接測度および一様測度の性質と Preiss の定理への応用

市ノ瀬 弘祐

A Radon measure μ in Euclidean space is called m-uniform if its measure of the ball, centered at the points on the support of μ, equals to the volume of the m-dimensional ball with the same radius. A Radon measure μ is called a tangent measure to a measure ν at x if the expansion sequence of ν at x converges weakly to μ. The uniform measures and the tangent measures were used to show Preiss' theorem, which states that a measure is rectifiable if its density exists in $(0, \infty)$ at almost everywhere. In this paper, we consider the properties of the uniform measures and the tangent measures, and describe how they are used in the proof of Preiss' theorem.

接測度および一様測度の性質と Preiss の定理への応用

市ノ瀬 弘祐

目次

1 イントロダクション

まず次の用語を定義する．なお，定義は [2] で用いられているものを採用した．

定義 1.1 m, n を $0 \leq m \leq n$ を満たす整数，μ を $\mathbb{R}^n$ 上のラドン測度，E を $\mathbb{R}^n$ の部分集合，x を $\mathbb{R}^n$ 内の点とする．

(1) E が m 次修正可能集合，または単に修正可能集合であるとは，高々可算個のリプシッツ連続写像 $f_i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が存在して，$\mathcal{H}^m(E \setminus \bigcup_i f(\mathbb{R}^m)) = 0$ が成り立つことである．

(2) μ が m 次修正可能測度，または単に修正可能測度であるとは，m 次修正可能集合 E とボレル関数 f が存在して $\mu(A) = \int_{A \cap E} f \, d\mathcal{H}^m$ が任意のボレル集合に対して成り立つことである．

(3) x における μ の上密度，下密度をそれぞれ

$$\theta^{\alpha *}(\mu, x) = \limsup_{r \to 0} \frac{\mu(B_r(x))}{\omega_\alpha r^\alpha},$$
$$\theta^{\alpha}_*(\mu, x) = \liminf_{r \to 0} \frac{\mu(B_r(x))}{\omega_\alpha r^\alpha}$$

で定義する．ただし $\omega_\alpha = \pi^{\alpha/2}(\int_0^\infty s^{\alpha/2} e^{-s}\, ds)^{-1}$ である．特に $\theta^{\alpha *}(\mu, x) = \theta^{\alpha}_*(\mu, x)$ のとき，これを x における μ の α 次密度，または単に密度といい，$\theta^\alpha(\mu, x)$ と表す．

幾何学的測度論の目的の 1 つは，測度や集合が修正可能であることと他のさまざまな条件の関連性を調べることである．たとえば，修正可能集合と概接空間の関係や射影との関係など多岐に渡り，Mattila [3] でさまざまな対象との関係が述べられている．

Preiss は測度の密度に着目して次のような修正可能性との関係を [1] で導いた．

定理 1.2 m は非負整数，μ は $\mathbb{R}^n$ 上のラドン測度であって，μ に関してほとんどすべての $x \in \mathbb{R}^n$ における μ の m 次密度が存在し，$0 < \theta^m(\mu, x) < \infty$ を満たすと仮定する．このとき μ は m 次修正可能測度である．

この定理の逆は比較的容易に示すことができる（たとえば [4] の 1 章で示されていることを用いればよい．）．また，Preiss の定理は一般測度の構造に関わる非常に基本的な定理であり，多くの論文に引用されている（Math Sci Net で 2021 年 2 月 7 日現在で 175 件の引用）．

この定理を示す中で，接測度と一様測度が大きな役割を果たした．本稿では接測度と一様測度の性質を考察し，Preiss の定理への関わりを紹介する．

また本稿は主に [2] を参考にして書いており，そこから引用した命題にはそこでの命題番号を添えている．

2 準備

2.1 位相空間論からの準備

表記 2.1 (1) X をコンパクトハウスドルフ空間とする．このとき $C(X)$ を X 上の実数値連続関数全体の集合と定める．この空間は sup ノルムによりバナッハ空間となる．また $C(X)_{\geq 0}$ を X 上の非負実数値連続関数全体の集合とする．

(2) X を局所コンパクトハウスドルフ空間とする．このとき $C_0(X)$ を X 上の無限遠で消える実数値連続関数全体の集合とする．ただし $f\colon X \to \mathbb{R}$ が無限遠で消えるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して集合 $\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$ がコンパクトとなることをいう．この空間は sup ノルムによりバナッハ空間となる．また $C_0(X)_{\geq 0}$ を X 上の無限遠で消える非負実数値連続関数全体の集合と定める．

(3) X を局所コンパクトハウスドルフ空間とする．このとき $C_c(X)$ をコンパクトな台を持つ X 上の実数値連続関数全体の集合とする．この空間は $C_0(X)$ の中で sup ノルムに関して稠密となる．また $C_c(X)_{\geq 0}$ をコンパクトな台を持つ X 上の非負実数値連続関数全体の集合とする．

定理 2.2（ストーン・ワイエルシュトラスの定理） X を局所コンパクトハウスドルフ空間とし，$A \subset C_0(X)$ を次の 2 つの条件を満たす部分代数とする:

(1) 任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ に対し，$f(x) \neq f(y)$ なる $f \in A$ が存在する．

(2) 任意の $x \in X$ に対し，$f(x) \neq 0$ なる $f \in A$ が存在する．

このとき A は $C_0(X)$ の中で sup ノルムに関して稠密となる．

定理 2.3（ウリゾーンの補題） X を局所コンパクトハウスドルフ空間とし，$A \subset X$ をコンパクト集合，$B \subset X$ を $A \cap B = \emptyset$ なる閉集合とする．このとき，X 上の連続関数 $f\colon X \to [0,1]$ であって，A 上で $f = 1$，B 上で $f = 0$ となるものが存在する．

2.2 測度論からの準備

本稿では外測度のことを単に測度という．また本節で証明を述べていない定理や命題は [2] の 2 章や [4]，[5] を参照している．

特に断らない限り，以下の表記に従う．

表記 2.4
(1) $\mathbb{R}^n$ での n 次元ルベーグ測度を $\mathcal{L}^n$，k 次元ハウスドルフ測度を $\mathcal{H}^k$ と表すこととする．
(2) $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ とするとき，$\mathbb{R}^n$ 内の x を中心とする半径 r の開球を $B_r(x)$ と表すこととする．
(3) V が $\mathbb{R}^n$ の部分空間であるとき，V の直交補空間を $V^\perp$ と表すこととする．
(4) α を非負実数とするとき，定数 ω_α を $\pi^{\alpha/2}(\int_0^\infty s^{\alpha/2}e^{-s}\,ds)^{-1}$ と定める．特に α が整数のとき，ω_α は $\mathbb{R}^\alpha$ 内の単位球の $\mathcal{L}^\alpha$ 測度と一致する．
(5) μ を $\mathbb{R}^n$ 上の測度，f を $\mathbb{R}^n$ 上の非負値ボレル可測関数とする．このとき，$\mathbb{R}^n$ 上の測度 $f\mu$ を $(f\mu)(A) = \int_A f\,d\mu$ と定める．
(6) μ を $\mathbb{R}^n$ 上の測度，$x \in \mathbb{R}^n$，$r > 0$ とする．このとき $\mathbb{R}^n$ 上の測度 $\mu_{x,r}$ を $\mu_{x,r}(A) = \mu(x + rA)$ と定める．
(7) μ を $\mathbb{R}^n$ 上の測度，E をボレル集合とするとき，測度 $\mu|_E$ を $(\mu|_E)(A) = \mu(A \cap E)$ と定める．
(8) E を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とするとき，E の定義関数を $\mathbf{1}_E$ と定める．
(9) $G(m,n)$ を $\mathbb{R}^n$ の m 次元部分空間全体の集合とする．

定義 2.5 X をハウスドルフ空間とし，μ をその上の測度とする．

(1) 任意のコンパクト集合 $K \subset X$ に対して $\mu(K) < \infty$ が成り立つとき，μ は局所有限であるという．
(2) 任意のボレル集合が μ-可測であり，任意の集合 $A \subset X$ に対して $\mu(A) = \mu(B)$ なるボレル集合 $B \supset A$ が存在するとき，μ はボレル正則であるという．
(3) ボレル正則かつ局所有限な測度とする．μ が
   - 任意の $A \subset X$ に対して $\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subset U, U \text{ は開集合}\}$，
   - 任意の開集合 $U \subset X$ に対して $\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset U, K \text{ はコンパクト集合}\}$

   を満たすとき，μ をラドン測度という．

注意 2.6 $X = \mathbb{R}^n$ のとき，測度がボレル正則かつ局所有限という条件のみからラドン測度ということが導かれる．

局所コンパクトハウスドルフ空間上のラドン測度の一致を示すには，コンパクト台を持つ連続関数の積分が一致することを示せばよい．

命題 2.7 μ, ν を局所コンパクトハウスドルフ空間 X 上のラドン測度とする．このとき任意の $\varphi \in C_c(X)$ に

対して

$$\int \varphi\, d\mu = \int \varphi\, d\nu$$

が成り立つならば，$\mu = \nu$ となる．

証明． $\mu \neq \nu$ と仮定する．このとき $\mu(A) \neq \nu(A)$ なるボレル集合 A が存在する．この A は有界かつ $\mu(A) < \nu(A)$ が成り立つと仮定してよい．ラドン測度の定義より，$K \subset A \subset U$ かつ

$$\mu(A) \le \mu(U) < \nu(K) \le \nu(A) \tag{2.1}$$

なるコンパクト集合 K と有界な開集合 U が存在する．ここでウリゾーンの補題から，K 上で $\varphi = 1$，U の外で $\varphi = 0$ なる連続関数 $\varphi\colon X \to [0,1]$ が取れる．

このとき，

$$\int \varphi\, d\mu = \int_U \varphi\, d\mu \le \mu(U),$$
$$\int \varphi\, d\nu \ge \int_K \varphi\, d\nu = \nu(K)$$

となるが，これは仮定と (2.1) に矛盾する． □

局所有限測度に対しては次の収束が定義される．

定義 2.8 $\{\mu_k\}$ を局所有限測度の族，μ を局所有限測度とする．任意の $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, d\mu_k = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, d\mu$$

が成り立つとき，$\{\mu_k\}$ は μ に弱収束するといい，$\mu_k \rightharpoonup \mu$ と表す．

測度が弱収束しているとき，その台について次が成り立つ．

命題 2.9 局所有限測度の列 $\{\mu_k\}$ がある局所有限測度 μ に弱収束しているとする．このとき任意の $x \in \operatorname{supp}\mu$ に対して，$x_k \in \operatorname{supp}\mu_k$ を点列 $\{x_k\}$ が x に収束するようにとることができる．

証明． それができないと仮定すると，ある $x \in \operatorname{supp}\mu$ と $r > 0$ が存在して，k が十分に大きければ $B_r(x) \cap \operatorname{supp}\mu_k = \emptyset$ となる．このとき $B_{r/2}(x)$ 上で 1 となる関数 $\varphi \in C_c(B_r(x))_{\ge 0}$ をとれば，十分に大きい k に対して $\int_{B_r(x)} \varphi\, d\mu_k = 0$ より $\int_{B_r(x)} \varphi\, d\mu = 0$ となるが，

$$\int_{B_r(x)} \varphi\, d\mu \ge \int_{B_{r/2}(x)} \varphi\, d\mu = \mu(B_{r/2}(x)) > 0$$

となり矛盾する． □

ラドン測度の収束については以下が成り立つ．

命題 2.10 μ, μ_k を $\mathbb{R}^n$ 上のラドン測度とする．このとき以下の 3 つの条件は同値である．

(1) $\mu_k \rightharpoonup \mu$ となる．

(2) 任意のコンパクト集合 K と開集合 U に対して

$$\limsup_{k\to\infty} \mu_k(K) \le \mu(K),\ \mu(U) \le \liminf_{k\to\infty} \mu_k(U)$$

が成り立つ．

(3) $\mu(\partial B)=0$ なるボレル集合 B に対して $\lim_{k\to\infty}\mu_k(B)=\mu(B)$ が成り立つ．

命題 2.11 $\{\mu_k\}$ を $\mathbb{R}^n$ 上のラドン測度の列とし，任意のコンパクト集合 K に対して

$$\sup_k \mu_k(K)<\infty$$

が成り立つとする．このとき $\mathbb{R}^n$ 上のラドン測度 μ と $\{\mu_k\}$ の部分列 $\{\mu_{k_j}\}$ が存在して，$\mu_{k_j}\rightharpoonup\mu$ となる．

定理 2.12（Besicovitch の微分定理） μ,ν を $\mathbb{R}^n$ 上のラドン測度とする．このとき極限

$$\lim_{r\to 0}\frac{\nu(B_r(x))}{\mu(B_r(x))}$$

が，$\operatorname{supp}\mu$ 上 μ に関してほとんどいたるところで（無限大に発散する場合も込めて）存在する．さらにこの極限値を $f(x)$ とし，

$$E=(\mathbb{R}^n\setminus\operatorname{supp}\mu)\cup\left\{x\in\operatorname{supp}\mu\ \middle|\ \lim_{r\to 0}\frac{\nu(B_r(x))}{\mu(B_r(x))}=\infty\right\}$$

とすると，$\nu=f\mu+\nu|_E$ が成り立つ．

定義 2.13 μ を $\mathbb{R}^n$ 上のラドン測度，$\alpha\geq 0$ とする．

(1) μ の x における α 次上密度と α 次下密度をそれぞれ

$$\theta^{\alpha *}(\mu,x)=\limsup_{r\to 0}\frac{\mu(B_r(x))}{\omega_\alpha r^\alpha},$$
$$\theta^{\alpha}_{*}(\mu,x)=\liminf_{r\to 0}\frac{\mu(B_r(x))}{\omega_\alpha r^\alpha}$$

で定義する．特に $\theta^{\alpha *}(\mu,x)=\theta^{\alpha}_{*}(\mu,x)$ のとき，この値のことを μ の x における密度といい，$\theta^{\alpha}(\mu,x)$ と表す．

(2) $E\subset\mathbb{R}^n$ をボレル集合とするとき，E の x における α 次上密度と α 次下密度をそれぞれ

$$\theta^{\alpha *}(E,x)=\theta^{\alpha *}(\mathcal{H}^m|_E,x),$$
$$\theta^{\alpha}_{*}(E,x)=\theta^{\alpha}_{*}(\mathcal{H}^m|_E,x)$$

で定義する．特に $\theta^{\alpha *}(E,x)=\theta^{\alpha}_{*}(E,x)$ のとき，この値のことを E の x における密度といい，$\theta^{\alpha}(E,x)$ と表す．

命題 2.14 μ を $\mathbb{R}^n$ 上のラドン測度，$\alpha\geq 0$ とし，ほとんどすべての x において $0<\theta^{\alpha *}(\mu,x)<\infty$ を満たしているとする．このとき α 次元集合 $E\subset\mathbb{R}^n$ とボレル関数 $f\colon E\to(0,\infty)$ が存在して，$\mu=f\,\mathcal{H}^{\alpha}|_E$ が成り立つ．

2.3 対称線形汎関数と斉次関数

本節では V,W は線形空間であるとする．

定義 2.15 k 重線形写像 $\varphi\colon V^k\to W$ が対称とは，任意の $u_1\dots,u_k\in V$ と k 次の置換 σ に対して，

$$\varphi(u_1,\dots,u_k)=\varphi(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(k)})$$

が成り立つことである．

またを $SM_k(V,W)$ を k 重対称線形写像 $\varphi\colon V^k \to W$ 全体の集合とする．

定義 2.16　$\varphi\colon V \to W$ が k 次斉次写像であるとは，任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ と $x \in V$ に対して $\varphi(\lambda x) = \lambda^k \varphi(x)$ が成り立つことである．

また $HG_k(V,W)$ を k 次斉次写像 $\varphi\colon V \to W$ 全体の集合とする．

表記 2.17　$\varphi \in SM_k(V,W)$ のとき，$u \in V$ に対して $\varphi(u^k) = \varphi(u,\ldots,u)$ とする．

$\varphi\colon V^k \to W$ を V 上の k 重対称線形写像とする．このとき

$$\psi(u) = \varphi(u^k)$$

と定めると，ψ は V から W への k 次斉次写像となる．この $SM_k(V,W)$ から $HG_k(V,W)$ への対応を A とする．

逆に $\psi\colon V \to W$ を k 次斉次写像とする．このとき

$$\varphi(u_1,\ldots,u_k) = \frac{1}{k!}\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\psi(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k)\bigg|_{\lambda=0}$$

と定めると，φ は V から W への k 重線形写像となる．この $HG_k(V,W)$ から $SM_k(V,W)$ への対応を B とする．

これらには以下のような関係がある．

補題 2.18　$A \circ B = \mathrm{id}_{HG_k(V,W)}$ かつ $B \circ A = \mathrm{id}_{SM_k(V,W)}$ が成り立ち，したがって A と B はともに全単射である．

証明．　$\varphi\colon V^k \to W$ を k 重線形写像とする．このとき

$$\begin{aligned}
(B\circ A)(\varphi)(u_1,\ldots,u_k) &= B\left(\varphi(\cdot^k)\right)(u_1,\ldots,u_k)\\
&= \frac{1}{k!}\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\varphi((\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k)^k)\bigg|_{\lambda=0}\\
&= \frac{1}{k!}\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\sum_{i_1=1}^{k}\cdots\sum_{i_k=1}^{k}\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k}\varphi(u_{i_1},\ldots,u_{i_k})\bigg|_{\lambda=0}.
\end{aligned}$$

ここで最後の項は $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ で一度ずつ偏微分しているので 0 にならないのは $i_1,\ldots,i_k$ がすべて異なる場合に限る．その場合は $k!$ 通りであり，偏微分した後の値は $\varphi(u_{i_1},\ldots,u_{i_k})$ となる．よって対称性から $(B\circ A)(\varphi)(u_1,\ldots,u_k) = \varphi(u_1,\ldots,u_k)$ となる．

逆に $\psi\colon V \to W$ を k 次の斉次写像とする．このとき

$$\begin{aligned}
(A\circ B)(\psi)(u) &= A\left(\frac{1}{k!}\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\psi(\lambda_1\cdot + \cdots + \lambda_k\cdot)\bigg|_{\lambda=0}\right)(u)\\
&= \frac{1}{k!}\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\psi(\lambda_1 u + \cdots + \lambda_k u)\bigg|_{\lambda=0}\\
&= \frac{1}{k!}\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\lambda_k}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k)^k\psi(u)\bigg|_{\lambda=0}\\
&= \psi(u)
\end{aligned}$$

となる．　□

このことから，対称線形写像を定義する際や性質を確認する際に，k 次斉次写像に着目することが多い．

3　一様測度と接測度

表記 3.1　V をユークリッド空間内の部分空間とするとき，V への射影作用素を P_V，$V^\perp$ への射影作用素を Q_V と表す．

次の一様測度，接測度，測度が平坦であることの定義は [2] にて用いられている定義を採用した．

定義 3.2　μ, ν を $\mathbb{R}^n$ 上のラドン測度，α を非負実数，x を $\mathbb{R}^n$ 内の点とする．

(1) μ が α 次一様測度とは，台が空集合ではなく，任意の $x \in \operatorname{supp}\mu$ と任意の $r > 0$ に対して $\mu(B_r(x)) = \omega_\alpha r^\alpha$ が成り立つことである．また $\mathcal{U}^\alpha(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の $0 \in \operatorname{supp}\mu$ なる α 次一様測度 μ 全体の集合とする．

(2) ν が x における μ の α 次接測度とは，0 に単調減少に収束する正の実数の列 $\{r_i\}_i$ が存在して，測度の列 $\{r_i^{-\alpha}\mu_{x,r_i}\}_i$ が ν に弱収束することである．また $\operatorname{Tan}_\alpha(\mu, x)$ を x における μ の α 次接測度全体の集合とする．

(3) ν が無限遠における μ の α 次接測度とは，単調増加で正の無限大に発散する正の実数の列 $\{r_i\}_i$ が存在して，測度の列 $\{r_i^{-\alpha}\mu_{0,r_i}\}_i$ が ν に弱収束することである．また $\operatorname{Tan}_\alpha(\mu, \infty)$ を無限遠における μ の α 次接測度全体の集合とする．

定義 3.3　(1) $\mathbb{R}^n$ 上の測度 μ が m 次平坦（または単に平坦）とは，$\mathbb{R}^n$ の m 次元部分空間 V が存在して，$\mu = \mathcal{H}^m|_V$ となることである．また $\mathcal{G}_m(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の m 次平坦な測度全体の集合とする．

(2) $\mathbb{R}^n$ 上の測度 μ が無限遠で m 次平坦（または単に無限遠で平坦）とは，無限遠における μ の m 次接測度が全て m 次平坦となることである．

m 次一様測度は台の包含関係から測度の一致を導くことができる．次の命題は [2] の Remark 3.14 を参考にした．

命題 3.4　μ, ν を $\mathbb{R}^n$ 上の m 次一様測度とする．このとき $\operatorname{supp}\mu \subset \operatorname{supp}\nu$ が成り立つならば $\mu = \nu$ が成り立つ．

証明．　μ, ν はともに m 次一様測度なので，任意の $r > 0$ と $x \in \operatorname{supp}\mu$ に対して $\mu(B_r(x))/\nu(B_r(x)) = 1$ となることに注意する．よって Besicovitch の微分定理より，$f = \mathbf{1}_{\operatorname{supp}\mu}$ とすると，

$$\mu = f\nu + \mu|_{\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}\nu} \tag{3.1}$$

となる．ここで $\operatorname{supp}\mu \subset \operatorname{supp}\nu$ より $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}\nu \subset \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}\mu$ なので $\mu|_{\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}\nu} = 0$ である．よってあとは $\operatorname{supp}\mu = \operatorname{supp}\nu$ を示せばよい．

$x \in \operatorname{supp}\mu$ と $r > 0$ を任意にとる．(3.1) より

$$\nu(B_r(x) \cap \operatorname{supp}\mu) = \int_{B_r(x)} \mathbf{1}_{\operatorname{supp}\mu}\, d\nu = \mu(B_r(x)) = \omega_m r^m \tag{3.2}$$

となる．

ここで $\operatorname{supp}\nu \subset \operatorname{supp}\mu$ が成り立たないと仮定すると，$y \notin \operatorname{supp}\mu$ なる $y \in \operatorname{supp}\nu$ が存在する．$\operatorname{supp}\mu$ は閉集合なので，$B_\varepsilon(y) \cap \operatorname{supp}\mu = \emptyset$ なる $\varepsilon > 0$ を取ることができる．ここで $B_\varepsilon(y) \subset B_r(x)$ となるよう $r > 0$

を十分に大きく取る．仮定より $B_r(x) \cap \operatorname{supp}\mu \subset B_r(x) \cap \operatorname{supp}\nu$ なので，

$$(B_\varepsilon(y) \cap \operatorname{supp}\nu) \cup (B_r(x) \cap \operatorname{supp}\mu) \subset (B_\varepsilon(y) \cap \operatorname{supp}\nu) \cup (B_r(x) \cap \operatorname{supp}\nu) = B_r(x) \cap \operatorname{supp}\nu.$$

$B_\varepsilon(y) \cap \operatorname{supp}\mu = \emptyset$ より $B_\varepsilon(y) \cap \operatorname{supp}\nu$ と $B_r(x) \cap \operatorname{supp}\mu$ には共通部分がないので，

$$\nu(B_\varepsilon(y) \cap \operatorname{supp}\nu) + \nu(B_r(x) \cap \operatorname{supp}\mu) \le \nu(B_r(x) \cap \operatorname{supp}\nu)$$

となる．よって (3.2) より $\omega_m \varepsilon^m + \omega_m r^m \le \omega_m r^m$ となるが，これは矛盾している．よって $\operatorname{supp}\mu = \operatorname{supp}\nu$ が成り立つ． □

このことから台に注目することで，m 次一様測度が平坦であることを示すことができる．

系 3.5 μ を $\mathbb{R}^n$ 上の m 次一様測度，V を $\mathbb{R}^n$ の m 次元部分間とする．このとき $\operatorname{supp}\mu \subset V$ が成り立つならば $\mu = \mathcal{H}^m|_V$ が成り立つ．

m 次一様測度の列があるラドン測度に弱収束しているとき，その極限として得られる測度もまた m 次一様測度となる．

命題 3.6 $\{\mu_k\}_k$ を $\mathbb{R}^n$ 上の m 次一様測度の列とし，ある $\mathbb{R}^n$ 上のラドン測度 μ に弱収束してるとする．このとき，μ は m 次一様測度となる．

証明. $x \in \operatorname{supp}\mu$ と $R > 0$ を任意に取り，$\mu(\partial B_R(x)) = 0$ を仮定する．このとき命題 2.10 より，$\mu(B_R(x)) = \lim_{k\to\infty} \mu_k(B_R(x))$ が成り立つ．

ここで $x_k \in \operatorname{supp}\mu_k$ を，点列 $\{x_k\}_k$ が x に収束するようにとる．実際それができないとすると，$\varepsilon > 0$ と自然数 N が存在して $k \ge N$ なるかぎり $B_\varepsilon(x) \cap \operatorname{supp}\mu_k = \emptyset$ となる．$\varphi \in C_c(B_\varepsilon(x))$ を $B_{\varepsilon/2}(x)$ 上 1 となる関数とすると，$x \in \operatorname{supp}\mu$ なので

$$0 < \mu(B_{\varepsilon/2}(x)) \le \int_{B_\varepsilon(x)} \varphi \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{B_\varepsilon(x)} \varphi \, d\mu_k = 0$$

となり矛盾する．

$0 < r < R$ を任意に取ると，自然数 N が存在して，$k \ge N$ なる限り $|x - x_k| < r$ となる．よって $k \ge N$ のとき $\overline{B_{R-r}(x_k)} \subset B_R(x) \subset B_{R+r}(x_k)$ が成り立つので，命題 2.10 より

$$\begin{aligned}
\mu(B_R(x)) &\ge \limsup_{k\to\infty} \mu_k(\overline{B_{R-r}(x_k)}) = \limsup_{k\to\infty} \omega_m (R-r)^m = \omega_m (R-r)^m, \\
\mu(B_R(x)) &\le \liminf_{k\to\infty} \mu_k(B_{R+r}(x_k)) = \liminf_{k\to\infty} \omega_m (R+r)^m = \omega_m (R+r)^m.
\end{aligned}$$

$r > 0$ は任意なので $\mu(B_R(x)) = \omega_m R^m$ が成り立つ．

ここで $\mu(\partial B_R(x)) > 0$ なる $R > 0$ は高々可算個しかない．実際，S を $\mu(\partial B_R(x)) > 0$ なる正の実数 R 全体の集合，自然数 n に対して S_n を $\mu(\partial B_R(x)) > 1/n$ なる正の実数 R 全体の集合とすると，$S = \bigcup_{n=1}^\infty S_n$ となる．S が非可算であると仮定すると，S_n が非可算となるような n が存在する．特に S_n は集積点を含むので，$R_0 > 0$ で $S_n \cap (0, R_0)$ が無限集合となるようなものが存在する．このとき

$$\mu(B_{R_0}(x)) \ge \sum_{R \in S_n \cap (0,R_0)} \mu(\partial B_R(x)) \ge \sum_{R \in S_n \cap (0,R_0)} \frac{1}{n} = \infty$$

となるが，これは μ がラドン測度であることに矛盾している．

よって各 $R \in S$ に対して，$(0,\infty) \setminus S$ 内の単調増加列 $\{R_k\}_k$ で $R_k \to R$ となるものが存在する．したがって

$$\mu(B_R(x)) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_{R_k}(x)) = \lim_{k\to\infty} \omega_m R_k^m = \omega_m R^m$$

となる． □

m 次一様測度による積分は，被積分関数が台の点を中心に動径方向にのみ依存するとき，具体的に値を計算することができる．次の命題は [2] の Lemma 7.2 を参照している．

命題 3.7 $\varphi\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ をボレル関数，$\mu \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$，$y \in \operatorname{supp}\mu$ とする．このとき

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x|)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x-y|)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(|z|)\, d\mathcal{L}^m(z)$$

が成り立つ．

証明． 任意に $y \in \operatorname{supp}\mu$ と $r > 0$ を取る．$\widetilde{B}_r(0)$ を $\mathbb{R}^m$ 内の 0 を中心とする開球とすると，μ が m 次一様測度なので $\mu(B_r(y)) = \omega_m r^m = \mathcal{L}^m(\widetilde{B}_r(0))$ が成り立つ．したがって φ が単関数の場合，主張は成り立つ．

φ が一般のボレル関数のときは，φ に各点で単調増加に収束する単関数の列を取ることで，単調収束定理により示すことができる． □

命題 3.8 $\mu, \mu_k \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ $(k = 1, 2, \dots)$ とし，$\mu_k \rightharpoonup \mu$ が成り立つとする．また Q を実数係数の n 変数多項式とする．このとき，

$$\lim_{k\to\infty} \int Q(z) e^{-|z|^2}\, d\mu_k(z) = \int Q(z) e^{-|z|^2}\, d\mu(z)$$

が成り立つ．

証明． $\varepsilon > 0$ を任意にとる．このとき $|z| \geq R_0$ ならば $|Q(z)|\, e^{-|z|^2} < \varepsilon$ となる $R_0 = R_0(Q,\varepsilon)$ が存在する．また定数 $C > 0$ と自然数 N が存在して，$|z| \geq R_0$ ならば $|Q(z)|\, e^{-|z|^2} \leq C\, |z|^N e^{-|z|^2}$ が成り立つ．

$R > 0$ と $\lambda \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ を任意とすると命題 3.7 より

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} Q(z) e^{-|z|^2}\, d\lambda(z) \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} |Q(z)|\, e^{-|z|^2}\, d\lambda(z) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} C\, |z|^N e^{-|z|^2}\, d\lambda(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} C\, |z|^N e^{-|z|^2}\, d\mathcal{L}^m(z)
\end{aligned}$$

となるので，十分に大きい $R_1 = R_1(Q,\varepsilon) > R_0$ をとれば

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R_1}(0)} Q(z) e^{-|z|^2}\, d\lambda(z) \right| < \varepsilon \tag{3.3}$$

が成り立つようにできる．[*1]

ここで $\omega_m(R_2^m - R_1^m) < 1$ なる $R_2 = R_2(R_1) > R_1$ をとり，φ_0 を $|z| \leq R_1$ のとき $\varphi_0(z) = 1$，$|z| \geq R_2$ のとき $\varphi_0(z) = 0$ となる $\mathbb{R}^n$ 上の連続関数とする．さらに $\varphi(z) = Q(z) e^{-|z|^2} \varphi_0(z)$ $(z \in \mathbb{R}^n)$ とする．このと

[*1] ここでとる R_1 は測度 λ によらない．

き任意の $\lambda \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\begin{aligned}
\left| \int_{B_{R_1}(0)} Q(z)e^{-|z|^2}\, d\lambda(z) - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z)\, d\lambda(z) \right| &= \left| \int_{B_{R_2}(0)\setminus B_{R_1}(0)} -Q(z)e^{-|z|^2}\varphi_0(z)\, d\lambda(z) \right| \\
&\leq \int_{B_{R_2}(0)\setminus B_{R_1}(0)} |Q(z)|\, e^{-|z|^2}\, d\lambda(z) \\
&\leq \varepsilon(\omega_m R_2^m - \omega_m R_1^m) \\
&\leq \varepsilon \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

また $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ なので，整数 $K = K(\varphi)$ が存在して，$k \geq K$ のとき

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, d\mu_k - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, d\mu \right| < \varepsilon \qquad (3.5)$$

が成り立つ．

よって (3.3), (3.4), (3.5) より，$k \geq K$ のとき

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^n} Q(z)e^{-|z|^2}\, d\mu_k - \int_{\mathbb{R}^n} Q(z)e^{-|z|^2}\, d\mu \right| \\
&\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{R_1}(0)} Q(z)e^{-|z|^2}\, d\mu_k(z) \right| + \left| \int_{B_{R_1}(0)} Q(z)e^{-|z|^2}\, d\mu_k(z) - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z)\, d\mu_k(z) \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, d\mu_k - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, d\mu \right| \\
&+ \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z)\, d\mu(z) - \int_{B_{R_1}(0)} Q(z)e^{-|z|^2}\, d\mu(z) \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{R_1}(0)} Q(z)e^{-|z|^2}\, d\mu(z) \right| \\
&\leq 5\varepsilon
\end{aligned}$$

となるので示された． □

x における μ の α 次接測度の列が弱収束している場合も，その極限として得られる測度はまた x における μ の α 次接測度となる．次の命題は [2] の Theorem 6.8 の証明を参考にした．

命題 3.9 μ を $\mathbb{R}^n$ 内のラドン測度，$x \in \mathbb{R}^n$ とする．このとき $\mathrm{Tan}_m(\mu, x)$ 内の測度の列があるラドン測度に弱収束しているならば，その測度も $\mathrm{Tan}_m(\mu, x)$ に属する．

証明． $R > 0$ に対して $C_R = \{r^{-m}\mu_{x,r} \mid 0 < r \leq R\}$ と定める．このときラドン測度の弱収束の位相に関する閉包を $\overline{C_R}^{w^*}$ で表すことにすると，$\mathrm{Tan}_m(\mu, x)$ の定義より

$$\mathrm{Tan}_m(\mu, x) = \lim_{R\to 0} \overline{C_R}^{w^*} = \bigcap_{R>0} \overline{C_R}^{w^*}$$

となるので，ラドン測度の弱収束の位相に関して $\mathrm{Tan}_m(\mu, x)$ は閉集合である． □

3.1 一様測度の無限遠における接測度の一意性

$\mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ に属する測度の重要な性質として，無限遠における m 次接測度の一意性が挙げられる．次の定理は [2] の Proposition 7.1 を参照した．

定理 3.10 $\mu \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ とする．このとき $\zeta \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ が存在して，$\mathrm{Tan}_m(\mu, \infty) = \{\zeta\}$ が成り立つ．

注意 3.11　$\mu \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ のとき $\mathrm{Tan}_m(\mu, \infty) \subset \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ となることは，任意の $r > 0$ に対して $r^{-m}\mu_{0,r}$ が $\mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ に属するので，命題 3.6 より従う．よってこの定理の主張は接測度の一意性にある．

注意 3.12　この一意性から，$r \to \infty$ のとき $r^{-m}\mu_{0,r} \rightharpoonup \zeta$ となることがわかる．

$\mu \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ とし，P を実係数の n 変数多項式とする．$F_P\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を

$$F_P(r) = \frac{1}{r^m} \int_{\mathbb{R}^n} P(z) e^{-|z|^2}\, d\mu_{0,r}(z)$$

と定める．

もし任意の P に対して極限 $\lim_{r\to\infty} F_P(r)$ が存在すれば，命題 3.8 より $\zeta, \xi \in \mathrm{Tan}_m(\mu, \infty)$ ならば

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(z) e^{-|z|^2}\, d\zeta = \int_{\mathbb{R}^n} P(z) e^{-|z|^2}\, d\xi$$

が成り立ち，このことから $\zeta = \xi$ を導くことができる．

そこで P が特別な場合を考える．次の定義は [2] で用いられている定義を採用した．

定義 3.13　$\mu \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$, $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$, $s > 0$ とする．このとき

$$I(s) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-s|z|^2}\, d\mu(z),$$
$$b^{\mu}_{k,s}(u_1, \ldots, u_k) = \frac{(2s)^k}{k!} I(s)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \langle z, u_1 \rangle \cdots \langle z, u_k \rangle e^{-s|z|^2}\, d\mu(z)$$

と定義する．ただし，μ を定義に用いていることが明らかな場合は $b^{\mu}_{k,s}$ の代わりに $b_{k,s}$ と表記することもある．

注意 3.14　$\mu \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ なので，命題 3.7 より $I(s) = (\pi/s)^{m/2}$ となる．すなわち，$I(s)$ は μ に依らない．

$P(z)$ は $\langle z, u \rangle^j$ の線形和で表現することができ，かつ $P(z) = \langle z, u_1 \rangle \cdots \langle z, u_k \rangle$ としたときに極限 $\lim_{r\to\infty} F_P(r)$ が存在することと極限 $\lim_{s\to 0} s^{-k/2} b_{k,s}(u_1, \ldots, u_k)$ が存在することと同値であるから，次の命題を示す必要がある．次の命題は [2] の Proposition 7.5 を参照した．

命題 3.15　$\mu \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$, $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$ のとき，極限

$$\lim_{s\to 0} s^{-k/2} b_{k,s}(u_1, \ldots, u_k)$$

が存在する．

$b_{k,s}$ は s についてテイラーの定理が成り立つ．たとえば命題 3.15 がそうであるように，$b_{k,s}$ を含む式で $s \to 0$ の極限をよくとるので，その際に有用となる．次の命題は [2] の Proposition 7.7 を参照した．なお，証明は省略する．

命題 3.16　$\mu \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ とする．このとき任意の $j, k \in \mathbb{N}$ に対し，k 重対称線形汎関数 $b^{(j)}_k$ が存在して，以下が成り立つ:

$$\text{任意の } q \in \mathbb{N} \text{ に対し} \quad b_{k,s} = \sum_{j=1}^{q} \frac{s^j b_k^{(j)}}{j!} + o(s^q) \quad (s \to 0), \tag{3.6}$$

$$k > 2j \quad \text{ならば} \quad b_k^{(j)} = 0, \tag{3.7}$$

$$\text{任意の } q \in \mathbb{N} \text{ と } x \in \operatorname{supp} \mu \text{ に対し} \quad \sum_{k=1}^{2q} b_k^{(q)}(x^k) = |x|^{2q}. \tag{3.8}$$

ただし，スモールオーダーは各点収束の意味である．

この命題を用いて命題 3.15 を示す．

証明．（命題 3.15 の証明）　k の偶奇で場合を分けて考える．

まず k が奇数である場合を考える．$k = 2l + 1$ なる l をとる．命題 3.16 で $q = l + 1$ とすれば，各点で

$$b_{k,s} = \sum_{j=1}^{l+1} \frac{s^j b_k^{(j)}}{j!} + o(s^{l+1})$$

となる．$k > 2j$，すなわち $1 \leq j \leq l$ のとき $b_k^{(j)} = 0$ なので，$b_{k,s} = s^{l+1} b_k^{(l+1)}/(l+1)! + o(s^{l+1})$ となる．よって $0 < s < 1$ として $s \to 0$ とすると，

$$\begin{aligned}\left| s^{-k/2} b_{k,s} \right| &= s^{-k/2} \left| \frac{s^{l+1} b_k^{(l+1)}}{(l+1)!} \right| + s^{-k/2} \left| o(s^{l+1}) \right| \\ &\leq s^{1/2} \left| \frac{b_k^{(l+1)}}{(l+1)!} \right| + s^{-l-1/2} \left| o(s^{l+1}) \right| \\ &\to 0\end{aligned}$$

となる．

次に k が偶数である場合を考える．$k = 2l$ なる l をとる．命題 3.16 で $q = l$ とすれば，各点で

$$b_{k,s} = \sum_{j=1}^{l} \frac{s^j b_k^{(j)}}{j!} + o(s^l)$$

となる．$k > 2j$，すなわち $1 \leq j \leq l - 1$ のとき $b_k^{(j)} = 0$ なので，$b_{k,s} = s^l b_k^{(l)}/l! + o(s^l)$ となる．よって $0 < s < 1$ として $s \to 0$ とすると，

$$s^{-k/2} b_{k,s} = s^{-l} \frac{s^l b_k^{(l)}}{l!} + s^{-l} o(s^l) \to \frac{b_k^l}{l!}$$

となる．□

命題 3.15 を用いて，定理 3.10 を示す．

証明. （定理 3.10 の証明）　$C(j,m) = 2^j/(j!\pi^{m/2})$ とし，$s = r^{-2} > 0$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}
\frac{b_{j,s}(u_1,\dots,u_j)}{s^{j/2}} &= C(j,m)s^{j/2+m/2}\int \langle z,u_1\rangle\cdots\langle z,u_j\rangle e^{-s|z|^2}\,d\mu(z) \\
&= \frac{C(j,m)}{r^{j+m}}\int \langle z,u_1\rangle\cdots\langle z,u_j\rangle e^{-r^{-2}|z|^2}\,d\mu(z) \\
&= \frac{C(j,m)}{r^{m}}\int \langle z/r,u_1\rangle\cdots\langle z/r,u_j\rangle e^{-|z/r|^2}\,d\mu(z) \\
&= C(j,m)\int \langle w,u_1\rangle\cdots\langle w,u_j\rangle e^{-|w|^2}\,d\left(r^{-m}\mu_{0,r}\right)(w).
\end{aligned}$$

よって命題 3.15 により，極限

$$\lim_{r\to\infty}\int \langle w,u_1\rangle\cdots\langle w,u_j\rangle e^{-|w|^2}\,d\left(r^{-m}\mu_{0,r}\right)(w) \tag{3.9}$$

が存在することがわかる．

$\nu_1,\nu_2 \in \mathrm{Tan}_m(\mu,\infty)$ とし，$r_k^{-m}\mu_{0,r_k} \rightharpoonup \nu_1$, $s_k^{-m}\mu_{0,s_k} \rightharpoonup \nu_2$ なる単調増加で発散する正の実数列 $\{r_k\}_k$, $\{s_k\}_k$ をとる．このとき，$r_k^{-m}e^{-|\cdot|^2}\mu_{0,r_k} \rightharpoonup e^{-|\cdot|^2}\nu_1$, $s_k^{-m}e^{-|\cdot|^2}\mu_{0,s_k} \rightharpoonup e^{-|\cdot|^2}\nu_2$ が成り立つ．よって命題 3.8 より，任意の $u \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\int \langle z,u\rangle^j e^{-|z|^2}\,d(r_k^{-m}\mu_{0,r_k}) &= \int \langle z,u\rangle^j e^{-|z|^2}\,d\nu_1, \\
\lim_{k\to\infty}\int \langle z,u\rangle^j e^{-|z|^2}\,d(s_k^{-m}\mu_{0,s_k}) &= \int \langle z,u\rangle^j e^{-|z|^2}\,d\nu_2
\end{aligned}$$

が成り立つ．(3.9) の極限が存在することから，

$$\int \langle z,u\rangle^j e^{-|z|^2}\,d\nu_1 = \int \langle z,u\rangle^j e^{-|z|^2}\,d\nu_2$$

が成り立つ．よって任意の多項式 P に対して

$$\int P(z)e^{-|z|^2}\,d\nu_1 = \int P(z)e^{-|z|^2}\,d\nu_2$$

が成り立つ．ここから任意の $a \geq 0$ に対して

$$\int e^{-(1+a)|z|^2}P(z)\,d\nu_1 = \int e^{-(1+a)|z|^2}P(z)\,d\nu_2 \tag{3.10}$$

がわかる．実際，これが $a \in [0,N/2]$ で成り立つとし，$b \in [0,1/2]$ とする．このとき任意の $M \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int e^{-(1+a)|z|^2}\sum_{i=0}^{M}\frac{(-b\,|z|^2)^i}{i!}P(z)\,d\nu_1 = \int e^{-(1+a)|z|^2}\sum_{i=0}^{M}\frac{(-b\,|z|^2)^i}{i!}P(z)\,d\nu_2 \tag{3.11}$$

が成り立つが，

$$\begin{aligned}
\left|e^{-(1+a)|z|^2}\sum_{i=0}^{M}\frac{(-b\,|z|^2)^i}{i!}P(z)\right| &\leq e^{-(1+a)|z|^2}\sum_{i=0}^{M}\frac{(b\,|z|^2)^i}{i!}Q(|z|) \\
&\leq e^{-(1+a-b)|z|^2}Q(|z|)
\end{aligned}$$

であり，この優関数は $L^1(\nu_1)\cap L^1(\nu_2)$ に属するので，(3.11) で $M\to\infty$ とすると，優収束定理より

$$\int e^{-(1+a+b)|z|^2}P(z)\,d\nu_1 = \int e^{-(1+a+b)|z|^2}P(z)\,d\nu_2$$

となり，(3.10) が $a \in [0, (N+1)/2]$ でも成り立つ．

ここで $\mathcal{B} = \{e^{-(1+a)|z|^2} P(z) \mid a \geq 0,\ P$ は多項式 $\}$ とすると，局所コンパクト空間におけるストーン・ワイエルシュトラスの定理より，任意の $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ に対して，$e^{|\cdot|^2}\varphi$ に $\mathbb{R}^n$ 上で一様収束するような $\mathcal{B}$ 内の関数列 $\{\phi_i\}_i$ が取れる．$e^{-|\cdot|^2}\phi_i$ は $\mathcal{B}$ に属するので，

$$\int e^{-|z|^2} \phi_i(z)\, d\nu_1 = \int e^{-|z|^2} \phi_i(z)\, d\nu_2$$

が成り立つ．この式で $i \to \infty$ とすると，優収束定理より

$$\int \varphi\, d\nu_1 = \int \varphi\, d\nu_2$$

が得られる．

よって命題 2.7 より，$\nu_1 = \nu_2$ が成り立つ． □

3.2 原点付近での平坦性

m 次一様測度 μ は “原点付近での平坦性” が分かると，そこから μ が平坦であるということがわかる．次の定理は [2] の Proposition 8.1 を参照した．

定理 3.17 $\mu \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ とする．

$m = 0, 1, 2$ のとき，μ は無限遠で m 次平坦である．

$m \geq 3$ のとき，m, n のみに依存する $\varepsilon > 0$ が存在して，次が成り立つ:

λ を無限遠における μ の m 次接測度とするとき，

$$\min_{V \in G(m,n)} \int_{B_1(0)} d(x, V)^2\, d\lambda(x) \leq \varepsilon$$

ならば μ は無限遠で m 次平坦である．

この定理の仮定には共通している性質がある．次の定義は [2] で用いられている定義を採用した．

定義 3.18 $\mathbb{R}^n$ 上の測度 μ が錐とは，任意の $r > 0$ に対して $\mu_{0,r} = r^m \mu$ が成り立つことである．

次の命題は [2] の Corollary 8.4 を参照した．

命題 3.19 (1) 測度 μ が錐のとき，任意の $r > 0$ と $x \in \operatorname{supp}\mu$ に対して，$rx \in \operatorname{supp}\mu$ が成り立つ．

(2) $\mu \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \operatorname{Tan}_m(\mu, \infty)$ のとき，λ は錐である．

証明. (1) $x \in \operatorname{supp}\mu$ と $r, R > 0$ を任意に取ると，

$$\mu(B_R(rx)) = \mu_{0,r}(B_{R/r}(x)) = r^m \mu(B_{R/r}(x)) > 0$$

となるので，$rx \in \operatorname{supp}\mu$ である．

(2) $\lambda \in \operatorname{Tan}_m(\mu, \infty)$, $\rho > 0$ とすると，$r \to \infty$ のとき $(\rho r)^{-m}\mu_{0,\rho r} \rightharpoonup \rho^{-m}\lambda_{0,\rho}$ となる．よって $\rho^{-m}\lambda_{0,\rho} \in \operatorname{Tan}_m(\mu, \infty)$ だが，無限遠での m 次接測度の一意性より $\lambda = \rho^{-m}\lambda_{0,\rho}$ となる． □

よって定理 3.17 を示すには，次の命題を示せばよいことになる．次の命題は [2] の Proposition 8.5 を参照した．

命題 3.20　$\lambda \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ は錐であるとする．このとき，次が成り立つ:

(1)　$m = 0, 1, 2$ のとき，λ は m 次平坦である，

(2)　$m \geq 3$ のとき，m, n のみに依存する $\varepsilon > 0$ が存在して，次が成り立つ:

$$\min_{V \in G(m,n)} \int_{B_1(0)} d(x, V)^2 \, d\lambda(x) \leq \varepsilon$$

ならば λ は m 次平坦である．

まず，錐である測度の性質をいくつか見ていく．次の命題は [2] の Lemma 8.6 を参照した．

命題 3.21　$\lambda \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ が錐であるとき，

(1)　$b^{\lambda}_{2k-1,s} = 0$, $b^{\lambda}_{2k,s} = (k!)^{-1} s^k b^{\lambda,(k)}_{2k}$ が成り立つ．

(2)　$x \in \operatorname{supp} \lambda$ ならば $b^{(k)}_{2k}(x^{2k}) = |x|^{2k}$ が成り立つ．

(3)　$|u| = |f| < 1$ を満たすような任意の $u \in \operatorname{supp} \lambda$, $f \in \mathbb{R}^m$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{|\langle z, u \rangle| \leq 1} \, d\lambda(z) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{1}_{|\langle x, f \rangle| \leq 1} \, d\mathcal{L}^m(x) \tag{3.12}$$

が成り立つ．

証明.　　(1)　$x \in \mathbb{R}^n$ とすると λ が錐であることより

$$\begin{aligned}
b^{\lambda}_{j,s}(x^j) &= \frac{(2s)^j}{j!} I(s)^{-1} \int e^{-s|z|^2} \langle x, z \rangle^j \, d\lambda(z) \\
&= \frac{(2s)^j}{j!} \frac{s^{m/2}}{\pi^{m/2}} s^{-j/2} \int e^{-\left|s^{1/2} z\right|^2} \langle x, s^{1/2} z \rangle^j \, d\lambda(z) \\
&= \frac{(2s)^j}{j!} \frac{s^{m/2}}{\pi^{m/2}} s^{-j/2} \int e^{-|z|^2} \langle x, z \rangle^j \, d\lambda_{0,s^{-1/2}}(z) \\
&= \frac{2^j s^{j/2}}{\pi^{m/2} j!} \int e^{-|z|^2} \langle x, z \rangle^j \, d\lambda(z)
\end{aligned}$$

となる．よって s に依存しない定数 C が存在して

$$b^{\lambda}_{j,s}(x^j) = C s^{j/2} \tag{3.13}$$

となる．

$j = 2k-1$ のとき，命題 3.16 より $b_{2k-1,s}(x^{2k-1}) = s^k b^{(k)}_{2k-1}(x^{2k-1})/k! + o(s^k)$ となる．これと (3.13) より

$$C s^{k-1/2} = b_{2k-1,s}(x^{2k-1}) = s^k b^{(k)}_{2k-1}(x^{2k-1})/k! + o(s^k)$$

となるので，$C = 0$ を得る．

$j = 2k$ のとき，命題 3.16 より $b_{2k,s}(x^{2k}) = s^k b^{(k)}_{2k}(x^{2k})/k! + o(s^k)$ となる．これと (3.13) より

$$C s^k = b_{2k,s}(x^{2k}) = s^k b^{(k)}_{2k}(x^{2k})/k! + o(s^k)$$

となるので，$C = b^{(k)}_{2k}(x^{2k})/k!$ を得る．

(2)　$x \in \operatorname{supp}\lambda$ とすると，命題 3.16 より

$$\sum_{j=1}^{2k} b_j^{(k)}(x^j) = |x|^{2k}.$$

よって $j < 2k$ ならば $b_j^{(k)}(x^j) = 0$ となることを示せばよい．
$j = 2l-1$ のとき，(1) と命題 3.16 より任意の $q \geq l$ に対して

$$0 = b_{2l-1,s}(x^{2l-1}) = \sum_{k=l}^{q} \frac{s^k b_{2l-1}^{(k)}(x^{2l-1})}{k!} + o(s^q) \tag{3.14}$$

となる．(3.14) で $q = l$ とすれば $b_{2l-1}^{(l)}(x^{2l-1}) = 0$ を得る．$l \leq k \leq m$ なる k に対して $b_{2l-1}^{(k)}(x^{2l-1}) = 0$ が成り立つとき，(3.14) で $q = m+1$ とすれば $b_{2l-1}^{(m+1)}(x^{2l-1}) = 0$ を得る．
$j = 2l$ のとき，(1) と命題 3.16 より任意の $q \geq l$ に対して

$$\frac{s^l b_{2l}^{(l)}(x^{2l})}{l!} = b_{2l,s}(x^{2l}) = \sum_{i=l}^{q} \frac{s^i b_{2l}^{(i)}(x^{2l})}{i!} + o(s^q) \tag{3.15}$$

となる．(3.15) で $q = l+1$ とすれば

$$\frac{s^l b_{2l}^{(l)}(x^{2l})}{l!} = \frac{s^l b_{2l}^{(l)}(x^{2l})}{l!} + \frac{s^{l+1} b_{2l}^{(l+1)}(x^{2l})}{(l+1)!} + o(s^{l+1})$$

より $b_{2l}^{(l+1)}(x^{2l}) = 0$ がわかる．$l+1 \leq k \leq m$ なる k に対して $b_{2l}^{(k)}(x^{2l}) = 0$ が成り立つとき，(3.15) で $q = m+1$ とすれば

$$\frac{s^l b_{2l}^{(l)}(x^{2l})}{l!} = \frac{s^l b_{2l}^{(l)}(x^{2l})}{l!} + \frac{s^{m+1} b_{2l}^{(m+1)}(x^{2l})}{(m+1)!} + o(s^{m+1})$$

より $b_{2l}^{(m+1)}(x^{2l}) = 0$ を得る．

(3)　(1) より $b_{2k-1,s} = 0$ なので，任意の $u \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\int e^{-s|z|^2} \langle z, u \rangle^{2k-1} \, d\lambda(z) = 0$$

となる．また (1) より $b_{2k,s}(x^{2k}) = (k!)^{-1} s^k b_{2k}^{(k)}(x^{2k})$ である．これと (2) から，任意の $u \in \operatorname{supp}\lambda$ に対して

$$\begin{aligned}
\int e^{-s|z|^2} \langle z, u \rangle^{2k} \, d\lambda(z) &= \left(\frac{\pi}{s}\right)^{m/2} \frac{(2k)!}{2^{2k} s^{2k}} b_{2k,s}(u^{2k}) \\
&= \left(\frac{\pi}{s}\right)^{m/2} \frac{(2k)!}{k! 2^{2k} s^k} b_{2k}^{(k)}(u^{2k}) \\
&= \left(\frac{\pi}{s}\right)^{m/2} \frac{(2k)!}{k! 2^{2k} s^k} |u|^{2k}
\end{aligned}$$

となる．

一方で $\{e_1, \ldots, e_m\}$ を $\mathbb{R}^m$ の正規直交基底とし，$f = |u|\, e_1$ と定めると，フビニの定理より

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} e^{-s|x|^2} \langle x, f\rangle^{2k}\, d\mathcal{L}^m(x) &= |u|^{2k} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} e^{-s|y|^2}\, d\mathcal{L}^{m-1}(y) \int_{\mathbb{R}} e^{-st^2} t^{2k}\, d\mathcal{L}^1(t) \\
&= \left(\frac{\pi}{s}\right)^{m/2} \frac{(2k)!}{k! 2^{2k} s^k} |u|^{2k}, \\
\int_{\mathbb{R}^m} e^{-s|x|^2} \langle x, f\rangle^{2k-1}\, d\mathcal{L}^m(x) &= |u|^{2k-1} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} e^{-s|y|^2}\, d\mathcal{L}^{m-1}(y) \int_{\mathbb{R}} e^{-st^2} t^{2k-1}\, d\mathcal{L}^1(t) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

また一般の $|f| = |u|$ を満たす $f \in \mathbb{R}^m$ の場合でも，$f/|f|$ を含む正規直交基底を取れば同様に計算することができる．

よって $u \in \operatorname{supp} \lambda$ と $f \in \mathbb{R}^m$ が $|u| = |f|$ を満たすならば

$$\int e^{-s|z|^2} \langle z, u\rangle^j\, d\lambda(z) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-s|x|^2} \langle x, f\rangle^j\, d\mathcal{L}^m(x) \tag{3.16}$$

が成り立つ．

ここで $Y = [0, \infty) \times \mathbb{R}$ とする．(3) を示すには，任意の $\varphi \in C_c(Y)$ が

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|z|, \langle z, u\rangle)\, d\lambda(z) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(|x|, \langle x, f\rangle)\, d\mathcal{L}^m(x) \tag{3.17}$$

を満たすことを示せばよい．実際，

$$\begin{aligned}
A &= \{(x, y) \in Y \mid |y| \geq 1\}, \\
B_k &= \{(x, y) \in Y \mid |y| \leq 1 - 1/k,\, x \leq k\}, \\
\varphi_k(z) &= \frac{d(z, A)}{d(z, A) + d(z, B_k)} \qquad (z \in Y)
\end{aligned}$$

とすると，$\varphi_k \in C_c(Y)$ である．また仮定よりこの φ_k は (3.17) を満たしており，単調増加で $\mathbf{1}_{|y| \leq 1}$ に各点収束するので，単調収束定理より (3.12) を得る．

$\varphi(x, y) = e^{-sx^2} y^j$ とすると，(3.16) よりこの φ は (3.17) を満たす．また (3.16) の両辺を s で k 回微分することで，関数 $(x, y) \mapsto e^{-sx^2} x^{2k} y^j$ が (3.17) を満たすことがわかる．よって関数 $(x, y) \mapsto e^{-sx^2} x^{2k} y^j \sum_{i=0}^N (-1)^i s^i y^{2i}/i!$ も (3.17) を満たす．

よって $|u| = |f| < 1$ のとき，優収束定理より

$$\begin{aligned}
\lim_{N \to \infty} \int e^{-s|z|^2} |z|^{2k} \langle f, z\rangle^j \left(\sum_{i=0}^N (-1)^i \frac{s^i \langle f, z\rangle^{2i}}{i!}\right) d\mathcal{L}^m(z) &= \int e^{-s(|z|^2 + \langle z, f\rangle^2)} |z|^{2k} \langle f, z\rangle^j\, d\mathcal{L}^m(z), \\
\lim_{N \to \infty} \int e^{-s|z|^2} |z|^{2k} \langle u, z\rangle^j \left(\sum_{i=0}^N (-1)^i \frac{s^i \langle u, z\rangle^{2i}}{i!}\right) d\lambda(z) &= \int e^{-s(|z|^2 + \langle z, u\rangle^2)} |z|^{2k} \langle u, z\rangle^j\, d\lambda(z),
\end{aligned}$$

となるので，関数 $(x, y) \mapsto e^{-s(x^2 + y^2)} x^{2k} y^j$ も (3.17) を満たす．

ここで $\mathcal{C} = \{e^{-s(x^2+y^2)} Q(x^2, y) \mid s > 0, Q \in \mathbb{R}[x, y]\}$ と定め，$\mathcal{C}$ で生成される線形空間を $\mathcal{C}_0$ とする．このとき，ストーン・ワイエルシュトラスの定理より，$\mathcal{C}_0$ は $C_0(Y)$ 内で稠密である．

よって $\varphi \in C_c(Y)$ を任意に取ると，$\mathcal{C}_0$ 内の関数列 $\{f_i\}$ であって，f_i が Y 上 $e^{|\cdot|^2}\varphi$ に一様収束するようなものが取れる．$g_i = e^{-|\cdot|^2} f_i$ とすると，$g_i \in \mathcal{C}_0$ であり，g_i は φ に Y 上で一様収束しており，かつ

$|g_i(y)| \leq Ce^{-|y|^2}$ が成り立つ．よって優収束定理より

$$\lim_{i\to\infty}\int g_i(|z|, \langle z, f\rangle)\, d\mathcal{L}^m = \int \varphi(|z|, \langle z, f\rangle)\, d\mathcal{L}^m$$
$$\lim_{i\to\infty}\int g_i(|z|, \langle z, u\rangle)\, d\lambda = \int \varphi(|z|, \langle z, u\rangle)\, d\lambda$$

となるので φ は (3.17) を満たす．

□

定義 3.22 $T\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を双線形汎関数とする．このとき n 次正方実行列 A が存在して，任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して $T(x,y) = {}^t xAy$ が成り立つ．このとき T のトレース $\operatorname{Tr} T$ を $\operatorname{Tr} T = \operatorname{Tr} A$ で定義する．

注意 3.23 $T\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が双線形汎関数のとき，$\{e_i\}_i$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底ならば

$$\operatorname{Tr} T = \sum_{i=1}^n T(e_i, e_i)$$

が成り立つ．

次の補題は [2] の Lemma 8.7 を参照した．

補題 3.24 $\lambda \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ が錐であるとき，$\operatorname{Tr} b_2^{(1),\lambda} = \operatorname{Tr} b_{2,1}^{\lambda} = m$ が成り立つ．

証明． 命題 3.21 の (1) より $b_{2,1} = b_2^{(1)}$ であるから，$\operatorname{Tr} b_{2,1} = \operatorname{Tr} b_2^{(1)}$ はよい．$\{e_i\}_i$ を $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底とすると，注意 3.23 より

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr} b_{2,1} &= \sum_{i=1}^n b_{2,1}(e_i^2) \\
&= \sum_{i=1}^n 2I(1)^{-1} \int \langle z, e_i\rangle^2 e^{-|z|^2}\, d\lambda(z) \\
&= \frac{2}{\pi^{m/2}} \int \sum_{i=1}^n \langle z, e_i\rangle^2 e^{-|z|^2}\, d\lambda(z) \\
&= \frac{2}{\pi^{m/2}} \int |z|^2 e^{-|z|^2}\, d\lambda(z) \\
&= m.
\end{aligned}$$

□

ここまでに示したことを用いて命題 3.20 を示す．

証明．（命題 3.20 の証明） $m = 0$ のときは $\mathcal{U}^0(\mathbb{R}^n) = \{\delta_0\}$（$\delta_0$ はディラック測度）であり，δ_0 は錐ではないのでよい．

以下，$m \geq 1$ とする．$b_2^{(1)}$ は対称双線形汎関数なので，対称行列 A が存在して $b_2^{(1)}(x,y) = {}^t xAy$ となる．$b_2^{(1)}(x^2) \geq 0$ なので，A は非負定値である．よって直交行列 P と非負の固有値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ が存在して

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & \\ & \alpha_2 & & O & \\ & & \ddots & & \\ & O & & \alpha_{n-1} & \\ & & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

となる．ここで $P^{-1} = (e_1, \ldots, e_n)$ なる正規直交基底 $\{e_i\}_i$ をとると，任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned} b_2^{(1)} &= {}^t(Px)PAP^{-1}(Py) \\ &= (\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle) \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & \\ & \alpha_2 & & O & \\ & & \ddots & & \\ & O & & \alpha_{n-1} & \\ & & & & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle y, e_1\rangle \\ \vdots \\ \langle y, e_n\rangle \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x, e_i\rangle\langle y, e_i\rangle \end{aligned} \tag{3.18}$$

となる．必要であれば並び替えることで，$\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq 0$ を仮定してよい．

実は $\alpha_m \geq 1$ を示せば十分である．実際，補題 3.24 より $\sum_{i=1}^n \alpha_i = m$ なので，$\alpha_m \geq 1$ ならば $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 1$ と $\alpha_{m+1} = \cdots = \alpha_n = 0$ がしたがう．ここで V を $\{e_1, \ldots, e_m\}$ で生成される部分空間であるとする．このとき

$$b_2^{(1)}(x^2) = \langle x, e_1\rangle^2 + \cdots + \langle x, e_m\rangle^2 = |P_V(x)|^2$$

となる．命題 3.21 の (2) より $\operatorname{supp}\lambda \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid b_2^{(1)}(x^2) = |x|^2\}$ なので，$x \in \operatorname{supp}\lambda$ ならば $|P_V(x)|^2 = b_2^{(1)}(x^2) = |x|^2$ より $x \in V$ となる．よって $\operatorname{supp}\lambda \subset V$ であるから，系 3.5 より $\lambda = \mathcal{H}^m|_V$ となる．

ここからは $\alpha_m \geq 1$ を示す．

$m = 1$ のとき，$\lambda(B_1(0)) = \omega_1$ と $\lambda(\{0\}) = \lim_{r\to 0} \lambda(B_r(0)) = \lim_{r\to 0} \omega_1 r = 0$ より $\operatorname{supp}\lambda \setminus \{0\} \neq \emptyset$ がわかる．$x \in \operatorname{supp}\lambda \setminus \{0\}$ をとり $z = x/|x|$ とすると，命題 3.19 より $z \in \operatorname{supp}\lambda$ となる．よって命題 3.21 より $b_2^{(1)}(z^2) = |z|^2 = 1$ が成り立つ．よって

$$1 = b_2^{(1)}(z^2) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle z, e_i\rangle^2 \leq \alpha_1 \sum_{i=1}^n \langle z, e_i\rangle^2 = \alpha_1 |z|^2 = \alpha_1$$

を得る．

$m = 2$ のとき，$m = 1$ の場合と同様に $|z| = 1/2$ なる $z \in \operatorname{supp}\lambda$ をとり，$|f| = 1/2$ なる $f \in \mathbb{R}^2$ を取る．また $S = \{y \in \operatorname{supp}\lambda \mid |\langle y, z\rangle| \leq 1\}$ と定めると，命題 3.21 より

$$\lambda(S) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{|\langle y,z\rangle|\leq 1}\, d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{|\langle x,f\rangle|\leq 1}\, d\mathcal{L}^2(x) = \infty$$

となる．よって S は非有界なので，$\operatorname{supp}\lambda$ 内の点列 $\{z_j\}$ であって $|\langle z_j, z\rangle| \leq 1$ かつ $1 \leq |z_j| \to \infty$ なるものが取れる．$y_j = z_j/|z_j|$ と定めると，$y_j \in \operatorname{supp}\lambda$ なので，部分列を取ることで $\{y_j\}$ は $\operatorname{supp}\lambda$ 内の点 y に収束するようにできる．このとき

$$|\langle y, z\rangle| = \lim_{j\to\infty} \frac{|\langle z_j, z\rangle|}{|z_j|} = 0$$

となるので $\langle y, z\rangle = 0$ である．また $y \in \operatorname{supp}\lambda$ より $b_2^{(1)}(y^2) = |y|^2 = 1$ となる．ここで W を y と z で生成される部分空間とすると，$\{y, z/|z|\}$ が W の正規直交基底となるから，$\operatorname{Tr} b_2^{(1)}|_W = b_2^{(1)}(y^2) + b_2^{(1)}((z/|z|)) = 2$ となる．補題 3.24 より $\operatorname{Tr} b_2^{(1)} = 2$ であるから，$\operatorname{Tr} b_2^{(1)}|_{W^\perp} = 0$ となる．$\{f_i\}$ を $W^\perp$ の正規直交基底とすれ

ば命題 3.21 より

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr} b_2^{(1)}|_{W^\perp} &= \operatorname{Tr} b_{2,1}|_{W^\perp} \\ &= \sum_{i=1}^{\dim W^\perp} b_{2,1}(f_i^2) \\ &= 2I(1)^{-1} \int e^{-|z|^2} \sum_{i=1}^{\dim W^\perp} \langle z, f_i\rangle^2 \, d\lambda(z) \\ &= 2I(1)^{-1} \int e^{-|z|^2} d(z,W)^2 \, d\lambda(z)\end{aligned}$$

となる．よって $\int e^{-|z|^2} d(z,W)^2\, d\lambda(z) = 0$ であるから $\operatorname{supp}\lambda \subset V$ が成り立ち，系 3.5 より $\lambda = \mathcal{H}^m|_V$ となる．

$m \geq 3$ とする．W を m 次元部分空間とし，$\{f_i\}$ を $W^\perp$ の正規直交基底とすると，$m = 2$ の場合と同様に

$$\operatorname{Tr} b_2^{(1)}|_{W^\perp} = 2I(1)^{-1} \int e^{-|z|^2} d(z,W)^2 \, d\lambda(z)$$

が分かる．ここで V を $e_1, \ldots, e_m$ で生成される部分空間とすると，$V^\perp$ は $e_{m+1}, \ldots, e_n$ で生成される部分空間である．トレースは固有値の和なので，

$$\operatorname{Tr} b_2^{(1)}|_{V^\perp} = \min_{W \in G(m,n)} \operatorname{Tr} b_2^{(1)}|_{W^\perp}$$

が成り立つ．よって上の計算と仮定から

$$\int e^{-|z|^2} d(z,V)^2 \, d\lambda(z) = \min_{W \in G(m,n)} \int e^{-|z|^2} d(z,W)^2 \, d\lambda(z)$$

となる．

ここで W を一般の m 次元部分空間とするとき，$\int e^{-|z|^2} d(z,W)^2\, d\lambda(z)$ が $\int_{B_1(0)} d(z,W)^2\, d\lambda(z)$ の定数倍で表されることを示す．$\mu = d(\cdot, W)^2\lambda$ とおくと，フビニの定理より

$$\begin{aligned}\int e^{-|z|^2} d(z,W)^2 \, d\lambda(z) &= \int e^{-|z|^2} \, d\mu(z) \\ &= \int_0^1 \mu(\{z \in \mathbb{R}^n \mid e^{-|z|^2} \geq t\}) \, dt \\ &= \int_0^1 \mu(\{z \in \mathbb{R}^n \mid |z| \leq (-\log t)^{1/2}\}) \, dt\end{aligned}$$

となる．ここで $r = (-\log t)^{1/2}$ と変数変換をすると

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mu(\{z \in \mathbb{R}^n \mid |z| \leq (-\log t)^{1/2}\}) \, dt &= \int_\infty^0 \left(\int_{B_r(0)} d\mu \right) (-2re^{-r^2}) \, dr \\ &= \int_0^\infty 2re^{-r^2} \left(\int_{B_r(0)} d(z,W)^2 \, d\lambda \right) dr.\end{aligned}$$

λ は錐であるから

$$\begin{aligned}\int_{B_r(0)} d(z,W)^2\,d\lambda(z) &= r^2\int_{B_r(0)} d(r^{-1}z,W)^2\,d\lambda(z)\\ &= r^2\int_{B_1(0)} d(v,W)^2\,d\lambda_{0,r}(v)\\ &= r^{m+2}\int_{B_1(0)} d(v,W)^2\,d\lambda(v)\end{aligned}$$

が成り立つ．よって

$$\int e^{-|z|^2}d(z,W)^2\,d\lambda(z) = \int_0^\infty 2r^{m+3}e^{-r^2}\,dr\int_{B_1(0)} d(v,W)^2\,d\lambda(v)$$

となる．したがって

$$\min_{V\in G(m,n)}\int_{B_1(0)} d(x,V)^2\,d\lambda(x)\le\varepsilon$$

ならば

$$\int e^{-|z|^2}d(z,V)^2\,d\lambda(z) = \min_{W\in G(m,n)}\int e^{-|z|^2}d(z,W)^2\,d\lambda(z)\le C(m)\varepsilon$$

となる．

ここで $(m-1)^2\delta^2-(1-\delta)^2<0$ なる $\delta>0$ をとる．この δ に対して，ε が十分に小さければ任意の $e\in V\cap\overline{B_1(0)}$ に対して $|x-e|<\delta$ なる $x\in\operatorname{supp}\lambda$ が存在する．実際それが成り立たないとすると，錐である測度 $\lambda_k\in\mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$，$m$ 次元部分空間 V_k，$x_k\in V_k\cap\overline{B_1(0)}$ が存在して，$\lambda_k(B_\delta(x_k))=0$ かつ

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2}d(z,V_k)^2\,d\lambda_k(z)=0 \tag{3.19}$$

が成り立つ．必要であれば V_k,λ_k,x_k をそれぞれ回転することで任意の k に対して $V_k=W$ と仮定してよい．また部分列を取ることで点列 $\{x_k\}$ がある $x\in W\cap\overline{B_1(0)}$ に収束しているとしてよい．さらに $\lambda_k\in\mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ であるから，命題 3.6 より部分列をとることで $\{\lambda_k\}$ はある m 次一様測度 λ に弱収束するとしてよい．よって (3.19) より

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2}d(z,W)^2\,d\lambda(z)=0$$

となるので $\operatorname{supp}\lambda\subset W$ が成り立つ．よって命題 3.4 より $\lambda=\mathcal{H}^m|_W$ となる．だが $\lambda(B_\delta(x))=\lim_{k\to\infty}\lambda_k(B_\delta(x_k))=0$ となり $x\in W$ に矛盾する．

よって ε を十分に小さくとると $e_m\in V\cap\overline{B_1(0)}$ に対して $|x-e_m|<\delta$ なる $x\in\operatorname{supp}\lambda$ が取れる．任意の $i\le m-1$ に対して $\alpha_i+(m-1)\alpha_m\le\operatorname{Tr}b_2^{(1)}=m$ より $\alpha_i-1\le(m-1)(1-\alpha_m)$ が成り立つ．一方 $i\ge m$ のときは $\alpha_i\le\alpha_m\le 1$ が成り立つ．また $x\in\operatorname{supp}\lambda$ なので $\sum_{i=1}^n\alpha_i\langle x,e_i\rangle^2=b_2^{(1)}(x^2)=|x|^2$ が成り立つ．

よって

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - 1)\langle x, e_i\rangle^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{m}(\alpha_i - 1)\langle x, e_i\rangle^2 \\
&\leq (m-1)(1-\alpha_m)\sum_{i=1}^{m-1}\langle x, e_i\rangle^2 + (\alpha_m - 1)\langle x, e_m\rangle^2 \\
&= (m-1)(1-\alpha_m)\sum_{i=1}^{m-1}\langle x - e_m, e_i\rangle^2 - (1-\alpha_m)(\langle e_m, e_m\rangle + \langle x - e_m, e_m\rangle)^2 \\
&\leq (1-\alpha_m)\left((m-1)\sum_{i=1}^{m-1}|x - e_m|^2 - (1 - |x - e_m|)^2\right) \\
&\leq (1-\alpha_m)((m-1)^2\delta^2 - (1-\delta)^2).
\end{aligned}$$

ここで $(m-1)^2\delta^2 - (1-\delta)^2 < 0$ なので $\alpha_m \geq 1$ となる. □

3.3 無限遠における平坦性

m 次一様測度は無限遠で平坦となるとき，その測度自身も平坦となる．次の定理は [2] の Proposition 9.1 を参照した.

定理 3.25 $\mu \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ とし，ある m 次元部分空間 V に対して $\mathcal{H}^m|_V \in \mathrm{Tan}_m(\mu, \infty)$ が成り立つとする．このとき，$\mu = \mathcal{H}^m|_V$ が成り立つ.

注意 3.26 定理 3.10 より，$\mathcal{H}^m|_V \in \mathrm{Tan}_m(\mu, \infty)$ のとき $\mathrm{Tan}_m(\mu, \infty) = \{\mathcal{H}^m|_V\}$ であり，$r \to 0$ のとき $r^{-m}\mu_{0,r} \rightharpoonup \mathcal{H}^m|_V$ となることがわかっている.

この定理の仮定が満たされるとき，$b_j^{(k)}$ について次が分かる．次の命題は [2] の Lemma 9.2 と Lemma 9.4 を参照した.

命題 3.27 $\mu \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ とし，ある m 次元部分空間 V に対して $\mathcal{H}^m|_V \in \mathrm{Tan}_m(\mu, \infty)$ が成り立つとする．このとき，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して以下が成り立つ:

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$b_{2k}^{\mu,(k)}(x^{2k}) = k! b_{2k,1}^{\mathcal{H}^m|_V}(x^{2k}) = b_{2k}^{\mathcal{H}^m|_V,(k)}(x^{2k}) = |P_V(x)|^{2k},$$

(2) $b_{2k-1}^{(k)}|_V = 0$,

(3) 任意の $x \in \operatorname{supp}\mu$ に対して $b_1^{(1)}(x) = |Q_V(x)|^2 \leq \left\|b_1^{(1)}\right\|^2$,

(4) $r_0 > 0$ が存在して，任意の $v \in V$ に対して $d(v, \operatorname{supp}\mu) < r_0$.

注意 3.28 (2) より V 上 $b_1^{(1)} = 0$ であるから，リースの表現定理より $b_1^{(1)}(x) = 2\langle b, x\rangle$ なる $b \in V^{\perp}$ が存在する.

証明.　(1)　$s = r^{-2} > 0$ とする．このとき $r \to \infty$ のとき $r^{-m}\mu_{0,r} \rightharpoonup \mathcal{H}^m|_V$ なので，命題 3.8 より

$$\begin{aligned}
s^{-k} b^{\mu}_{2k,s}(u_1, \dots, u_{2k}) &= r^{2k} b_{2k,r^{-2}}(u_1, \dots, u_{2k}) \\
&= r^{2k} \frac{(2r^{-2})^{2k}}{(2k)!} I(r^{-2})^{-1} \int \langle z, u_1 \rangle \cdots \langle z, u_{2k} \rangle e^{-r^{-2}|z|^2}\, d\mu(z) \\
&= \frac{2^{2k}}{r^{m+2k}(2k)!\pi^{m/2}} \int \langle z, u_1 \rangle \cdots \langle z, u_{2k} \rangle e^{-r^{-2}|z|^2}\, d\mu(z) \\
&= \frac{2^{2k}}{r^{m}(2k)!\pi^{m/2}} \int \langle r^{-1}z, u_1 \rangle \cdots \langle r^{-1}z, u_{2k} \rangle e^{-\left|r^{-1}z\right|^2}\, d\mu(z) \\
&= \frac{2^{2k}}{(2k)!\pi^{m/2}} \int \langle z, u_1 \rangle \cdots \langle z, u_{2k} \rangle e^{-|z|^2}\, d\left(\frac{\mu_{0,r}}{r^m}\right)(z) \\
&\to \frac{2^{2k}}{(2k)!\pi^{m/2}} \int \langle z, u_1 \rangle \cdots \langle z, u_{2k} \rangle e^{-|z|^2}\, d(\mathcal{H}^m|_V)(z) \\
&= b^{\mathcal{H}^m|_V}_{2k,1}(u_1, \dots, u_{2k})
\end{aligned} \tag{3.20}$$

となる．命題 3.16 より

$$b^{\mu}_{2k,s}(u_1, \dots, u_{2k}) = \frac{s^k}{k!} b^{(k)}_{2k}(u_1, \dots, u_{2k}) + o(s^k)$$

なので

$$\lim_{s \to 0} s^{-k} b^{\mu}_{2k,s}(u_1, \dots, u_{2k}) = \frac{1}{k!} b^{(k)}_{2k}(u_1, \dots u_{2k}) \tag{3.21}$$

となる．よって (3.20) と (3.21) より

$$\begin{aligned}
b^{(k)}_{2k}(x^{2k}) &= k! b^{\mathcal{H}^m|_V}_{2k,1}(x^{2k}) \\
&= k! \frac{2^{2k}}{(2k)!\pi^{m/2}} \int_V \langle z, x \rangle^{2k} e^{-|z|^2}\, d\mathcal{H}^m(z) \\
&= k! \frac{2^{2k}\left|P_V(x)\right|^{2k}}{(2k)!\pi^{m/2}} \int_V \left\langle z, \frac{P_V(x)}{|P_V(x)|} \right\rangle^{2k} e^{-|z|^2}\, d\mathcal{H}^m(z).
\end{aligned}$$

ここで $t_1 = P_V(x)/\left|P_V(x)\right|$ を含む V の正規直交基底をとってフビニの定理を用いると

$$\begin{aligned}
b^{(k)}_{2k}(x^{2k}) &= k! \frac{2^{2k}\left|P_V(x)\right|^{2k}}{(2k)!\pi^{m/2}} \int_{\mathbb{R}} t^{2k} e^{-t^2}\, d\mathcal{L}^1(t) \int_{\mathbb{R}^{m-1}} e^{-|w|^2}\, d\mathcal{L}^{m-1}(w) \\
&= k! \frac{2^{2k}\left|P_V(x)\right|^{2k}}{(2k)!\pi^{m/2}} \cdot \frac{(2k)!}{2^{2k}k!} \pi^{1/2} \cdot \pi^{(m-1)/2} \\
&= \left|P_V(x)\right|^{2k}
\end{aligned}$$

を得る．

(2)　$b^{(k)}_{2k-1}|_V$ は V 上の多重対称線形汎関数なので，補題 2.18 より任意の $y \in V$ について $b^{(k)}_{2k-1}(y^{2k-1}) = 0$ を示せばよい．$y \in V \setminus \{0\}$ を取り，固定する．このとき $\operatorname{supp}\mu$ 内の点列 $\{x_j\}$ で，$j \to \infty$ のとき $1 \leq |x_j| \to \infty$ かつ $x_j/|x_j| \to y/|y|$ となるものが存在する．実際，$r^{-m}\mu_{0,r} \rightharpoonup \mathcal{H}^m|_V$ なので命題 2.9 より $\{z_j\}$ が $y/|y|$ に収束するように $z_j \in \operatorname{supp}\mu_{0,j}$ を取ることができる．$j \operatorname{supp}\mu_{0,j} = \operatorname{supp}\mu$ より $jz_j \in \operatorname{supp}\mu$ であるから，$x_j = jz_j$ と定めればよい．

各 j について $x_j \in \operatorname{supp}\mu$ なので命題 3.16 より

$$\sum_{i=1}^{2k} b_i^{(k)}(x_j^i) = |x_j|^{2k}$$

が成り立つ．よって $k \geq 2$ のとき

$$b_{2k-1}^{(k)}(x_j^{2k-1}) = |x_j|^{2k} - b_{2k}^{(k)}(x_j^{2k}) - \sum_{i=1}^{2k-2} b_i^{(k)}(x_j^i)$$

となる．(1) より $b_{2k}^{(k)}(x_j^{2k}) = |P_V(x_j)|^{2k} \leq |x_j|^{2k}$ であるから

$$b_{2k-1}^{(k)}(x_j^{2k-1}) \geq -\sum_{i=1}^{2k-2} b_i^{(k)}(x_j^i)$$

となる．よって

$$b_{2k-1}^{(k)}(y^{2k-1}) = |y|^{2k-1} \lim_{j\to\infty} |x_j|^{-(2k-1)} b_{2k-1}^{(k)}(x_j^{2k-1}) \geq -|y|^{2k-1} \lim_{j\to\infty} |x_j|^{-(2k-1)} \sum_{i=1}^{2k-2} b_i^{(k)}(x_j^i)$$

となる．ここで $1 \leq i \leq 2k-2$ のとき $b_i^{(k)}(x_j^i) \leq C|x_j|^i \leq C|x_j|^{2k-2}$ なので，

$$b_{2k-1}^{(k)}(y^{2k-1}) \geq -|y|^{2k-1} \lim_{j\to\infty} |x_j|^{-(2k-1)} C(2k-2)|x_j|^{2k-2} = 0$$

となる．また $-y \in V$ なので $-b_{2k-1}^{(k)}(y^{2k-1}) = b_{2k-1}^{(k)}((-y)^{2k-1}) \geq 0$ となるから，結局 $b_{2k-1}^{(k)}(y^{2k-1}) = 0$ がしたがう．
$k=1$ のときは $b_1^{(1)}(x_j) = |x_j|^2 - b_2^{(1)}(x_j^2) \geq 0$ であるから，この式で $j \to \infty$ とすれば $b_1^{(1)}(y) \geq 0$ を得るのでよい．

(3) 命題 3.16 より各 $x \in \operatorname{supp}\mu$ に対して $b_1^{(1)}(x) + b_2^{(1)}(x^2) = |x|^2$ が成り立つ．よって (1) より $b_1^{(1)}(x) + |P_V(x)|^2 = |x|^2$ となる．ここで $|x|^2 = |P_V(x)|^2 + |Q_V(x)|^2$ なので $b_1^{(1)}(x) = |Q_V(x)|^2$ が成り立つ．また注意 3.28 でとった $b \in V^\perp$ を用いると

$$|Q_V(x)|^2 = 2\langle b, x\rangle = 2\langle b, Q_V(x)\rangle \leq 2|b||Q_V(x)|$$

となることがわかる．よって $|Q_V(x)| \leq 2|b| = \left\| b_1^{(1)} \right\|$ が成り立つ．

(4) そうでないと仮定すると，V 内の点列 $\{x_k\}$ で，$r_k = d(x_k, \operatorname{supp}\mu) \to \infty$ となるものが存在する．$\operatorname{supp}\mu$ は閉集合なので，$|x_k - y_k| = r_k$ なる $y_k \in \operatorname{supp}\mu$ が取れる．ここで $z_k = P_V(y_k)$ とおくと，(3) より $|y_k - z_k| = d(y_k, V) = |Q_V(y_k)| \leq \left\| b_1^{(1)} \right\|$ となる．よって $\mu_k = r_k^{-m}\mu_{z_k, r_k}$ と定めると，命題 2.11 より $\{\mu_k\}$ の部分列を取ることで（添え字を改めて付け直す.），$\{\mu_k\}$ はあるラドン測度 μ_∞ に弱収束する．$x \in \operatorname{supp}\mu_k$ のとき $z_k + r_k x \in \operatorname{supp}\mu$ であるから，各 $r > 0$ に対して

$$\mu_k(B_r(x)) = r_k^{-m}\mu(B_{rr_k}(z + r_k x)) = \omega_m r^m$$

が成り立つ．よって μ_k は m 次一様測度であり，命題 3.6 より μ_∞ も m 次一様測度となる．また

$k \to \infty$ のとき

$$\begin{aligned} d(0, \operatorname{supp} \mu_k) &= \inf_{x \in \operatorname{supp} \mu} \left| \frac{x - z_k}{r_k} \right| \\ &= r_k^{-1} \inf_{x \in \operatorname{supp} \mu} |x - z_k| \\ &\leq r_k^{-1} |y_k - z_k| \\ &\leq r_k^{-1} \left\| b_1^{(1)} \right\| \\ &\to 0 \end{aligned}$$

となるので $0 \in \operatorname{supp} \mu_\infty$ となる．よって $\mu_\infty \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ である．
ここで $x \in \operatorname{supp} \mu_k$ のとき $x = (y - z_k)/r_k$ なる $y \in \operatorname{supp} \mu$ が存在する．よって

$$|Q_V(x)| = r_k^{-1} |Q_V(y) - Q_V(z_k)| = r_k^{-1} |Q_V(y)| \leq r_k^{-1} \left\| b_1^{(1)} \right\|$$

より $\operatorname{supp} \mu_k \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid |Q_V(x)| \leq r_k^{-1} \left\| b_1^{(1)} \right\|\}$ となる．よって $\operatorname{supp} \mu_\infty \subset V$ となるので，命題 3.4 より $\mu_\infty = \mathcal{H}^m|_V$ となる．
一方 $w_k = x_k - z_k$ とすると $w_k \in V$ であり，

$$\frac{r_k - \left\| b_1^{(1)} \right\|}{r_k} \leq \frac{|w_k|}{r_k} \leq \frac{r_k + |y_k - z_k|}{r_k} \leq \frac{r_k + \left\| b_1^{(1)} \right\|}{r_k}$$

より $r_k^{-1} |w_k| \to 1$ となる．よって部分列を取ることで，$\{w_k/r_k\}$ がある $u \in V$ に収束するようにできる．$B_{r_k}(x_k) \cap \operatorname{supp} \mu = \emptyset$ より

$$0 = \mu(B_{r_k}(x_k)) = \mu_k(B_1(w_k/r_k)) \to (\mathcal{H}^m|_V)(B_1(u))$$

となるが，これは $u \in V$ に矛盾する． □

$b = 0$ を示すことができれば，命題 3.27 の (3) より $\operatorname{supp} \mu \subset V$ となるので μ が平坦となることがわかる．よってここからは $b = 0$ を示すことが目標となる．
$b = 0$ を示すために $b_2^{(2)}$ のトレースに着目する．次の命題は [2] の Proposition 9.5 を参照した．

命題 3.29 $\mu \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ とし，ある m 次元部分空間 V に対して $\mathcal{H}^m|_V \in \operatorname{Tan}_m(\mu, \infty)$ が成り立つとする．このとき，以下が成り立つ:

(1) $\operatorname{Tr} b_2^{(2)} = 0$,
(2) $\operatorname{Tr} b_2^{(2)}|_{V^\perp} = 2 \left\| b_1^{(1)} \right\|^2$.

証明. (1) 命題 3.16 より

$$b_{2,s}^\mu = s b_2^{(1)} + \frac{1}{2} s^2 b_2^{(2)} + o(s^2)$$

なので，

$$\operatorname{Tr} b_2^{(2)} = 2 \lim_{s \to 0} \frac{\operatorname{Tr}(s^{-1} b_{2,s}) - \operatorname{Tr} b_2^{(1)}}{s}$$

が成り立つ．ここで命題 3.27 より $x \in \operatorname{supp} \mu$ に対して $b_2^{(1)}(x^2) = |P_V(x)|^2$ なので，標準基底に関する P_V の表現行列を A とすると，$b_2^{(1)}(u, v) = \langle P_V(u), P_V(v) \rangle = {}^t u {}^t A A v = {}^t u A v$ となる．よって $\operatorname{Tr} b_2^{(1)} = \operatorname{Tr} A = \dim V = m$ なので，あとは $\operatorname{Tr}(s^{-1} b_{2,s}) = m$ を示せばよい．

$e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底とすると，命題 3.7 より

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(s^{-1}b_{2,s}) &= s^{-1}\sum_{i=1}^{n} b_{2,s}(e_i^2) \\
&= s^{-1}\frac{(2s)^2}{2!}I(s)^{-1}\int\sum_{i=1}^{n} e^{-s|z|^2}\langle z, e_i\rangle^2\,d\mu \\
&= 2s\frac{s^{m/2}}{\pi^{m/2}}\int |z|^2\,e^{-s|z|^2}\,d\mu \\
&= 2s\frac{s^{m/2}}{\pi^{m/2}}\int |z|^2\,e^{-s|z|^2}\,d\mathcal{L}^m \\
&= m
\end{aligned}$$

を得る．よって $\operatorname{Tr} b_2^{(2)} = 0$ である．

(2) 命題 3.27 より $b_2^{(1)} = k! b_{2,1}^{\mathcal{H}^m|_V}$ なので，$b_2^{(1)}|_{V^\perp} = 0$ である．また命題 3.16 より $b_{2,s}^{\mu} = sb_2^{(1)} + \frac{1}{2}s^2 b_2^{(2)} + o(s^2)$ なので

$$\operatorname{Tr} b_2^{(2)}|_{V^\perp} = 2\lim_{s\to 0}\frac{\operatorname{Tr} b_{2,s}|_{V^\perp} - s\operatorname{Tr} b_2^{(1)}|_{V^\perp}}{s^2} = 2\lim_{s\to 0}\frac{\operatorname{Tr} b_{2,s}|_{V^\perp}}{s^2}$$

となる．

ここで $e_1, \ldots, e_{n-m}$ を $V^\perp$ の正規直交基底とすると

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr} b_{2,s}|_{V^\perp} &= \sum_{i=1}^{n-m} b_{2,s}(e_i^2) \\
&= 2s^2 I(s)^{-1}\int\sum_{i=1}^{n-m}\langle z, e_i\rangle^2 e^{-s|z|^2}\,d\mu \\
&= 2s^2 I(s)^{-1}\int |Q_V(z)|^2\,e^{-s|z|^2}\,d\mu
\end{aligned}$$

となる．命題 3.27 より，各 $z \in \operatorname{supp}\mu$ に対して $b_1^{(1)}(z) = |Q_V(z)|^2$ が成り立つ．また命題 3.16 より $b_{1,s}(z) = sb_1^{(1)}(z) + o(s) = 2s\langle b, z\rangle + o(s)$ であるから，

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr} b_2^{(2)}|_{V^\perp} &= 2\lim_{s\to 0}\frac{\operatorname{Tr} b_{2,s}|_{V^\perp}}{s^2} \\
&= 4\lim_{s\to 0} I(s)^{-1}\int e^{-s|z|^2} b_1^{(1)}(z)\,d\mu \\
&= 8\lim_{s\to 0} I(s)^{-1}\int e^{-s|z|^2}\langle b, z\rangle\,d\mu \\
&= 4\lim_{s\to 0} s^{-1} b_{1,s}(b) \\
&= 8\,|b|^2 \\
&= 2\left\|b_1^{(1)}\right\|^2
\end{aligned}$$

となる． □

命題 3.29 と次の命題から $b = 0$ を示すことができる．次の命題は [2] の Proposition 9.5 を参照した．

命題 3.30　$\mu \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ とし，ある m 次元部分空間 V に対して $\mathcal{H}^m|_V \in \mathrm{Tan}_m(\mu, \infty)$ が成り立つとする．このとき

$$\operatorname{Tr} b_2^{(2)}|_V \geq -\frac{2m}{m+2} \left\| b_1^{(1)} \right\|^2 .$$

この命題を示すために，次のような測度と双線形汎関数を導入する．次の定義は [2] で用いられている定義を採用した．

定義 3.31　$\mathbb{R}^n$ 上の測度 γ を $\gamma = (2\pi)^{-m/2} e^{-|z|^2/2}\, \mathcal{H}^m|_V$ と定義する．

$u \in V$ とする．$w \in V$ を $3b_3^{(2)}(u^2, w) - 4\,|u|^2 \langle b, w\rangle$ に対応させる写像は線形なので，リースの表現定理より

$$\langle \omega'(u), w\rangle = 3b_3^{(2)}(u^2, w) - 4\,|u|^2 \langle b, w\rangle$$

となるような w に依らない $\omega'(u) \in \mathbb{R}^n$ が存在する．$\omega' \colon V \to \mathbb{R}$ は 2 次斉次写像なので，$\omega(u^2) = \omega'(u)$ を満たす双線形写像 $\omega \colon V \times V \to \mathbb{R}^n$ が存在する．さらに双線形汎関数 $\hat{b} \colon V \times V \to \mathbb{R}$ を

$$\hat{b}(u^2) = b_2^{(2)}(u^2) + \langle \omega(u^2), b\rangle$$

で定義する．

注意 3.32　命題 3.27 より $b_3^{(2)}|_V = 0$ なので，$u, w \in V$ のとき

$$\langle \omega(u^2), w\rangle = 3b_3^{(2)}(u^2, w) - 4\,|u|^2 \langle b, w\rangle = 0$$

となることから $\omega(u^2) \in V^{\perp}$ がしたがう．

まず $\operatorname{Tr} b_2^{(2)}|_V$ を $\hat{b}$ と γ を用いて表現する．次の命題は [2] の Lemma 9.9 を参照した．

命題 3.33　$\mu \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ とし，ある m 次元部分空間 V に対して $\mathcal{H}^m|_V \in \mathrm{Tan}_m(\mu, \infty)$ が成り立つとする．このとき

$$\operatorname{Tr} b_2^{(2)}|_V = \int \hat{b}(v^2)\, d\gamma(v)$$

が成り立つ．

証明．　初めに

$$\operatorname{Tr} b_2^{(2)}|_V = \int b_2^{(2)}(v^2)\, d\gamma(v) \tag{3.22}$$

を示す．(3.18) と同様に，V における $b_2^{(2)}$ の固有値 λ_i と固有ベクトル v_i が存在して $b_2^{(2)}(v^2) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle v, v_i\rangle^2$ と表せる．よって

$$\begin{aligned}
\int b_2^{(2)}(v^2)\, d\gamma(v) &= (2\pi)^{-m/2} \int_V \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle v, v_i\rangle^2 e^{-|v|^2/2}\, d\mathcal{H}^m(v) \\
&= (2\pi)^{-m/2} \sum_{i=1}^m \lambda_i \int_{\mathbb{R}^m} x_i^2 e^{-|x|^2/2}\, d\mathcal{L}^m(x) \\
&= \sum_{i=1}^m \lambda_i \\
&= \operatorname{Tr} b_2^{(2)}|_V
\end{aligned}$$

となる．

よって

$$\int \langle \omega(v^2), b\rangle \, d\gamma(v) = 0$$

を示せばよい．

次に

$$\int \langle \omega(v^2), b\rangle \, d\gamma(v) = \lim_{s\to 0} \frac{8s}{I(s)} \int e^{-s|z|^2} \left|P_V(z)\right|^2 \langle z-b, b\rangle \, d\mu(z) \tag{3.23}$$

を示す．$z \in \mathbb{R}^m$ のとき，フビニの定理より

$$\begin{aligned}
\int_V \langle z, v\rangle^2 \, d\gamma(v) &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_V \langle P_V(z) + Q_V(z), v\rangle^2 e^{-|v|^2/2} \, d\mathcal{H}^m(v) \\
&= \frac{\left|P_V(z)\right|^2}{(2\pi)^{m/2}} \int_V \left\langle \frac{P_V(z)}{\left|P_V(z)\right|}, v \right\rangle^2 e^{-|v|^2/2} \, d\mathcal{H}^m(v) \\
&= \frac{\left|P_V(z)\right|^2}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}} t^2 e^{-t^2/2} \, d\mathcal{L}^1(t) \int_{\mathbb{R}^{m-1}} e^{-|x|^2/2} \, d\mathcal{L}^{m-1}(x) \\
&= \left|P_V(z)\right|^2
\end{aligned}$$

となる．また $v \in V$, $w \in V^\perp$ のとき，命題 3.16 より $b^\mu_{3,s}(v^2, w) = s^2 b_3^{(2)}(v^2, w) + o(s^2)$ なので，

$$\lim_{s\to 0} \frac{8s}{I(s)} \int \langle z, v\rangle^2 \langle z, w\rangle e^{-s|z|^2} \, d\mu = 3b_3^{(2)}(v^2, w)$$

となる．さらに $b_{2,s}(v^2) = sb_2^{(1)}(v^2) + o(s)$ より

$$\lim_{s\to 0} \frac{8s}{I(s)} \int \langle z, v\rangle^2 \langle b, w\rangle e^{-s|z|^2} \, d\mu = 4b_2^{(1)}(v^2)\langle b, w\rangle$$

となる．よって

$$\lim_{s\to 0} \frac{8s}{I(s)} \int \langle z, v\rangle^2 \langle z-b, w\rangle e^{-s|z|^2} \, d\mu = 3b_3^{(2)}(v^2, w) - 4b_2^{(1)}(v^2)\langle b, w\rangle \tag{3.24}$$

が成り立つ．命題 3.27 より $b_2^{(1)}(v^2) = \left|P_V(v)\right|^2 = |v|^2$ なので

$$\lim_{s\to 0} \frac{8s}{I(s)} \int \langle z, v\rangle^2 \langle z-b, w\rangle e^{-s|z|^2} \, d\mu = 3b_3^{(2)}(v^2, w) - 4\left|v\right|^2 \langle b, w\rangle = \langle \omega(v^2), w\rangle \tag{3.25}$$

となる．よって優収束定理とフビニの定理より

$$\begin{aligned}
\int_V \langle \omega(v^2), w\rangle \, d\gamma(v) &= \int_V \left(\lim_{s\to 0} \frac{8s}{I(s)} \int_{\mathbb{R}^n} \langle z, v\rangle^2 \langle z-b, w\rangle e^{-s|z|^2} \, d\mu(z) \right) d\gamma(v) \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{8s}{I(s)} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_V \langle z, v\rangle \, d\gamma(v) \right) \langle z-b, w\rangle e^{-s|z|^2} \, d\mu(z) \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{8s}{I(s)} \int_{\mathbb{R}^n} \left|P_V(z)\right|^2 \langle z-b, w\rangle e^{-s|z|^2} \, d\mu(z)
\end{aligned}$$

となる．

よって任意の $w \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\lim_{s\to 0} \frac{s}{I(s)} \int e^{-s|z|^2} \left|P_V(z)\right|^2 \langle z-b, w\rangle \, d\mu(z) = 0 \tag{3.26}$$

を示せばよい．

そのために，まず

$$\lim_{s\to 0}\frac{s}{I(s)}\int e^{-s|z|^2}\,|Q_V(z)|^2\,\langle z-b,w\rangle\,d\mu(z)=0 \tag{3.27}$$

を示す．命題 3.27 より $z\in\operatorname{supp}\mu$ に対して $|Q_V(z)|\le 2\,|b|$ なので，$s\to 0$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{s}{I(s)}\left|\int e^{-s|z|^2}\,|Q_V(z)|^2\,\langle z-b,w\rangle\,d\mu(z)\right| &\le Cs^{1+m/2}\int e^{-s|z|^2}(|z|+|b|)\,d\mu(z)\\
&= Cs^{1+m/2}\left(\frac{1}{s^{(1+m)/2}}\int |x|\,e^{-|x|^2}\,d\mathcal{L}^m+|b|\left(\frac{\pi}{s}\right)^{m/2}\right)\\
&= C's^{1/2}+C''s\\
&\to 0
\end{aligned}$$

となる．

次に

$$\lim_{s\to 0}\frac{s}{I(s)}\int e^{-s|z|^2}\,|z|^2\,\langle z-b,w\rangle\,d\mu(z)=0 \tag{3.28}$$

を示す．まず $e_1,\ldots,e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底とすれば

$$\frac{s}{I(s)}\int e^{-s|z|^2}\,|z|^2\,\langle z-b,w\rangle\,d\mu=\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{I(s)}\int e^{-s|z|^2}\langle z,e_i\rangle^2\langle z-b,w\rangle\,d\mu$$

なので，(3.24) より (3.28) の左辺の極限の存在は保証される．またロピタルの定理より

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0}\frac{s}{I(s)}\int e^{-s|z|^2}\,|z|^2\,\langle z-b,w\rangle\,d\mu(z) &= \pi^{-m/2}\lim_{s\to 0}\frac{\int e^{-s|z|^2}\,|z|^2\,\langle z-b,w\rangle\,d\mu}{s^{-1-m/2}}\\
&= \pi^{-m/2}\lim_{s\to 0}\frac{-(d/ds)\int e^{-s|z|^2}\langle z-b,w\rangle\,d\mu}{-(2/m)(d/ds)s^{-m/2}}\\
&= \frac{m}{2\pi^{m/2}}\lim_{s\to 0}\frac{\int e^{-s|z|^2}\langle z-b,w\rangle\,d\mu}{s^{-m/2}}\\
&= \frac{m}{2}\lim_{s\to 0}I(s)^{-1}\int e^{-s|z|^2}\langle z-b,w\rangle\,d\mu
\end{aligned}$$

となる．ここで $b_{1,s}(b)=sb_1^{(1)}(b)+o(s)$ より

$$\lim_{s\to 0}I(s)^{-1}\int e^{-s|z|^2}\langle z,w\rangle\,d\mu=\frac{1}{2}b_1^{(1)}(w)=\langle b,w\rangle$$

なので，

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0}\frac{s}{I(s)}\int e^{-s|z|^2}\,|z|^2\,\langle z-b,w\rangle\,d\mu &= \frac{m}{2}\lim_{s\to 0}I(s)^{-1}\int e^{-s|z|^2}\langle z-b,w\rangle\,d\mu\\
&= \frac{m}{2}\lim_{s\to 0}\left(I(s)^{-1}\int e^{-s|z|^2}\langle z,w\rangle\,d\mu-I(s)^{-1}\int e^{-s|z|^2}\langle b,w\rangle\,d\mu\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

となる．

$|z|^2=|P_V(z)|^2+|Q_V(z)|^2$ なので，(3.27) と (3.28) から (3.26) を得る．

よって (3.26) で $w=b$ とすれば

$$\int \langle \omega(v^2), b\rangle \, d\gamma(v) = \lim_{s\to 0} \frac{8s}{I(s)} \int e^{-s|z|^2} |P_V(z)|^2 \langle z-b, b\rangle \, d\mu(z) = 0$$

となる. □

次の命題は [2] の Lemma 9.10 を参照した.

命題 3.34 $\mu \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ とし，ある m 次元部分空間 V に対して $\mathcal{H}^m|_V \in \mathrm{Tan}_m(\mu, \infty)$ が成り立つとする．このとき，以下が成り立つ:

(1) 任意の $z \in \operatorname{supp}\mu$ に対して

$$b_1^{(2)}(z) + b_2^{(2)}(z^2) + 3b_3^{(2)}(P_V(z)^2, Q_V(z)) = |Q_V(z)|^2 (|Q_V(z)|^2 + 2|P_V(z)|^2),$$

(2) 任意の $v \in V$ に対して

$$\hat{b}(v^2)^2 \le \left|\omega(v^2)\right|^2 |b|^2 .$$

証明. (1) 任意に $v \in V$ と $w \in V^\perp$ を取り，固定する．まず

$$b_3^{(2)}(v, w^2) = b_3^{(2)}(v^3) = b_3^{(2)}(w^3) = 0 \tag{3.29}$$

が成り立つことを示す．命題 3.27 より $b_3^{(2)}|_V = 0$ なので，$b_3^{(2)}(v^3) = 0$ となる．また $b_{3,s}(v, w^2) = s^2 b_3^{(2)}(v, w^2)/2 + o(s^2)$ より

$$\begin{aligned} b_3^{(2)}(v, w^2) &= \lim_{s\to 0} 2s^{-2} b_{3,s}(v, w^2) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{8s}{3I(s)} \int \langle z, v\rangle \langle z, w\rangle^2 e^{-s|z|^2} \, d\mu(z) \end{aligned}$$

となる．また $\left|\langle z, w\rangle^2\right| = \left|\langle Q_V(z), w\rangle^2\right| \le 4|b|^2 |w|^2$ なので

$$\begin{aligned} \left|b_3^{(2)}(v, w^2)\right| &\le C \liminf_{s\to 0} \frac{s}{I(s)} \int |z| \, e^{-s|z|^2} \, d\mu \\ &= C \liminf_{s\to 0} s^{1+m/2} \frac{1}{s^{(1+m)/2}} \int |z| \, e^{-|z|^2} \, d\mathcal{L}^m \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる．よって $b_3^{(2)}(v, w^2) = 0$ が成り立つ．同様の計算により $b_3^{(2)}(w^3) = 0$ も成り立つ．
$z \in \operatorname{supp}\mu$ を任意に取る．命題 3.27 より $b_4^{(2)}(z^4) = |P_V(z)|^4$ が成り立つ． 命題 3.16 より

$$\begin{aligned} b_1^{(2)}(z) + b_2^{(2)}(z^2) + b_3^{(2)}(z^3) + b_4^{(2)}(z^4) &= |z|^4 \\ &= (|P_V(z)|^2 + |Q_V(z)|^2)^2 \\ &= |P_V(z)|^4 + 2|P_V(z)|^2 |Q_V(z)|^2 + |Q_V(z)|^4 \\ &= b_4^{(2)}(z^4) + 2|P_V(z)|^2 |Q_V(z)|^2 + |Q_V(z)|^4 \end{aligned}$$

となる．よって

$$b_1^{(2)}(z) + b_2^{(2)}(z^2) + b_3^{(2)}(z^3) = 2|P_V(z)|^2 |Q_V(z)|^2 + |Q_V(z)|^4$$

であるから，あとは $b_3^{(2)}(z^3) = 3b_3^{(2)}(P_V(z)^2, Q_V(z))$ を示せばよいが，これは線形性を用いて $b_3^{(2)}((P_V(z) + Q_V(z))^3)$ を展開し，(3.29) を用いれば得られる．

(2) $v \in V$ とし，正の無限大に発散する単調増加列 $\{t_i\}_i \subset (0,\infty)$ をとる．命題 3.27 より，$r>0$ が存在して $d(t_i v, \operatorname{supp}\mu) < r$ が成り立つ．よって各 i に対して $t_i v + x_i \in \operatorname{supp}\mu$ となるような $x_i \in B_r(0)$ が存在する．部分列を取ることで，$\{x_i\}$ は x に収束するとしてよい．ここで $v_i = P_V(x_i)$, $w_i = Q_V(x_i)$, $w = Q_V(x)$ と定めると，命題 3.34 の (1) より

$$b_1^{(2)}(t_i v + x_i) + b_2^{(2)}((t_i v + x_i)^2) + 3b_3^{(2)}((t_i v + v_i)^2, w_i) = |w_i|^2 \left(|w_i|^2 + 2\,|t_i v + v_i|^2\right)$$

が成り立つ．この両辺を t_i^2 で割って $i \to \infty$ とすると

$$b_2^{(2)}(v^2) + 3b_3^{(2)}(v^2, w) = 2\,|w|^2\,|v|^2 \tag{3.30}$$

を得る．さらに命題 3.27 より $b_1^{(1)}(t_i v + x_i) = |Q_V(t_i v + x_i)|^2 = |w_i|^2$ だが，$t_i v + v_i \in V$ なので $b_1^{(1)}(t_i v + v_i) = 0$ となる．よって $b_1^{(1)}(w_i) = |w_i|^2$ より $|w|^2 = b_1^{(1)}(w) = 2\langle b, w\rangle$ を得る．よってこれと (3.30) より

$$\begin{aligned} b_2^{(2)}(v^2) + \langle \omega(v^2), w\rangle &= b_2^{(2)}(v^2) + 3b_3^{(2)}(v^2, w) - 4\,|v|^2\,\langle b, w\rangle \\ &= 2\,|w|^2\,|v|^2 - 2\,|w|^2\,|v|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned} \hat{b}(v^2)^2 &= (b_2^{(2)}(v^2) + \langle \omega(v^2), b\rangle)^2 \\ &= \langle \omega(v^2), b - w\rangle^2 \\ &\le \left|\omega(v^2)\right|^2 |b - w|^2 \\ &= \left|\omega(v^2)\right|^2 (|b|^2 - 2\langle b, w\rangle + |w|^2) \\ &= \left|\omega(v^2)\right|^2 |b|^2 \end{aligned}$$

を得る． □

また γ による内積の積分はある程度具体的に計算できる．次の命題は [2] の Proposition 9.5 の証明を参照した．

命題 3.35 (1) $y \in V$ のとき

$$\int \langle y, v\rangle^4\, d\gamma(v) = 3\,|y|^4,$$

(2) $y, z \in V$ のとき，$\langle y, z\rangle = 0$ ならば

$$\int \langle y, v\rangle^2 \langle z, v\rangle^2\, d\gamma(v) = |y|^2\,|z|^2,$$

(3) $y, z \in V$ のとき，$\langle y, z\rangle = 0$ ならば

$$\int \langle y, v\rangle \langle z, v\rangle^3\, d\gamma(v) = 0,$$

(4) $y, z \in V$ のとき

$$\int \langle y, v\rangle^2 \langle z, v\rangle^2\, d\gamma(v) = |y|^2\,|z|^2 + 2\langle z, y\rangle^2,$$

(5)　$y \in V,\, w \in V^{\perp}$ のとき

$$\int \langle y, v\rangle^2 \langle \omega(v^2), w\rangle \, d\gamma(v) = 2\langle \omega(y^2), w\rangle.$$

証明.　(1)　$y \in V$ のとき

$$\begin{aligned}\int \langle y, v\rangle^4 \, d\gamma(v) &= \frac{|y|^4}{(2\pi)^{m/2}} \int_V \left\langle \frac{y}{|y|}, v \right\rangle^4 e^{-|v|^2/2} \, d\mathcal{H}^m(v) \\ &= \frac{|y|^4}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}} t^4 e^{-t^2/2} \, d\mathcal{L}^1(t) \int_{\mathbb{R}^{m-1}} e^{-|x|^2/2} \, d\mathcal{L}^{m-1}(x) \\ &= \frac{|y|^4}{(2\pi)^{m/2}} \cdot \left(4 \cdot 2^{1/2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi^{1/2}\right) \cdot (2^{(m-1)/2} \cdot \pi^{(m-1)/2}) \\ &= 3\,|y|^4 .\end{aligned}$$

(2)　$y, z \in V$ が $\langle y, z\rangle = 0$ を満たすとき

$$\begin{aligned}\int \langle y, v\rangle^2 \langle z, v\rangle^2 \, d\gamma(v) &= \frac{|y|^2 \, |z|^2}{(2\pi)^{m/2}} \int_V \left\langle \frac{y}{|y|}, v \right\rangle^2 \left\langle \frac{z}{|z|}, v \right\rangle^2 e^{-|v|^2/2} \, d\mathcal{H}^m(v) \\ &= \frac{|y|^2 \, |z|^2}{(2\pi)^{m/2}} \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 e^{-t^2/2} \, d\mathcal{L}^1(t)\right)^2 \int_{\mathbb{R}^{m-2}} e^{-|x|^2/2} \, d\mathcal{L}^{m-2}(x) \\ &= \frac{|y|^2 \, |z|^2}{(2\pi)^{m/2}} \left(2 \cdot 2^{1/2} \cdot \frac{\pi^{1/2}}{2}\right)^2 \cdot (2\pi)^{(m-2)/2} \\ &= |y|^2 \, |z|^2 .\end{aligned}$$

(3)　$y, z \in V$ が $\langle y, z\rangle = 0$ を満たすとき

$$\begin{aligned}\int \langle y, v\rangle \langle z, v\rangle^3 \, d\gamma(v) &= \frac{|y| \, |z|^3}{(2\pi)^{m/2}} \int_V \left\langle \frac{y}{|y|}, v \right\rangle \left\langle \frac{z}{|z|}, v \right\rangle^3 e^{-|v|^2/2} \, d\mathcal{H}^m(v) \\ &= \frac{|y|^2 \, |z|^2}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}} t e^{-t^2/2} \, d\mathcal{L}^1(t) \int_{\mathbb{R}} t^3 e^{-t^2/2} \, d\mathcal{L}^1(t) \int_{\mathbb{R}^{m-2}} e^{-|x|^2/2} \, d\mathcal{L}^{m-2}(x) \\ &= 0.\end{aligned}$$

(4)　$y, z \in V$ に対し，$y = \xi + az$ かつ $\xi \perp z$ なる $\xi \in V$ と $a \in \mathbb{R}$ を取ると，(1)(2)(3) より

$$\begin{aligned}\int \langle y, v\rangle^2 \langle z, v\rangle^2 \, d\gamma(v) &= \int \langle \xi, v\rangle^2 \langle z, v\rangle^2 \, d\gamma + 2a \int \langle \xi, v\rangle \langle z, v\rangle^3 \, d\gamma + a^2 \int \langle z, v\rangle^4 \, d\gamma \\ &= |\xi|^2 \, |z|^2 + 3a^2 \, |z|^4 \\ &= (|\xi|^2 + a^2 \, |z|^2) \, |z|^2 + 2(a \, |z|^2)^2 \\ &= |y|^2 \, |z|^2 + 2\langle z, y\rangle^2.\end{aligned}$$

(5)　$y \in V$, $w \in V^{\perp}$ のとき，優収束定理と (4)，(3.25)，(3.26) より

$$
\begin{aligned}
&\int \langle y, v\rangle^2 \langle \omega(v^2), w\rangle \, d\gamma(v) \\
&= \int \langle y, v\rangle^2 \left(\lim_{s\to 0} \frac{8s}{I(s)} \int \langle z, v\rangle^2 \langle z-b, w\rangle e^{-s|z|^2} \, d\mu(z) \right) d\gamma(v) \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{8s}{I(s)} \int \left(\int \langle y, v\rangle^2 \langle z, v\rangle^2 \, d\gamma(v) \right) \langle z-b, w\rangle e^{-s|z|^2} \, d\mu(z) \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{8s\,|y|^2}{I(s)} \int |P_V(z)|^2 \langle z-b, w\rangle e^{-s|z|^2} \, d\mu(z) + \lim_{s\to 0} \frac{16s\,|y|^2}{I(s)} \int \langle z, y\rangle^2 \langle z-b, w\rangle e^{-s|z|^2} \, d\mu(z) \\
&= 2\langle \omega(y^2), w\rangle.
\end{aligned}
$$

□

それでは命題 3.30 の証明に取りかかる．

証明．（命題 3.30 の証明）　命題 3.27 より，$z \in \operatorname{supp}\mu$ に対して

$$
|Q_V(z)|^2 = b_1^{(1)}(z) = b_1^{(1)}(Q_V(z)) = 2\langle b, Q_V(z)\rangle
$$

が成り立つ．また命題 3.34 より

$$
b_1^{(2)}(z) + b_2^{(2)}(z^2) + 3b_3^{(2)}(P_V(z)^2, Q_V(z)) - |Q_V(z)|^4 - 2\,|P_V(z)|^2\,|Q_V(z)|^2 = 0
$$

なので

$$
\begin{aligned}
&\hat{b}(P_V(z)^2) + \langle \omega(P_V(z)^2), Q_V(z) - b\rangle + b_1^{(2)}(z) + 2b_2^{(2)}(P_V(z), Q_V(z)) + b_2^{(2)}(Q_V(z)^2) - b_1^{(1)}(Q_V(z))^2 \\
&= b_2^{(2)}(z^2) + \langle \omega(P_V(z)^2), Q_V(z)\rangle + b_1^{(2)}(z) - |Q_V(z)|^4 \\
&= b_1^{(2)}(z) + b_2^{(2)}(z^2) + 3b_3^{(2)}(P_V(z)^2, Q_V(z)) - 4\,|P_V(z)|^2 \langle b, Q_V(z)\rangle - |Q_V(z)|^4 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となる．よって $|Q_V(z)| \le 2\,|b|$ より，

$$
\begin{aligned}
&\left| \hat{b}(P_V(z)^2) + \langle \omega(P_V(z)^2), Q_V(z) - b\rangle \right| \\
&\le \left| b_1^{(2)}(z) \right| + 2\left| b_2^{(2)}(P_V(z), Q_V(z)) \right| + \left| b_2^{(2)}(Q_V(z)^2) \right| + \left| b_1^{(1)}(Q_V(z)) \right|^2 \\
&\le C\,|z| + C'\,|P_V(z)|\,|Q_V(z)| + C''\,|Q_V(z)|^2 \\
&\le K(|z| + 1)
\end{aligned}
$$

となる．よって

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{s\to 0} \left| \frac{s}{I(s)} \int e^{-s|z|^2} (\hat{b}(P_V(z)^2) + \langle \omega(P_V(z)^2), Q_V(z) - b\rangle) \, d\mu \right| \\
&\le \limsup_{s\to 0} \frac{s}{I(s)} \int e^{-s|z|^2} K(|z| + 1) \, d\mu \\
&= \limsup_{s\to 0} K' s^{1+m/2} \int e^{-s|x|^2} (|x| + 1) \, d\mu \\
&= \limsup_{s\to 0} K' s^{1+m/2} (C s^{-(1+m)/2} + (\pi s^{-1})^{m/2}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

より

$$\lim_{s\to 0}\frac{s}{I(s)}\int e^{-s|z|^2}(\hat{b}(P_V(z)^2)+\langle\omega(P_V(z)^2),Q_V(z)-b\rangle)\,d\mu=0 \tag{3.31}$$

を得る．一方，命題 3.34 と (3.25) より

$$\begin{aligned}\int\hat{b}(v^2)^2\,d\gamma(v)&\le|b|^2\int\left|\omega(v^2)\right|^2\,d\gamma(v)\\&=|b|^2\int\left(\lim_{s\to 0}\frac{8s}{I(s)}\int\langle z,v\rangle^2\langle z-b,\omega(v^2)\rangle e^{-s|z|^2}\,d\mu(z)\right)\,d\gamma(v)\\&=|b|^2\lim_{s\to 0}\frac{8s}{I(s)}\int e^{-s|z|^2}\left(\int\langle z,v\rangle^2\langle z-b,\omega(v^2)\rangle\,d\gamma(v)\right)\,d\mu(z)\end{aligned}$$

となる．ここで命題 3.35 より

$$\begin{aligned}\int\langle z,v\rangle^2\langle z-b,\omega(v^2)\rangle\,d\gamma(v)&=\int\langle P_V(z),v\rangle^2\langle Q_V(z)-b,\omega(v^2)\rangle\,d\gamma(v)\\&=2\langle\omega(P_V(z)^2),Q_V(z)-b\rangle\end{aligned}$$

となるので，(3.31) と合わせて

$$\begin{aligned}\int\hat{b}(v^2)^2\,d\gamma&\le|b|^2\lim_{s\to 0}\frac{16s}{I(s)}\int\langle\omega(P_V(z)^2),Q_V(z)-b\rangle e^{-s|z|^2}\,d\mu\\&=-|b|^2\lim_{s\to 0}\frac{16s}{I(s)}\int e^{-s|z|^2}\hat{b}(P_V(z)^2)\,d\mu\end{aligned}$$

を得る．さらに $r=s^{-1/2}$ とすれば，$r^{-m}\mu_{0,r}\rightharpoonup\mathcal{H}^m|_V$ より

$$\begin{aligned}-|b|^2\lim_{s\to 0}\frac{16s}{I(s)}\int e^{-s|z|^2}\hat{b}(P_V(z)^2)\,d\mu&=-|b|^2\lim_{r\to\infty}\frac{16}{\pi^{m/2}r^{m+2}}\int e^{-|z|^2}\hat{b}(P_V(rz)^2)\,d\mu_{0,r}\\&=-|b|^2\lim_{r\to\infty}\frac{16}{\pi^{m/2}}\int e^{-|z|^2}\hat{b}(P_V(z)^2)\,d(r^{-m}\mu_{0,r})\\&=-|b|^2\frac{16}{\pi^{m/2}}\int e^{-|z|^2}\hat{b}(P_V(z)^2)\,d(\mathcal{H}^m|_V)\\&=-|b|^2\frac{16}{\pi^{m/2}2^{m/2}}\int e^{-|z|^2/2}\hat{b}(P_V(2^{-1/2}z)^2)\,d(\mathcal{H}^m|_V)\\&=-8\,|b|^2\frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\int e^{-|z|^2/2}\hat{b}(P_V(z)^2)\,d(\mathcal{H}^m|_V)\\&=-8\,|b|^2\int\hat{b}(v^2)\,d\gamma\end{aligned}$$

となる．したがって

$$\int\hat{b}(v^2)^2\,d\gamma\le-8\,|b|^2\int\hat{b}(v^2)\,d\gamma \tag{3.32}$$

を得る．

ここで $\hat{b}$ の固有値を $\beta_1,\dots,\beta_m$，固有ベクトルを $v_1,\dots,v_m$ とすると，

$$\int\hat{b}(v^2)\,d\gamma=\int\sum_{i=1}^m\beta_i\langle v,v_i\rangle^2\,d\gamma=\sum_{i=1}^m\beta_i=\mathrm{Tr}\,\hat{b}$$

と計算できる．また命題 3.35 より

$$\begin{aligned}
\int \hat{b}(v^2)^2\,d\gamma(v) &= \int \left(\sum_{i=1}^m \beta_i \langle v, v_i\rangle^2\right)^2 d\gamma(v) \\
&= \sum_{i=1}^m \int \beta_i^2 \langle v, v_i\rangle^4\,d\gamma(v) + 2\sum_{1\le i<j\le m} \int \beta_i\beta_j \langle v, v_i\rangle^2 \langle v, v_j\rangle^2\,d\gamma(v) \\
&= 3\sum_{i=1}^m \beta_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le m} \beta_i\beta_j \\
&= 2\sum_{i=1}^m \beta_i^2 + \left(\sum_{i=1}^m \beta_i\right)^2 \\
&\ge \frac{2}{m}\left(\sum_{i=1}^m \beta_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^m \beta_i\right)^2 \\
&= \left(1+\frac{2}{m}\right)\left(\int \hat{b}(v^2)\,d\gamma\right)^2
\end{aligned}$$

となる．よって (3.32) より

$$\left(\int \hat{b}(v^2)\,d\gamma\right)^2 \le \left(1+\frac{2}{m}\right)^{-1} \int \hat{b}(v^2)^2\,d\gamma(v) \le -8\,|b|^2\,\frac{m}{m+2}\int \hat{b}(v^2)\,d\gamma$$

となり，命題 3.33 より

$$\left(\operatorname{Tr} b_2^{(2)}|_V\right)^2 \le -8\,|b|^2\,\frac{m}{m+2}\operatorname{Tr} b_2^{(2)}|_V$$

となる．ここで命題 3.29 より $\operatorname{Tr} b_2^{(2)}|_V \le 0$ なので

$$\operatorname{Tr} b_2^{(2)}|_V \ge -8\,|b|^2\,\frac{m}{m+2} = -\frac{2m}{m+2}\left\|b_1^{(1)}\right\|^2$$

となる． □

証明．（定理 3.25 の証明）　命題 3.29 と命題 3.30 より

$$0 = \operatorname{Tr} b_2^{(2)} = \operatorname{Tr} b_2^{(2)}|_V + \operatorname{Tr} b_2^{(2)}|_{V^\perp} \ge 2\left\|b_1^{(1)}\right\|^2 - \frac{2m}{m+2}\left\|b_1^{(1)}\right\|^2 = \frac{4}{m+2}\left\|b_1^{(1)}\right\|^2$$

となるので，$b_1^{(1)} = 0$ となる．よって命題 3.27 より，任意の $x \in \operatorname{supp}\mu$ に対して $|Q_V(x)|^2 = b_1^{(1)}(x) = 0$ となるので，$\operatorname{supp}\mu \subset V$ が成り立つ．よって命題 3.4 より $\mu = \mathcal{H}^m|_V$ が成り立つ． □

4　Preiss の定理への応用

本章では前章で示したことを用いて定理 1.2 を示すことを目標とする．

4.1　準備

ここでは修正可能測度の定義と Preiss の定理の証明中で用いられる命題の紹介をする．次の定義は [2] で用いられている定義を採用した．

定義 4.1 集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ が m 次修正可能集合，または単に修正可能集合であるとは，高々可算個のリプシッツ連続写像 $f_i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が存在して，$\mathcal{H}^m(E \setminus \bigcup_i f(\mathbb{R}^m)) = 0$ が成り立つことである．

また $\mathbb{R}^n$ 上のラドン測度 μ が m 次修正可能測度，または単に修正可能測度であるとは，m 次修正可能集合 E とボレル関数 f が存在して $\mu = f\,\mathcal{H}^m|_E$ が成り立つことである．

次の命題は [2] の Proposition 3.4 を参照した．この命題は α 次密度が有限かつ正の値で存在するような測度 μ は，縮小して非常に小さいスケールで見ればほとんど α 次一様測度と一致しているということを主張している．なお，証明は省略する．

命題 4.2 $\alpha \geq 0$，μ を $\mathbb{R}^n$ 上のラドン測度，$E \subset \mathbb{R}^n$ を $\mu(E) > 0$ なるボレル集合とする．このとき μ に関してほとんどすべての $x \in E$ において $0 < \theta_*^\alpha(\mu, x) = \theta^{\alpha *}(\mu, x) < \infty$ が成り立つならば，ほとんどすべての $x \in E$ に対して $\mathrm{Tan}_\alpha(\mu, x)$ が空でなく，かつ $\mathrm{Tan}_\alpha(\mu, x) \subset \theta^\alpha(\mu, x)\mathcal{U}^\alpha(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ．

次の命題は [2] の Theorem 5.1 を参照した．この命題は上密度と下密度が一致していなくとも，μ を縮小したときにほとんど平坦であれば修正可能測度であるということを主張している．証明は省略する．

命題 4.3 m を非負整数とする．また $\mathbb{R}^n$ 上のラドン測度 μ が，μ に関してほとんどすべての x において

(1) $0 < \theta_*^m(\mu, x) \leq \theta^{m*}(\mu, x) < \infty$,

(2) $\mathrm{Tan}_m(\mu, x) \subset \mathbb{R}\mathcal{G}_m(\mathbb{R}^n)$

を満たしているとする．このとき μ は m 次修正可能測度である．

次の命題は [2] の Theorem 6.8 を参照した．この命題は m 次密度が有限かつ正の値で存在するような測度 μ は，うまく縮小すればハウスドルフ測度に近似できるということを主張している．証明は省略する．

命題 4.4 m を非負整数，μ を $\mathbb{R}^n$ 上のラドン測度であって，ほとんどすべての x について $0 < \theta_*^m(\mu, x) = \theta^{m*}(\mu, x) < \infty$ を満たすものとする．このとき μ についてほとんどすべての x に対して $W_x \in G(m, n)$ が存在して $\theta^m(\mu, x)\,\mathcal{H}^m|_{W_x} \in \mathrm{Tan}_m(\mu, x)$ が成り立つ．

4.2 接測度と一様測度の性質の活用

ここでは前節まで見てきた接測度と一様測度の性質を利用して次の定理を示す．次の定理は [2] の Theorem 6.10 を参照した．

定理 4.5 m を非負整数，μ を $\mathbb{R}^n$ 上のラドン測度であって，ほとんどすべての x について $0 < \theta_*^m(\mu, x) = \theta^{m*}(\mu, x) < \infty$ を満たすものとする．このとき

(1) $\mathrm{Tan}_m(\mu, x) \subset \theta^m(\mu, x)\mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$,

(2) $\mathrm{Tan}_m(\mu, x) \cap \theta^m(\mu, x)\mathcal{G}_m(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$

を満たすほとんどすべての x に対して，$\theta^m(\mu, x)^{-1}\,\mathrm{Tan}_m(\mu, x)$ に属する測度は平坦となる．

この定理の証明の準備として次の補題を示す．次の補題は [2] の Lemma 6.20 を参照した．

補題 4.6　$\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ とする．$\mathbb{R}^n$ 上のラドン測度 μ に対して

$$F(\mu) = \min_{V \in G(m,n)} \int \varphi(z) d(z,V)^2 \, d\mu(z)$$

とする．このとき，$\mathbb{R}^n$ 上のラドン測度の列 $\{\mu_i\}_i$ がラドン測度 μ に弱収束しているならば，$\lim_{i\to\infty} F(\mu_i) = F(\mu)$ が成り立つ．

証明.　$F(\mu) = \int \varphi(z) d(z,V)^2 \, d\mu(z)$ なる V をとると

$$\begin{aligned} F(\mu) &= \lim_{i\to\infty} \int \varphi(z) d(z,V)^2 \, d\mu_i(z) \\ &\geq \limsup_{i\to\infty} \int \varphi(z) d(z,V_i)^2 \, d\mu_i(z) \\ &= \limsup_{i\to\infty} F(\mu_i) \end{aligned}$$

となる．よってあとは $F(\mu) \leq \liminf_{i\to\infty} F(\mu_i)$ を示せばよい．

$C = \liminf_{i\to\infty} F(\mu_i)$ とする．部分列をとることで，$\{F(\mu_i)\}$ が C に収束するようにできる．$F(\mu_i) = \int \varphi(z) d(z,V_i)^2 \, d\mu_i(z)$ なる V_i をとる．$G(m,n)$ はコンパクトなので，部分列を取ることで $V_\infty \in G(m,n)$ が存在して $\{P_{V_i}\}$ が作用素ノルムの意味で P_{V_∞} に収束するようにできる．このとき $\mathbb{R}^n$ 上の関数の列 $\{\varphi(z) d(z,V_i)^2\}$ は $\varphi(z) d(z,V_\infty)^2$ に一様収束するので，

$$F(\mu) \leq \int \varphi(z) d(z,V_\infty)^2 \, d\mu(z) = \lim_{i\to\infty} \int \varphi(z) d(z,V_i)^2 \, d\mu_i(z) = \lim_{i\to\infty} F(\mu_i) = C$$

となる．　□

証明.（定理 4.5 の証明）　背理法で示す．すなわち

- $0 < \theta^m_*(\mu,x) = \theta^{m*}(\mu,x) < \infty$，
- $\mathrm{Tan}_m(\mu,x) \subset \theta^m(\mu,x)\mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$，
- $\nu = \theta^m(\mu,x)\, \mathcal{H}^m|_V \in \mathrm{Tan}_m(\mu,x)$ となるような $V \in G(m,n)$ が存在する，
- $\theta^m(\mu,x)^{-1}\zeta$ が平坦でない $\zeta \in \mathrm{Tan}_m(\mu,x)$ が存在する，

をすべて満たす x が存在すると仮定する．$\mathrm{Tan}_m(\mu,x)$ と $\theta^m(\mu,x)$ は μ のスカラー倍に関して 1 次斉次なので，$\theta^m(\mu,x) = 1$ と仮定してよい．このとき $\zeta \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ なので，定理 3.10 より $\chi \in \mathrm{Tan}_m(\zeta,\infty)$ なる $\chi \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ が存在する．$B_1(0)$ 上で 1 となる $\varphi \in C_c(B_2(0))_{\geq 0}$ を取り，この φ を用いて

$$F(\mu) = \min_{V \in G(m,n)} \int \varphi(z) d(z,V)^2 \, d\mu(z)$$

と定める．$F(\mu) = 0$ となることと μ が平坦となることは必要十分であることに注意する．ε を定理 3.17 でとれるものとする．$F(\chi) \leq \varepsilon$ と仮定すると，

$$\min_{V \in G(m,n)} \int_{B_1(0)} d(z,V)^2 \, d\chi(z) \leq F(\chi) \leq \varepsilon$$

となるので，定理 3.17 より χ は平坦となる．よって ζ は無限遠において平坦となるので，定理 3.25 より ζ 自身も平坦となるが，これは仮定に矛盾する．よって $F(\chi) > \varepsilon$ となる．また $\zeta \in \mathrm{Tan}_m(\mu,x)$ より，任意の $r > 0$ に対して $r^{-m}\zeta_{0,r} \in \mathrm{Tan}_m(\mu,x)$ となる．よって命題 3.9 より $\chi \in \mathrm{Tan}_m(\mu,x)$ となる．

ここで 0 に収束する単調減少列 $\{r_k\}, \{s_k\}$ で，$k \to \infty$ のとき $r_k^{-m}\mu_{x,r_k} \rightharpoonup \nu$, $s_k^{-m}\mu_{x,s_k} \rightharpoonup \chi$ となるものを取る．必要であれば部分列を取ることで，任意の k に対して $s_k < r_k$ が成り立つと仮定してよい．$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を $f(r) = F(r^{-m}\mu_{x,r})$ と定義すると，補題 4.6 より f は連続である．また補題 4.6 より

$$\lim_{k\to\infty} f(r_k) = F(\nu) = F(\mathcal{H}^m|_V) = 0$$

となる．一方 $\lim_{k\to\infty} f(s_k) = F(\chi) > \varepsilon$ であったから，十分に大きい k に対しては $f(r_k) < \varepsilon < f(s_k)$ が成り立つ．部分列を取ることで，すべての k に対してこの不等式が成り立つようにできる．よって各 k に対して，$f(\sigma_k) = \varepsilon$ かつ $f([\sigma_k, r_k]) \subset (0, \varepsilon]$ となるような $\sigma_k \in (s_k, r_k)$ を取ることができる．よって仮定より $k \to \infty$ のとき $\sigma_k^{-m}\mu_{x,\sigma_k}(B_R(0)) = \sigma_k^{-m}\mu(B_{R\sigma_k}(x)) \to R^m\theta^m(\mu, x)$ となるので，$\{\sigma_k^{-m}\mu_{x,\sigma_k}\}$ は命題 2.11 の仮定を満たす．よって部分列を取ることで，ある $\xi \in \mathrm{Tan}_m(\mu, x) \cap \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ に $\{\sigma_k^{-m}\mu_{x,\sigma_k}\}$ が弱収束するようにできる．このとき $F(\xi) = \lim_{k\to\infty} F(\sigma_k^{-m}\mu_{x,\sigma_k}) = \lim_{k\to\infty} f(\sigma_k) = \varepsilon > 0$ となる．よって ξ は平坦ではない．

ここで数列 $\{r_k/\sigma_k\}_k$ は $k \to \infty$ のとき正の無限大に発散する．実際，$C = \liminf_{k\to\infty} r_k/\sigma_k < \infty$ と仮定して，$r_k/\sigma_k \to C$ となるように部分列を取ると，

$$\begin{aligned}
\nu &= \text{weak}^* \lim_{k\to\infty} r_k^{-m}\mu_{x,r_k} \\
&= \text{weak}^* \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\sigma_k}{r_k}\right)^m (\sigma_k^{-m}\mu_{x,\sigma_k})_{0,r_k/\sigma_k} \\
&= C^{-m}\xi_{0,C}
\end{aligned}$$

となる．だが ν が平坦であり，ξ は平坦ではないのでこれは矛盾している．

$R \geq 1$ を任意に取り，固定する．$k \to \infty$ のとき，$(R\sigma_k)^{-m}\mu_{x,R\sigma_k} \rightharpoonup R^{-m}\xi_{0,R}$ なので $F(R^{-m}\xi_{0,R}) = \lim_{k\to\infty} f(R\sigma_k)$ が成り立つ．$R \geq 1$ より $R\sigma_k \geq \sigma_k$ である．また $r_k/\sigma_k \to \infty$ より十分に大きい k に対しては $R\sigma_k \in [\sigma_k, r_k]$ が成り立つ．よってそのような k に対しては $f(R\sigma_k) \leq \varepsilon$ が成り立つ．よって $F(R^{-m}\xi_{0,R}) \leq \varepsilon$ である．ここで定理 3.10 より $\phi \in \mathrm{Tan}_m(\xi, \infty) \cap \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ が存在する．このとき $F(\phi) = \lim_{R\to\infty} F(R^{-m}\xi_{0,R}) \leq \varepsilon$ となる．よって定理 3.17 より ϕ は平坦となり，定理 3.25 より ξ が平坦となるが，これは ξ が平坦ではないことに矛盾している． □

4.3 Preiss の定理の証明

それでは Preiss の定理の証明に取りかかる．この証明は [2] を参照した．

証明．（Preiss の定理の証明）　命題 4.2 より，μ に関してほとんどすべての x について $\mathrm{Tan}_m(\mu, x) \subset \theta^m(\mu, x)\mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ．また命題 4.4 より，μ に関してほとんどすべての x に対して $W_x \in G(m, n)$ が存在して $\theta^m(\mu, x)\,\mathcal{H}^m|_{W_x} \in \mathrm{Tan}_m(\mu, x)$ が成り立つ．以上より μ に関してほとんどすべての x に対して，定理 4.5 の 2 条件が満たされるので，$\theta^m(\mu, x)^{-1}\,\mathrm{Tan}_m(\mu, x)$ に属する測度は平坦となる．

よって命題 4.3 より μ は修正可能測度となる． □

謝辞

本論文を執筆するにあたって，懇切丁寧に指導してくださいました利根川吉廣教授に，深く感謝申し上げます．

参考文献

[1] David Preiss, *Geometry of measures in $\mathbb{R}^n$: Distribution, rectifiability, and densities*, Ann. of Math. 125(1987), 537-643.

[2] Camillo De Lellis, *Rectifiable Sets, Densities and Tangent Measures*, European Mathematical Society, 2008.

[3] Pertti Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge Stud. Adv. Math. 44, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[4] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Revised Edition, CBC Press, 2015.

[5] Haim Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Speces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.