 2 つの組 $(S_1, f_1), (S_2, f_2)$ について,

$$(S_1, f_1) \sim (S_2, f_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists g \simeq f_2 \circ f_1^{-1} : S_1 \to S_2 : \text{等角}$$

とする. これらに対して R の**タイヒミュラー空間** $T(R)$ を

$$T(R) := \{ (S, f) \mid f : R \to S : \text{擬等角写像} \} / \sim$$

によって定義する.

(3) 次で定義されるタイヒミュラー空間上の距離 d を, **タイヒミュラー距離**という.

$$d([S_1, f_1], [S_2, f_2]) := \inf_{\substack{g: S_1 \to S_2: \text{擬等角} \\ g \simeq f_2 \circ f_1^{-1}}} \log K_g$$

定義. タイヒミュラー空間の 1 点 $[S, f] \in T(R)$ が **circle packing point** であるとは, $[S, f]$ の代表元としてある circle packing で覆われるリーマン面が取れることをいう.

このとき, 主張は次と同値である; 任意の閉リーマン面 S 及び任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある circle packing で覆われるリーマン面 $\hat{S}$ 及び $(1 + \varepsilon)$-擬等角写像 $f : S \to \hat{S}$ が存在する. また, 1-擬等角写像は等角写像であり, その意味でこれは, 等角にいくらでも近い擬等角写像が存在する, と言い換えることができる.

3.1 三角形分割と circle packing

双曲型閉リーマン面 S には, 頂点の集合 V, 辺の集合 E, 面の集合 F から成る三角形分割 K が与えられているとする. K に対して頂点 V 上の関数 $R : V \to \mathbb{R}_{>0}$ が与えられているとき, (K, R) を重み付き三角形分割という.

S を覆う circle packing $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i\in I}$ が与えられているとき, S の三角形分割 $K(\mathcal{C})$ として次のようなものが定まる.

$$V(\mathcal{C}) := \{p_i \in S \mid p_i \text{ は } C_i \in \mathcal{C} \text{ の中心}.i \in I\}$$

$$E(\mathcal{C}) := \left\{\alpha_{ij} \subset S \;\middle|\; \begin{array}{c} p_i \text{ から } p_j \text{ への測地線} \\ i,j \in I,\ \ i \neq j,\ \ \overline{C}_i \cap \overline{C}_j \neq \emptyset \end{array}\right\}$$

$$F(\mathcal{C}) := \left\{\Delta_{ijk} \subset S \;\middle|\; \begin{array}{c} p_i, p_j, p_k \text{ を頂点とする双曲三角形} \\ i,j,k \in I : \text{相異なる} \\ C_i, C_j, C_k \text{ は 3-隙間を成す} \end{array}\right\}$$

また, 各頂点に対して C_i の半径 R_i を対応させることで, 重み付き三角形分割

$$(K(\mathcal{C}), \{R_i\}_{i\in I})$$

が自然に定義される.

今, 重み付き三角形分割 (K,R) が与えられているとする. $v_i, v_j, v_k \in V$ からなる面 f について,

$$T_R(f) := T(R(v_i), R(v_j), R(v_k))$$

とする. すなわち $T_R(f)$ は, 半径が $R(v_i), R(v_j), R(v_k)$ であるような 3 つの円から定まる双曲三角形である (命題 2.1.1 参照). また, 頂点 v を含む面 f に対して

$$\angle_R(v,f) := (T(f(R)) \text{ の } v \text{ に対応する内角の大きさ})$$

とし, 更に任意の頂点 v に対して

$$\theta_R(v) := \sum_{f\in F, v\in f} \angle_R(v,f)$$

で定義する.

定義. 重み付き三角形分割 (K,R) が **subpacking** であるとは, 任意の $v \in V$ に対して $\theta_R(v) \geq 2\pi$ が成立することをいう. また, (K,R) が **packing** であるとは, 任意の $v \in V$ に対して $\theta_R(v) = 2\pi$ が成立することをいう.

重み付き三角形分割 (K,R) が与えられているとき, 双曲三角形 $T_R(f)$ を K によって貼り合わせたることで, 双曲曲面を構成することができる. (K,R) が packing ならば, 各頂点において貼り合わせられた角の和が 2π なので, この双曲曲面は特異点をもたない. 更に S が閉リーマン面の場合には双曲曲面も完備になり, これによって新たなリーマン面 $\hat{S}$ が定まる. $\hat{S}$ と S は一般には一致しないことに注意する.

$\mathcal{C}$ が S を覆う circle packing を定めるとき, $\mathcal{C}$ から定まる重み付き三角形分割は packing である. 逆に, packing (K,R) 与えられたとき, それを実現するようなリーマン面及び R を半径とするような circle packing が定まる.

補題 3.1.1. R_1, R_2 が K の subpacking を定めるとき, $R := \max\{R_1, R_2\}$ も K の subpacking を定める.

証明. $v \in V$ を任意に固定し, $R_1(v) \geq R_2(v)$ であるとする. このとき V 上で

$$R(v) = R_1(V), \qquad R(w) \geq R_1(w) \quad (w \in V, w \neq v)$$

が成り立つ. よって v を頂点とする任意の面 f について, 定理 2.1.3 の (2) より

$$\angle_R(v, f) \geq \angle_{R_1}(v, f)$$

が成り立つため

$$\theta_R(v) \geq \theta_{R_1}(v) \geq 2\pi$$

が従う. $R_1(v) \leq R_2(v)$ であるような v についても同様. よって R は K の subpacking を定める. $\square$

定理 3.1.2 ([4], Lemma 4.2)**.** S を閉リーマン面とし, K を S の三角形分割とする. このとき

$$\mathcal{R} := \{R : V \to \mathbb{R}_{>0} \mid (K, R) \text{ は subpacking}\}$$

について $\mathcal{R} \neq \emptyset$ が成立すれば,

$$\widetilde{R}(v) := \sup_{R \in \mathcal{R}} R(v)$$

に対して $(K, \widetilde{R})$ は packing を定める. $(K, \widetilde{R})$ を K の **maximal packing** という.

証明. V 上で $\widetilde{R} < \infty$ が成り立つ. 実際, $\widetilde{R}(v_0) = \infty$ であるような v_0 が存在すれば, $R_n(v_0) \to \infty$ を満たすような $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ が取れる. このとき $v_0 \in f$ を満たすような $f \in F$ について, 定理 2.1.3 の (1) より $\angle_{R_n}(v_0, f) \to 0$ が成立する. これと三角形分割の局所有限性を合わせて $\theta_{R_n}(v_0) \to 0$ が分かるが, これは $\theta_{R_n}(v_0) \geq 2\pi$ に反する. よって $\widetilde{R}(v_0) = \infty$ を満たすような v_0 は存在しないことが分かる.

$\widetilde{R}$ は subpacking である. 実際 $v_1 \in V$ を任意に固定する. $\widetilde{R}(v_1) = \sup R(v_1)$ より, $R_n(v_1) \to \widetilde{R}(v_1)$ を満たすような $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ が存在する. 補題より, $R_1, \cdots, R_n$ の max を改めて R_n と書くことで, $R_n(v_1) \to \widetilde{R}(v_1)$ かつ R_n は V 上で $n \in \mathbb{N}$ に関して単調増加であるとしてよい. 更に上の議論より各 $v \in V$ において $R_n(v)$ は上に有界なので,

$$\hat{R}(v) := \lim_{n\to\infty} R_n(v) : V \to \mathbb{R}_{>0}$$

を考えることができる．任意の $v \in V$ に対して

$$
\begin{aligned}
\theta_{\hat{R}}(v) &= \sum_{v \in f} \angle_{\hat{R}}(v, f) \\
&= \sum_{v \in f} \lim_{n \to \infty} \angle_{R_n}(v, f) \\
&= \lim_{n \to \infty} \sum_{v \in f} \angle_{R_n}(v, f) \\
&= \lim_{n \to \infty} \theta_{R_n}(v) \geq 2\pi
\end{aligned}
$$

すなわち $\hat{R} \in \mathcal{R}$ が成立する．$\hat{R}$ の構成より

$$
\widetilde{R}(v_1) = \hat{R}(v_1), \qquad \widetilde{R}(v) \geq \hat{R}(v) \quad (v \in V, v \neq v_1)
$$

が成立するので, 再び定理 2.1.3 の (2) より $\theta_{\widetilde{R}}(v_1) \geq 2\pi$ であることが分かる．$v_1 \in V$ は任意であったので, $\widetilde{R} \in \mathcal{R}$ が従う．

$\widetilde{R}$ は packing である．実際そうでないと仮定すれば, ある $v_2 \in V$ に関して $\theta_{\widetilde{R}}(v_2) > 2\pi$ が成立する．このとき定理 2.1.3 の (1) より, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して

$$
\widetilde{R}_0(v) := \begin{cases} \widetilde{R}(v_2) + \varepsilon & (v = v_2) \\ \widetilde{R}(v) & (v \in V \backslash \{v_2\}) \end{cases} : V \to \mathbb{R}_{>0}
$$

は $\theta_{\widetilde{R}_0}(v_2) > 2\pi$ を満たす．$v \in V \backslash \{v_2\}$ においては $\theta_{\widetilde{R}_0}(v) \geq \theta_{\widetilde{R}}(v) \geq 2\pi$ が成り立つことが分かるので, $\widetilde{R}_0 \in \mathcal{R}$ が成立する．しかしこれは $\widetilde{R}$ の極大性に反するので, $\widetilde{R}$ が packing であることが従う． □

3.2 閉リーマン面のタイヒミュラー空間における circle packing point

示す主張は次の通りである; 種数 $g(\geq 2)$ の閉リーマン面 S を任意に取ったとき, ある circle packing で覆われるリーマン面 $\hat{S}$ 及びいくらでも等角に近い擬等角写像 $f : S \to \hat{S}$ が存在する．なお, 証明は [4] の Section 5 を参照している．

まず, S の circle packing $\mathcal{C}$ として, 隙間が 3-隙間と 4-隙間のみであるようなものを取る．このような circle packing の存在は, $n(\geq 5)$-隙間が任意に与えられたとき, 連続しない 3 つの円に接するように円を追加できることから分かる．

$\mathcal{C}$ から定まる S の多角形分割を $L(\mathcal{C})$ とする．また, $C_i, C_j C_k \in \mathcal{C}$ によって定まる三角形を $\langle C_i, C_j, C_k \rangle \in L(\mathcal{C})$ と書く．四角形についても同様.

$L(\mathcal{C})$ に四角形が含まれない場合, $L(\mathcal{C})$ は S の三角形分割であり, すなわち $\mathcal{C}$ は S を覆っている．この場合には $\hat{S} = S$ とすればよい．

$L(\mathcal{C})$ が四角形を含む場合．$L(\mathcal{C})$ は有限集合なので, 四角形が 1 つの場合のみを示せば十分である．よって以下では, 唯 1 つの四角形 $Q := \langle C_1, C_2, C_3, C_4 \rangle \in L(\mathcal{C})$ が存在する場合を考える．

今, $\mathcal{C} = \{C_i = U(p_i, R_i)\}_{i=1}^m (m > 4)$ と書けているとする. このとき, Q の C_2 に対応する内角の大きさを α とし, C_1, C_2, C_3, C_4 によって定まる 4-隙間の Brooks パラメーターを β とすれば, Q の双曲構造は (2.7) の記号を用いて

$$Q = Q(R_1, R_2, R_3, \alpha, \beta)$$

と書ける. また, Q 以外の面 (すなわち三角形) の双曲構造は, 各頂点の半径 R_i によって定まる. よって S の双曲構造は, 次で一意的に決定されている.

$$(L(\mathcal{C}), R_1, \cdots, R_m, \alpha, \beta) \tag{3.8}$$

すなわち S は, $R_1, \cdots, R_m$ および α, β によって決定される双曲三角形, 四角形を, $L(\mathcal{C})$ の組合せによってはり合わせることで得られる双曲曲面である.

定理 2.2.7 より, Q 及び Q の内部を通る対角線を 1 つ固定したときある $\zeta_0 \in (0, 1)$ が存在して, 任意の $\zeta \in (\zeta_0, 1)$ に対して四角形 ζQ が定まる. ζQ の C_2 に対応する内角の大きさを $\alpha(\zeta)$, Brooks パラメーターを $\beta(\zeta)$ とすれば,

$$\zeta Q = Q(\zeta R_1, \zeta R_2, \zeta R_3, \alpha(\zeta), \beta(\zeta))$$

と書ける.

ここで, 任意の $\zeta \in (\zeta_0, 1)$ に対して, 次で決定される双曲曲面を考える.

$$(L(\mathcal{C}), \zeta R_1, \cdots, \zeta R_m, \alpha(\zeta), \beta(\zeta)) \tag{3.9}$$

すなわち, ζR_i によって定まる三角形及び四角形 ζQ を, $L(\mathcal{C})$ の組合せに従って貼り合わせた曲面である.

定理 2.1.5 及び定理 2.2.7 より, 各三角形, 四角形の内角はもともとのものより真に大きい. また, S の各頂点における内角の和は 2π であった. よって (3.9) によって定まる双曲曲面は, 各頂点で内角の和が 2π を超える特異点をもつ.

また, 定理 2.2.6 より, 次を満たすような β^ζ 及び R_4^ζ が取れた.

(i) $|\beta^\zeta - \beta(\zeta)| < (1 - \zeta)R_4/2$.

(ii) $0 < R_4^\zeta - \zeta R_4 < (1 - \zeta)R_4/2$.

(iii) β^ζ は有理数である.

これによって得られる双曲曲面

$$(L(\mathcal{C}), \zeta R_1, \cdots, \zeta R_3, R_4^\zeta, \zeta R_5, \cdots, \zeta R_m, \alpha(\zeta), \beta^\zeta) \tag{3.10}$$

を考える. ζ_0 を十分 1 に近く取っておくことで, 条件 (ii) より R_4^ζ と ζR_4 の差は十分小さくなるので, 各頂点における内角の和は 2π より真に大きいままであるとしてよい. 更に, これによって定まる 4-隙間 $Q(\zeta R_1, \zeta R_2, \zeta R_3, \alpha(\zeta), \beta^\zeta)$ の Brooks パラメー

ター β^ζ は有理数なので, 定理 2.2.2 よりこの隙間に有限個の円を追加することで 3-隙間に分けられる.

それらの円を $C_i = U(p_i, R_i)(i = m+1, \cdots, m+q)$ とし, $L(\mathcal{C})$ に $\{C_i\}_{i=m+1}^{m+q}$ を加えることで得られる $L(\mathcal{C})$ の細分三角形分割を K とする. このとき双曲曲面 (3.10) は, 次のように表すこともできる.

$$(K, \zeta R_1, \cdots, \zeta R_3, R_4^\zeta, \zeta R_5, \cdots, \zeta R_m, R_{m+1}, \cdots, R_{m+q}) \tag{3.11}$$

K の各頂点 v_i における内角の和について. $1 \leq i \leq m$ ならば, これまでの議論より角の和は 2π より真に大きい. $m+1 \leq i \leq m+q$ ならば, v_i は四角形を分割することによって得られた頂点なので, 角の和は 2π に一致する. よって (3.11) は subpacking を定めるので, 定理 3.1.2 より K には maximal packing が存在する.

K の maximal packing を

$$(K, \hat{R}_1, \cdots, \hat{R}_{m+q}) \tag{3.12}$$

とし, これを実現するリーマン面を $\hat{S}$, circle packing を $\hat{\mathcal{C}}$ と書く. これらは全て ζ に依存していることに注意する.

以下では, $\zeta \to 1$ としたとき $\hat{S}$ の双曲構造が S の双曲構造に十分近くなることを示す.

命題 3.2.1. 任意の $i = 1, \cdots, m$ に対して, $\zeta \to 1$ としたとき $\hat{R}_i = \hat{R}_i(\zeta) \to R_i$ が成立する.

証明. $\varepsilon > 0$ を任意に固定する. maximal packing の定義より各 i について $\zeta R_i \leq \hat{R}_i$ が成り立つので,

$$R_i - \hat{R}_i \leq R_i - \zeta R_i = (1-\zeta) R_i$$

よって $\zeta \to 1$ としたとき $R_i - \hat{R}_i < \varepsilon$ が成り立つ. 以下では, $\hat{R}_i - R_i < \varepsilon$ が成り立つことを示す.

各 $\zeta \in (\zeta_0, 1)$ に対して (3.11) で定まる K の subpacking を r_ζ とする. すなわち

$$r_\zeta(i) := \begin{cases} \zeta R_i & (i \in 1, \cdots, m, \ \ i \neq 4) \\ R_4^\zeta & (i = 4) \\ R_i & (i = m+1, \cdots, m+q) \end{cases}$$

また, $A(\zeta)$ を (3.10) で定まる双曲曲面の面積, すなわち

$$A(\zeta) := \sum_{\langle C_i, C_j, C_k \rangle \in L(\mathcal{C})} |T(r_\zeta(i), r_\zeta(j), r_\zeta(k))| + |Q(\zeta R_1, \zeta R_2, \zeta R_3, \alpha(\zeta), \beta^\zeta)|$$

とする. 定理 2.1.5 及び定理 2.2.7 より, $\zeta \to 1$ としたとき $A(\zeta) \to |S|$ が成立する.

ここで, (3.10) と (3.11) は同じ双曲曲面を表したので,

$$A(\zeta) = \sum_{\langle v_i, v_j, v_k\rangle \in K} |T(r_\zeta(i), r_\zeta(j), r_\zeta(k))|$$

とも書ける. このとき $r_\zeta(i) \le \hat{R}_i$ より $A(\zeta) \le |\hat{S}|$ が成り立つ. 更に S 及び $\hat{S}$ は種数 g の閉リーマン面なので $|S| = |\hat{S}|$ が成立する[*2]ので, 上と合わせて $A(\zeta) \nearrow |\hat{S}| = |S|$ であることが従う.

また, 定数 λ, Λ を

$$\lambda := \min\{\zeta_0 R_1, \cdots, \zeta_0 R_m\}$$
$$\Lambda := \max\{R_1, \cdots, R_m\}$$

と定義すると, $0 < \lambda < \Lambda < \infty$ が成り立っている. 補題 2.1.4 より, λ, Λ 及び ε に対してある定数 $M = M(\varepsilon, \lambda, \Lambda)$ が存在して, 任意の $(a, b, c) \in [\lambda, \Lambda]^3$ に対して

$$|T(a+\varepsilon, b, c)| - |T(a, b, c)| > M \tag{3.13}$$

が成立する.

今, ある $l = 1, \cdots, m$ に対して $\hat{R}_l - R_l \ge \varepsilon$ が成り立つと仮定して矛盾を導く. このような l が存在するとき,

$$\hat{R}_l - R_l = (\hat{R}_l - r_\zeta(l)) + (r_\zeta(l) - R_l)$$

かつ $\zeta \to 1$ としたとき $r_\zeta(l) - R_l \to 0$ なので, $\hat{R}_l - r_\zeta(l) \ge \varepsilon$ が成立している. この l に対して s, t を, $\langle C_l, C_s, C_t\rangle \in L(\mathcal{C})$ を満たすように取る. この l, s, t に対して

$$\begin{aligned}
&|\hat{S}| - A(\zeta) \\
&= \sum_{\langle v_i, v_j, v_k\rangle \in K} |T(\hat{R}_i, \hat{R}_j, \hat{R}_k)| - \sum_{\langle v_i, v_j, v_k\rangle \in K} |T(r_\zeta(i), r_\zeta(j), r_\zeta(k))| \\
&= \sum_{\langle v_i, v_j, v_k\rangle \in K} (|T(\hat{R}_i, \hat{R}_j, \hat{R}_k)| - |T(r_\zeta(i), r_\zeta(j), r_\zeta(k))|) \\
&\ge |T(\hat{R}_l, \hat{R}_s, \hat{R}_t)| - |T(r_\zeta(l), r_\zeta(s), r_\zeta(t))| && (\hat{R}_i \ge r_\zeta(i) \text{ より}) \\
&\ge |T(r_\zeta(l)+\varepsilon, \hat{R}_s, \hat{R}_t)| - |T(r_\zeta(l), r_\zeta(s), r_\zeta(t))| && (\text{背理法の仮定より}) \\
&\ge |T(r_\zeta(l)+\varepsilon, r_\zeta(s), r_\zeta(t))| - |T(r_\zeta(l), r_\zeta(s), r_\zeta(t))| && (\hat{R}_i \ge r_\zeta(i) \text{ より})
\end{aligned}$$

ここで, 各 $i = 1, \cdots, m$ に対して $r_\zeta(i) \in [\lambda, \Lambda]$ が成立する. 実際, $i \neq 4$ ならば明らかであり, $i = 4$ の場合も

$$r_\zeta(4) = R_4^\zeta > \zeta R_4 > \zeta_0 R_4 \ge \lambda$$
$$r_\zeta(4) = R_4^\zeta < \zeta R_4 + \frac{(1-\zeta)R_4}{2} = \frac{(1+\zeta)R_4}{2} < R_4 \le \Lambda$$

---

*2 [1], Theorem 10.4.3. 種数 $g(\ge 2)$ の閉リーマン面の面積は $2\pi(2g-2)$ である.

よって式 (3.13) より, $|\hat{S}| - A(\zeta) > M$ が従う. これは $A(\zeta) \nearrow |\hat{S}|$ に反するため, 矛盾が導かれた. よって $\hat{R}_i - R_i < \varepsilon$ であることが従う.

以上により, $\zeta \to 1$ としたとき, $i = 1, \cdots, m$ について $\hat{R}_i \to R_i$ であることがいえた. $\square$

三角形 $T = \langle C_i, C_j, C_k \rangle \in L(\mathcal{C})$ を任意に固定し, 対応する $\hat{S}$ の三角形を $\hat{T}$ とする. このとき (3.8) 及び (3.12) より

$$T = T(R_i, R_j, R_k), \quad \hat{T} = T(\hat{R}_i, \hat{R}_j, \hat{R}_k)$$

と書ける. このとき ζ を 1 に十分近く取れば, 上の命題より $(\hat{R}_i, \hat{R}_j, \hat{R}_k)$ は (R_i, R_j, R_k) に十分近い. よって定理 2.1.6 を用いることで, 境界上で piecewise linear な擬等角写像 $T \to \hat{T}$ を, 十分等角に近いように取ることができる.

四角形 $Q = \langle C_1, C_2, C_3, C_4 \rangle \in L(\mathcal{C})$ について. $C_1, \cdots, C_4 \in \mathcal{C}$ に対応する円を $\hat{C}_1, \cdots \hat{C}_4 \in \hat{\mathcal{C}}$ としたとき, $\hat{C}_1, \cdots, \hat{C}_4$ は $\hat{S}$ 内の四角形を成す. これを $\hat{Q}$ とする. Q と $\hat{Q}$ の各辺の大きさについては, 上の命題より十分近いことが分かる. よって, 対応する角の大きさが十分近いことを確かめる.

$C_1 \in \mathcal{C}$ に対応する頂点 $v_1 \in L(\mathcal{C})$ について, v_1 に集まる面は, 四角形 Q 及び有限個の三角形である. 更に v_1 に集まる角の和は 2π なので, v_1 における Q の内角は

$$2\pi - (v_1 \text{ に集まる三角形の内角の和})$$

と書ける.

同様に, $\hat{C}_1 \in \hat{\mathcal{C}}$ に対応する頂点を $\hat{v}_1 \in K$ とすれば, $\hat{v}_1$ における $\hat{Q}$ の内角は

$$2\pi - (\hat{v}_1 \text{ に集まる三角形の内角の和})$$

と書ける. $L(\mathcal{C})$ の各三角形は対応する K の三角形と十分近い双曲構造をもつことを示したので, v_1 における Q の内角と $\hat{v}_1$ における $\hat{Q}$ の内角は十分に近いことが分かる.

v_2, v_3, v_4 についても同様のことがいえるので, Q と $\hat{Q}$ の双曲構造は十分に近いことが分かる. このとき Q, $\hat{Q}$ を対角線で三角形に分ければ定理 2.1.6 が適用できるので, 境界上で piecewise linear な擬等角写像 $Q \to \hat{Q}$ を, 十分等角に近いように取ることができる.

以上により, $L(\mathcal{C})$ の各面から K の対応する面へ, 境界上で piecewise linear な擬等角写像を構成できた. これを貼り合わせることで, 擬等角写像 $f : S \to \hat{S}$ が構成できる. $\zeta \to 1$ としたときこの f の歪曲係数はいくらでも小さくできるので, 結論を得る.

4 開リーマン面の場合

定義. $g, n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする. 双曲型リーマン面 S が $\boldsymbol{(g, n, m)}$ **型**であるとは, S が種数 g の閉リーマン面から n 個の点及び m 個の円板を取り除いたリーマン面と擬

等角同値であることをいう. また, ある $g, n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ によって (g, n, m) 型と書けるようなリーマン面を**有限型リーマン面**といい, 有限型でないようなリーマン面を**無限型リーマン面**という.

4.1 節では, 任意の有限型開リーマン面がある circle packing によって覆われるという Williams の証明を記述した. まず cusp とアニュラス以外の部分を覆う circle packing を取り, そこから理想境界に向かって円を加えていく, という方法を取っている.

4.2 節では, 上の議論をパンツ分解可能な無限型リーマン面に拡張している. この場合, あるパンツから初めて隣のパンツ, 隣のパンツ, $\cdots$ と円を加えていくことでリーマン面全体を覆っている. その際, 理想境界への逃げ場を失うようなパンツが出ないように, うまくパンツを広げていく必要がある.

4.3 節では, 一般の無限型リーマン面を覆う circle packing を構成している. 一般にリーマン面はパンツ分解可能ではなく, 測地線が集積することで "半円板" が現れる場合がある. この場合には, パンツ分解可能な部分と半円板に分けて circle packing を構成していく. その際, 半円板のそばには無限個のパンツが存在するため, circle packing の局所有限性に気を遣う必要がある.

4.1 G. B. Williams の方法

定理 4.1.1 ([11], Theorem 1.1)**.** 任意の有限型開リーマン面は, ある circle packing によって覆うことができる.

定理の証明には, 以下の補題を用いる. この補題は定理 2.2.6 の拡張になっている.

補題 4.1.2 ([11], Lemma 3.1)**.** 任意の閉円鎖 $C_1, \cdots, C_k \subset \mathbb{H}$ に対して, 次を満たすような $\mathbb{H}$ の circle packing $\mathcal{C}$ が存在する.

(I) $C_1, \cdots, C_{k-1} \in \mathcal{C}$.

(II) ある $c_1, \cdots, c_l \in \mathcal{C}$ が存在して, $C_1, \cdots, C_{k-1}, c_1, \cdots, c_l$ は閉円鎖を成す.

(III) $D := D(C_1, \cdots, C_k), D' := D(C_1, \cdots, C_{k-1}, c_1, \cdots, c_l)$ としたとき $D \subset D'$ が成立 (図 19 参照).

(IV) 任意の $C \in \mathcal{C}$ に対して $C \subset D'$ が成立.

(V)
$$D' \setminus \left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}} \overline{C} \right)$$
は有限個の 3-隙間の和集合である.

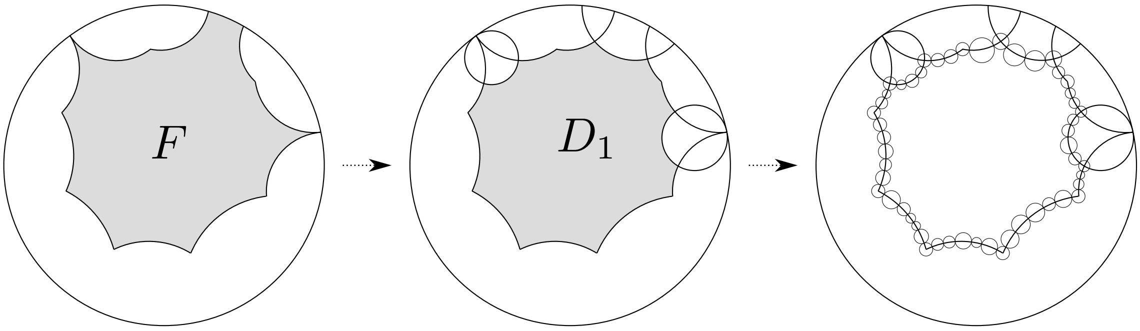

図 20: D_1 を囲む閉円鎖は, S に移したときに circle packing となるように取る. 例えば D_1 において, S で同一視される 2 つの頂点を中心とする円の半径が異なれば, S 上では同心円が現れてしまい, 異なる 2 つの円は内部で交わらないという条件に反する.

定理 4.1.1 の証明. 有限型の開リーマン面 S を任意に固定する. S の基本領域としてディリクレ領域 $F \subset \mathbb{D}$ を取る. S は有限型の開リーマン面なので, F の $\mathbb{C}$ における閉包は, $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ と有限個の連結成分で交わる.

それぞれの連結成分について, 1 点集合ならば horocycle で, そうでないならば測地線で切ることで, F の相対コンパクトな部分集合 D_1 が得られる. これに対して, D_1 の境界上に中心を持つような閉円鎖を D_1 を囲むように取る. ただしこのとき閉円鎖は, S に移すことで circle packing となるように取るものとする (図 20).

S は開リーマン面であったので, この閉円鎖には, $\partial D \backslash \partial F$ を中心とする円が少なくとも 1 つ存在する. その円を C_k とみなして補題 4.1.2 を適用することで, D_1 を覆うような circle packing $\mathcal{C}_1$ が取れる. 以下では, この $\mathcal{C}_1$ に円を加えていくことで S 全体を覆うような circle packing を構成する.

F を切った horocycle を $\delta_i (i \in I)$, 測地線を $\gamma_j (j \in J)$ とする. このとき $F \backslash D_1$ は $|I| + |J| (< \infty)$ 個の連結成分をもつ. 各連結成分について, horocycle で切られる場合と, 測地線で切られる場合に分けて考える.

horocycle で切られる場合. horocycle δ_i によって切られるとする. このとき, δ_i と同じ点で $\partial\mathbb{D}$ に接し, ユークリッド半径が真に小さいような horocycle を考える. ただし, この horocycle は $\mathcal{C}_1$ の各円と交わらないように取るものとする. これにより, δ_i, 新たな horocycle 及び ∂F に囲まれた四角形領域が得られる. これを D_2^i とする.

D_2^i の δ_i に対応する辺は $\mathcal{C}_1$ に含まれる円によって囲まれている. これに, 他の 3 辺を囲むような円を追加して, D_2^i を囲むような閉円鎖を構成する. ただし D_1 の場合と同様に, S に移したときに circle packing となるように取るものとする (図 21).

このときやはり, $\partial D_2^i \backslash (\partial F \cup \delta_i)$ を中心とするような円が存在するため, それを C_k とみなして補題 4.1.2 が適用できる. これにより得られる circle packing を $\mathcal{C}_2^i$ とすれば, $C_1 \cup C_2^i$ は D_2^i を覆っている. 以後帰納的に, ユークリッド半径が $\to 0$ となるよう

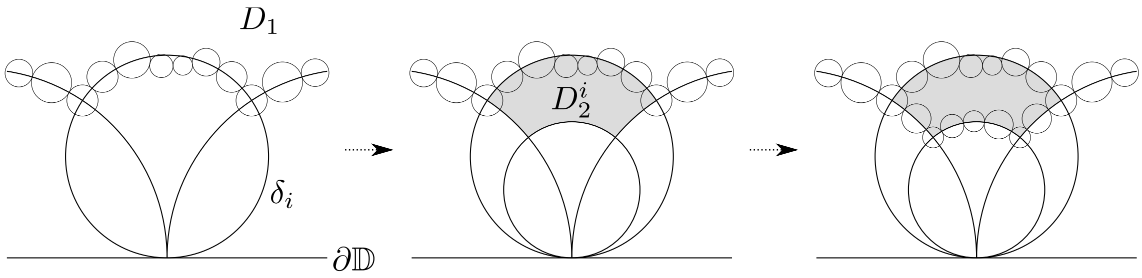

図 21: horocycle で切られる場合

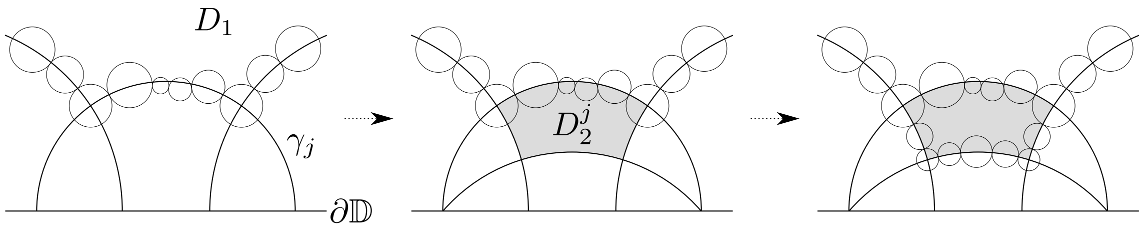

図 22: 測地線で切られる場合

に horocycle を取り, 順に得られる領域を $D_3^i, D_4^i, \cdots$, これらを覆う circle packing を $\mathcal{C}_3^i, \mathcal{C}_4^i, \cdots$ とする. このとき, circle packing $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2^i \cup \mathcal{C}_3^i \cup \cdots$ は δ_i で切られる $F \backslash D_1$ の連結成分を覆っている.

測地線で切られる場合. 測地線 γ_j によって切られるとする. このとき, $\mathbb{D}$ との交点が γ_j と一致するような $\hat{\mathbb{C}}$ 内の円周で, γ_j を境界とする $F \backslash D_1$ の連結成分を通るようなものを考える. ただし, この円周は $\mathcal{C}_1$ の各円と交わらないように取るものとする. これにより, γ_j, 円周及び ∂F に囲まれた四角形領域が得られる. これを D_2^j とする (図 22).

horocycle の場合と同様に, D_2^j を囲む閉円鎖を取り, $\partial D_2^j \backslash (\partial F \cup \gamma_j)$ を中心とするような円を C_k とみなして補題 4.1.2 を適用することで, D_2^j を覆うような circle packing $\mathcal{C}_2^j$ が得られる. これを帰納的に繰り返すことで, γ_j で切られる $F \backslash D_1$ の連結成分を覆う circle packing $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2^j \cup \mathcal{C}_3^j \cup \cdots$ が得られる.

以上の議論を各 $\delta_i (i \in I), \gamma_j (j \in J)$ に対して適用することで, S 全体を覆うような circle packing

$$\mathcal{C}_1 \cup \bigcup_{\substack{k=2,3,\cdots \\ i \in I}} \mathcal{C}_k^i \cup \bigcup_{\substack{k=2,3,\cdots \\ j \in J}} \mathcal{C}_k^j$$

が構成できた. □

4.2 パンツ分解可能な場合

定義. (1) 領域 $P \subset S$ が**双曲的パンツ**, あるいは単に**パンツ**であるとは, P が 3 点抜き球面と同相であって, 3 つの境界成分はそれぞれ単純閉測地線あるいは cusp であることをいう.

(2) 領域 $A \subset S$ が **half annulus** であるとは, ある $\lambda > 1$ に対して A がリーマン面 $\mathbb{H}/\langle z \mapsto \lambda z\rangle$ 内の領域 $\{z \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Re}\, z > 0\}/\langle z \mapsto \lambda z\rangle$ と等長であることをいう.

(3) リーマン面 S が**パンツ分解可能**とは, S 内のある単純閉測地線の族 $\{\gamma_j\}_{j \in J}$ が存在して,

$$S \backslash \left(\bigcup_{j \in J} \gamma_j \right)$$

の任意の連結成分がパンツあるいは half annulus に等長であることをいう.

定理 4.2.1. 無限型リーマン面 S について, ある単純閉曲線の族 Γ によってパンツ分解可能かつ

$$\overline{\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \right)} \backslash \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \right) = \emptyset \tag{4.14}$$

が成立するとき, リーマン面を覆うような circle packing が存在する.

証明. 必要ならば Γ に高々可算個の horocycle を加えることで, S は相対コンパクトなパンツ, half annulus 及び, cusp 近傍に分割されているとする.

パンツ P_1 を任意に固定する. $S \backslash P_1$ を考えると, これは高々3 つの連結成分に分かれる. S は無限型, 特にコンパクトでないので, $S \backslash P_1$ の連結成分のうち少なくとも 1 つはコンパクトでない. コンパクトでない連結成分に含まれる P_1 の境界を $\gamma_1 \in \Gamma$ とおく. また相対コンパクトな領域 $D_1 \subset S$ を

$$D_1 := P_1 \cup \bigcup \{S \backslash P_1 \text{ のコンパクト成分 }\}$$

によって定義する. このとき $S \backslash D_1$ の各連結成分はコンパクトでない.

また, ∂D_1 は γ_1 を含めた高々3 つの Γ の元の和集合で表されるので, D_1 はある有限型リーマン面と同相である. これより定理 4.1.1 の証明で用いた議論が適用できて, D_1 を覆うような circle packing $\mathcal{C}_1$ が構成できる. ただし, 補題 4.1.2 を適用する際には, γ_1 上の円を C_k とみなす.

次に, D_1 と境界を共有するパンツ全体を $\mathcal{P}_2$ とする. D_1 の構成より $|\mathcal{P}_2| \leq 3$ であり, これより $S \backslash (D_1 \cup \bigcup \mathcal{P}_2)$ は高々6 つの連結成分から成る. これに対して相対コンパクト領域 $D_2 \subset S$ を

$$D_2 := D_1 \cup \bigcup \mathcal{P}_2 \cup \bigcup \{S \backslash (D_1 \cup \bigcup \mathcal{P}_2) \text{ のコンパクト成分 }\}$$

によって定義する. このとき $D_1 \subset D_2$ かつ $S \backslash D_2$ の各連結成分はコンパクトでない.

また, ∂D_2 は高々6つの Γ の元の和集合で表させるので, D_1 はある有限型リーマン面と同相である. よって $D_2 \backslash D_1$ の連結成分を $D_2^1, \cdots D_2^{i_2}$ とすれば, これらも相対コンパクトかつそれぞれある有限型リーマン面と同相である.

また, 各 $D_2^i (i = 1, \cdots, i_2)$ について $\partial D_2^i \cap \partial D_2 \neq \emptyset$ が成立する. 実際 $\partial D_2^i \cap \partial D_2 = \emptyset$ ならば $\partial D_2^i \subset \partial D_1$ であり, このとき ∂D_2^i は $S \backslash \overline{D}_1$ の連結成分である. これは $S \backslash D_1$ の各連結成分がコンパクトでないことに反する. よって $\partial D_2^i \cap \partial D_2 \neq \emptyset$ と分かる. 各 $i = 1, \cdots, i_2$ について, ∂D_2^i の成分 $\gamma_2^i \in \Gamma$ を $\gamma_2^i \subset \partial D_2$ を満たすように取る.

ここで各 $i = 1, \cdots, i_2$ について, D_2^i 対して定理 4.1.1 の証明で用いた議論を適用することで D_2^i を覆うような circle packing $\mathcal{C}_2^i$ を得る. ただし, 補題 4.1.2 の C_k にあたる円は γ_2^i 上に中心をもつ円とする. また $\mathcal{C}_2^i$ は, $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2^i$ が circle packing になるように取るものとする. このとき

$$\mathcal{C}_2 := \mathcal{C}_2^1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_2^{i_2}$$

とすれば, $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ は D_2 を覆う circle packing である.

以下帰納的に, 相対コンパクト領域 $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \cdots$ 及びそれぞれを覆うような circle packing $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \cdots$ を取る. これによって得られる S の circle packing $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \cdots$ に, cusp 近傍 (図 21) 及び half annulus(図 22) を覆う circle packing を加えたものを $\mathcal{C}$ とすれば, これが S を覆う circle packing である. これを確かめる.

$\mathcal{C}$ が circle packing であることは, 構成より容易に確かめられる. よって, $\mathcal{C}$ が S を覆っていることを確かめればよい. すなわち, あるパンツから隣のパンツ, 隣のパンツ, $\cdots$ と circle packing を広げていった時に, 全てのパンツに到達するかを確かめればよい. これは, 次の補題を示すことで確かめられる. □

補題 4.2.2. 無限型リーマン面 S は, ある単純閉曲線の族 Γ によってパンツ分解可能かつ式 (4.14) が成立するとする. このとき, 任意のパンツ P, P_0 に対してあるパンツ $P_i (i \in I, |I| < \infty)$ が存在して,

$$\overline{P} \cup \overline{P}_0 \cup \bigcup_{i \in I} \overline{P}_i$$

は連結である.

証明. Γ について, 任意の $\gamma_0 \in \Gamma$ に対してある $\varepsilon > 0$ が存在して,

$$\bigcup_{p \in \gamma_0} U(p, \varepsilon) \cap \bigcup_{\gamma \in \Gamma \backslash \{\gamma_0\}} \gamma = \emptyset \tag{4.15}$$

が成立することを用いる ([7], Proposition 3.3.9).

$x \in P$ 及び $x_0 \in P_0$ を任意に固定する. リーマン面は弧状連結より, x から x_0 への道 α が存在する. α と交わるような Γ の元が有限個ならば, それらを境界とするようなパンツ全体が補題を満たすパンツの集合である.

α と交わる Γ の元が無限個であると仮定する. このとき, 相異なる列 $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Gamma$ 及び $p_n \in \gamma_n$ が存在して, $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \alpha$ が成立する. α は点列コンパクトより, 必要ならば部分列を取ることによって $p_n \to p_0 \in \alpha$ であるとしてよい. ここで p_0 について, $p_0 \notin \bigcup\Gamma$ ならば式 (4.14) に反するので, p_0 を通るような測地線 $\gamma_0 \in \Gamma$ が存在する. 更に式 (4.15) が成立することから, 十分大きい任意の $n \in \mathbb{N}$ に関して $\gamma_n = \gamma_0$ でなければならない. これは, $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が相違なる元から成る列であることに反する. よって α と交わる Γ の元が有限個であることが導かれ, すなわち結論を得る. □

4.3 一般の無限型リーマン面の場合

定理 4.3.1 ([7], Theorem 3.6.2)**.** S を, 単連結でない (無限型とは限らない) リーマン面とする. このとき, ある単純閉測地線の族 Γ が存在して,

$$G := \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma \subset S$$

に対して $S\backslash\overline{G}$ の各連結成分は次のいずれかに等長である.

(1) パンツ

(2) half annulus

(3) $\mathbb{D}$ の部分集合としての $\mathbb{D} \cap \{z \in \mathbb{D} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$. これを**半円板**と呼ぶ.

また, $\overline{G}\backslash G$ の各連結成分は長さ無限の単純測地線であり, ある半円板の境界を成す[*3].

例 4.3.2. $\mathbb{D}$ 内に, 相異なる ∂D 上の点に収束する 2 つの点列があるとし, $\mathbb{D}$ からこの 2 つの点列を取り除いたようなリーマン面 S_0 を考える. このとき S_0 の単純閉測地線の族として図 24 のようなものを取れば, S_0 は無限個のパンツと 2 つの半円板に分けられる.

このようにリーマン面の分解に半円板が登場する場合, あるパンツから始めて 4.2 節のような circle packing の構成をしても, パンツが無限に並んでいるため半円板まで circle packing が到達しない. よって, 半円板を覆う circle packing も同時に構成していく.

定理 4.3.3. 任意の無限型リーマン面は, ある circle packing で覆われる.

証明. 半円板が登場しない場合は既に示したので, 半円板が登場する場合のみを示す. また, 半円板が無限個の場合のみを示す[*4]. すなわち, 無限型リーマン面 S はある単純閉曲線の族 Γ によって分解され, かつ分解には半円板 $\{L^n\}_{n=1}^{\infty}$ が含まれるとす

[*3] これより定理 4.2.1 の条件 (4.14) は本質的ではないことが分かる.

[*4] 半円板が無限個の場合を示せば有限個の場合も即座に従うことが, 証明より分かる.

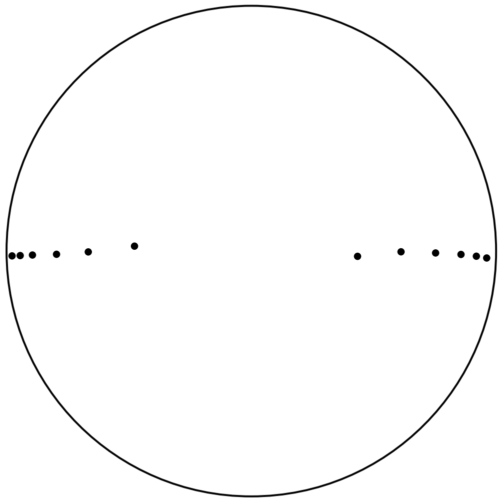

図 23: リーマン面 S_0

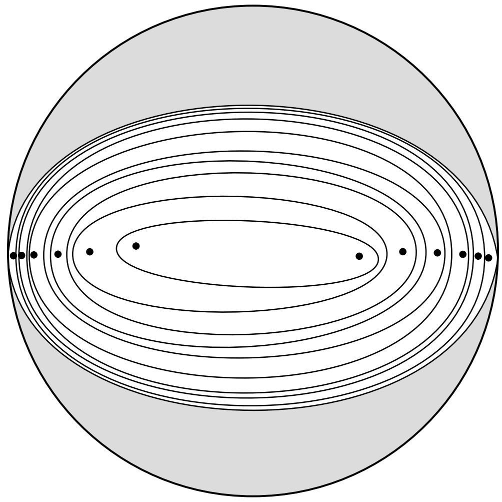

図 24: S_0 の単純閉曲線族. 網掛け部分が半円板.

る. ただし定理 4.2.1 の証明と同様に, 各パンツは相対コンパクトであるとする. これに対して $G := \bigcup \Gamma$ と書く. 各 $n \in \mathbb{N}$ について L^n の境界となる単純測地線を α_n とし, α_n 上の 1 点 p_n を任意に固定しておく. 定理 4.3.1 より $\alpha_n \subset \overline{G} \backslash G$ である.

$\mathcal{C}_1$ の構成. パンツ P_1 を任意に固定し, 定理 4.2.1 の証明と同様に領域 D_1 及び D_1 を覆う circle packing $\mathcal{C}_1$ を構成する.

$\mathcal{C}_2$ の構成. 半円板 L^1 について, $r_1 > 0$ を任意に固定して $L_1^1 \subset L^1$ を次で定義する.

$$L_1^1 := L^1 \cap U(p_1, r_1)$$

そして, ∂L_1^1 を囲む閉円鎖を取る (図 25). このとき α_1 上に中心をもつ各円は無限個の測地線と交わるが, $\mathcal{C}_1$ の元とは交わらないようにする. また, 各円を十分小さく取ることで, 円と交わる測地線はそれぞれ α_1 に平行に近いとしてよい.

この閉円鎖に対して補題 4.1.2 を適用する. ただし, 補題 4.1.2 の C_k として $\partial U(p, r_1)$ 上に中心を持つ円を取るものとする. これによって得られる circle packing を $\mathcal{C}_2'$ とする.

また, $\mathcal{C}_2'$ によって切り取られる測地線分, すなわち

$$G \backslash \left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}_2'} \overline{C} \right)$$

の相対コンパクトな連結成分で, α_1 から最も離れたものを考える. その測地線分上に中心を持つ中心を持つ円を取り, 先程取った閉円鎖と合わせて新たな閉円鎖を構成する (図 26). そして得られたそれぞれの閉円鎖に対して補題 4.1.2 を適用する. ただし, C_k にあたる円は測地線分上にある円を取る. これによって得られた circle packing を $\mathcal{C}_2'$ に加えたものを, $\mathcal{C}_2$ とする.

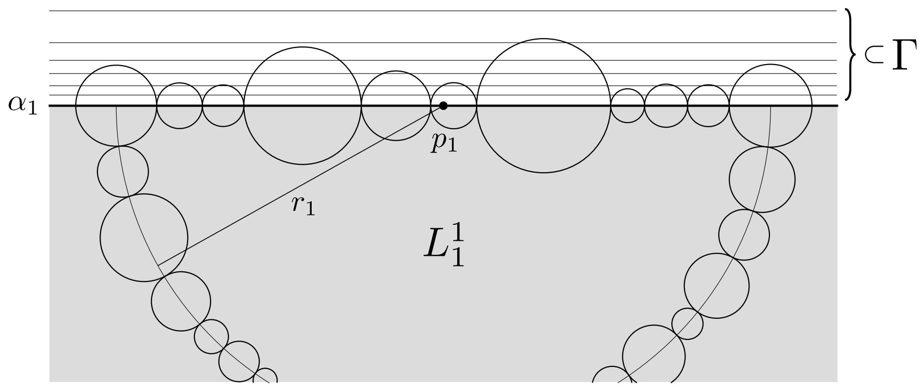

図 25: L_1^1 を囲む閉円鎖

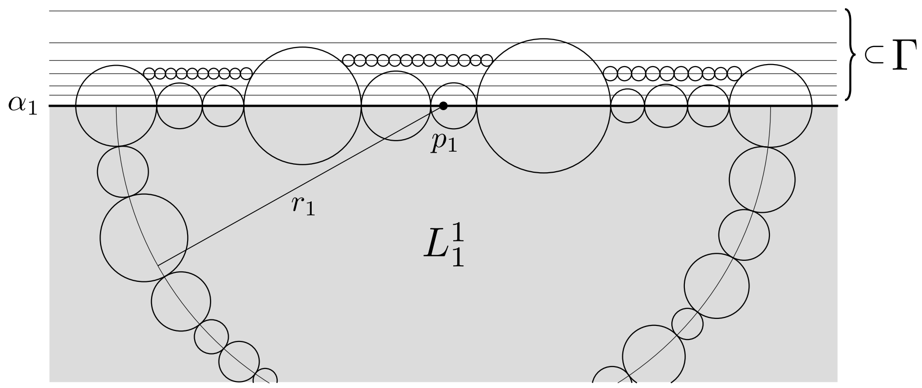

図 26: 最も離れた測地線分に円を追加することで新たな閉円鎖を構成する.

$\mathcal{C}_3$ の構成. 領域 D_1 に対して, 領域 D_2 を定理 4.2.1 の証明と同様に構成する. このとき D_2 は $\mathcal{C}_2$ の元と交わる場合があるが, $\mathcal{C}_2$ は有限集合よりそのような円は高々有限個である (図 27). よって D_2 を普遍被覆に引き戻した多角形 F_2 を考えると, F_2 は有限個の円によっていくつかの連結成分に分かれる.

今, ∂F_2 を囲むように有限個の円を追加することで有限個の閉円鎖を構成する. このとき $\mathcal{C}_2$ の円のみから成るような閉円鎖は存在しないことに注意する. 各閉円鎖に対して補題 4.1.2 を適用することで, D_2 を覆うような circle packing $\mathcal{C}_3$ が得られる. ただし, C_k とみなす円は ∂F_2 上に新たに加えた円とする.

$\mathcal{C}_4$ の構成. 半円板 L^1 について, $r_2 > r_1$ を任意に固定して

$$L_2^1 := L^1 \cap U(p_1, r_2) \backslash U(p_1, r_1)$$

とする. このとき ∂L_2^1 のうち $\partial U(p, r_1)$ に対応する境界は, $\mathcal{C}_2$ によって囲まれている. $\partial U(p, r_1)$ 以外の境界を囲むように円を加えることで閉円鎖を取り, $\partial U(p, r_2)$ 上の円を C_k とみなして補題 4.1.2 を適用する. これによって得られる circle packing に, 図 27 の議論を行うことで得られる circle packing を加えたものを, $\mathcal{C}_4^1$ とする.

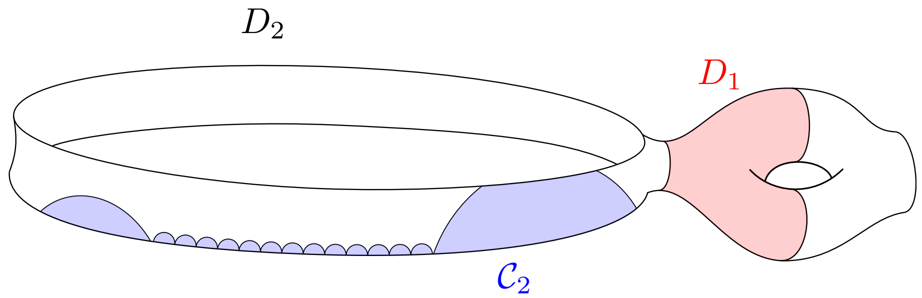

図 27: 領域 D_2. ただし D_1 を覆う circle packing $\mathcal{C}_1$ は省略している.

また, 半円板 L^2 に対して

$$L_1^2 := L^2 \cap U(p_2, r_1)$$

とし, これに対して $\mathcal{C}_2$ と同様の議論を行うことで得られる circle packing を $\mathcal{C}_4^2$ とする. これらに対して $\mathcal{C}_4 := \mathcal{C}_4^1 \cup \mathcal{C}_4^2$ とする.

以下同様に, $\mathcal{C}_{2n-1}$ では定理 4.2.1 の D_n に対応する領域を覆うような circle packing を構成する. $\mathcal{C}_{2n}$ では半円板内の領域 $L_n^1, L_{n-1}^2, \cdots, L_2^{n-1}, L_1^n$ を覆うような circle packing を構成する. ただし

$$L_m^n := \begin{cases} L^n \cap U(p_n, r_1) & (m = 1) \\ L^n \cap U(p_n, r_m) \backslash U(p_n, r_{m-1}) & (m > 1) \end{cases}$$

であり, 半径は n に関して狭義単調増加かつ $r_n \to \infty (n \to \infty)$ となるように取るものとする. 以上により構成した circle packing $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots$ に, half annulus 及び cusp 近傍を覆うような circle packing を加えたもの $\mathcal{C}$ が, S を覆う circle packing である. $\mathcal{C}$ が S を覆っていることは, $\overline{G} \backslash G$ の各連結成分が半円板の境界を成すことから従う. $\square$

参考文献

[1] Alan F. Beardon, *The geometry of discrete groups*, GTM 91, Springer (1983).

[2] Alan F. Beardon and Kenneth Stephenson, *The uniformization theorem for circle packings*, Indiana Univ. Math. J. **39** (1990), 1383-1425.

[3] Christopher J. Bishop, *Quasiconformal mappings of Y-pieces*, Rev. Mat. Iberoamericana **18** (2002), 627-653.

[4] Philip L. Bowers and Kenneth Stephenson, *The set of circle packing points in the Teichmüller space of a surface of finite conformal type is dense*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **111** (1992), 487-513.

[5] Philip L. Bowers and Kenneth Stephenson, *Circle packings in surfaces of finite type: an in situ approach with applications to moduli*, Topology **32** (1993), 157-183.

[6] R. Brooks, *On the deformation theory of classical Schottky groups*, Duke Math. J. **52** (1985), 1009-1024.

[7] John H. Hubbard, *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics*, Teichmüller theory, vol. 1. Matrix Editions, Ithaca, NY (2006).

[8] S. Katok, *Fuchsian groups*, University of Chicago Press (1992).

[9] John Milnor, *Dynamics in one complex variable, 3rd ed.*, Ann. of Math. Stud. **160**, Princeton Univ. Press (2006).

[10] John G. Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic manifolds, 3rd ed.*, GTM 149, Springer (2006).

[11] G. Brock Williams, *Noncompact surfaces are packable*, J. Anal. Math. **90** (2003), 243-255.