修 士 論 文

対称性の高いIFSの族に対するMandelbrot 集合について

平成30年2月1日

九州大学大学院数理学府数理学専攻修士課程2年

姫木　祐太郎

指導教員　:　石井　豊　准教授

概要

n を 2 以上の自然数とする．不動点が正 n 角形の頂点を成し，縮小率が $s \in \mathbb{D}^* := \{s \in \mathbb{C} \mid 0 < |s| < 1\}$ である縮小写像の反復関数系 (iterated function system, IFS) の族を考える．この IFS に対応する極限集合 $\Lambda_s := \Lambda_s^{(n)}$ が連結であるようなパラメータ s 全体を $\mathcal{M}_n$ と表す．$\mathcal{M}_n$ はこの IFS の族に対する Mandelbrot 集合と呼ばれ，その構造は多くの研究者により調べられてきた．

中でも，Bandt-Hung [BHu] は $n = 3$, $n \geq 5$ のとき $\mathcal{M}_n$ の正則閉性，すなわち $\mathcal{M}_n = \overline{\mathrm{int}\,\mathcal{M}_n}$ を示し，Calegari-Koch-Walker[CKW] は $\mathcal{M}_2$ が実軸を除いて正則閉集合，すなわち $\mathcal{M}_2 = \overline{\mathrm{int}\,\mathcal{M}_2} \cup (\mathcal{M}_2 \cap \mathbb{R})$ であることを示した．本論文の第 2 章において，$n \geq 4$ に対して $\mathcal{M}_n$ の正則閉性の証明を与える．これは，$n = 4$ の場合は新しい結果を，$n \geq 5$ の場合は Bandt-Hung [BHu] の結果の簡明かつ幾何学的な別証明を与えたことになる．この証明では，集合 Λ_s を充填した極限集合 X_s の凸性に着目する．X_s が非凸となるようなパラメータ s に関しては，Calegari-Koch-Walker[CKW] により導入されたトラップと呼ばれる概念を適用し，X_s が凸となるようなパラメータ s に関しては，その偏角と絶対値に関する特徴づけを与える．

また Bousch[B1] は $\mathcal{M}_2$ の連結性を証明した．本論文の第 3 章において，Bousch[B1] の方法をより一般化することで，$n \geq 3$ に対して $\mathcal{M}_n$ の連結性の証明を与える．

目次

1 導入

1.1 IFS の族に対する Mandelbrot 集合について

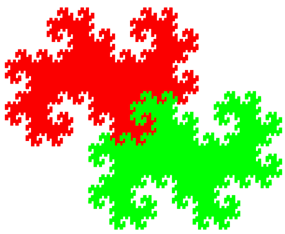
n を 2 以上の自然数とする．$I := \{0,1,\ldots,n-1\}$，$\xi_n := e^{i\frac{2\pi}{n}}$ と置き，集合 $\{\rho_j\}_{j\in I}$ を $\rho_0 := 0$，$\rho_j := \rho_{j-1} + \xi_n^{j-1}$ $(1 \le j \le n-1)$ と帰納的に定義する．このとき，集合 $\{\rho_j\}_{j\in I}$ は正 n 角形の頂点を成す．縮小率が $s \in \mathbb{D}^* := \{s \in \mathbb{C} \mid 0 < |s| < 1\}$ で不動点が ρ_j である以下の写像 $g_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ の族を考える．

$$g_j(z) = s(z - \rho_j) + \rho_j.$$

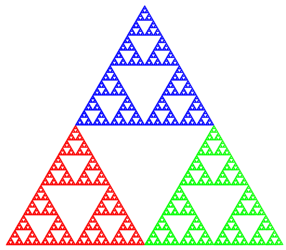
ここで，Hutchinson [Hu] の定理を適用すると，空でないコンパクトな極限集合 $\Lambda_s^{(n)} \subset \mathbb{C}$ が一意的に存在し，

$$\Lambda_s^{(n)} = \bigcup_{j=0}^{n-1} g_j(\Lambda_s^{(n)})$$

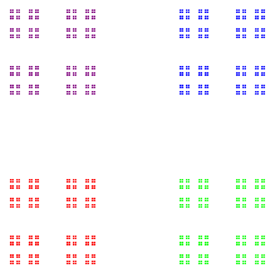
と表せる．ここで，極限集合 $\Lambda_s^{(n)} \subset \mathbb{C}$ のいくつかの良く知られた例を挙げる．1)



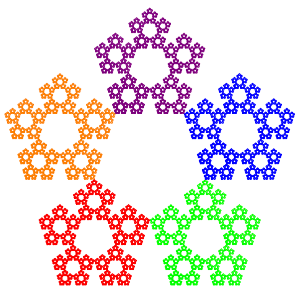
Twin dragons
$n = 2,\ s = \dfrac{1}{2}(1+i).$



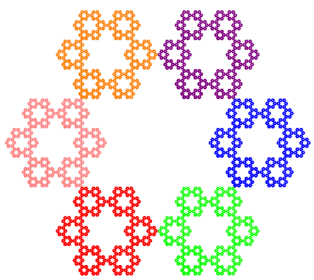
Sierpinski's gasket
$n = 3,\ s = \dfrac{1}{2}.$



Cantor's dust
$n = 4,\ s = \dfrac{1}{3}.$



Pentakun
$n = 5,\ s = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}.$



Koch's snowflake
$n = 6,\ s = \dfrac{1}{3}.$

Heptagasket
$n = 7,\ s = 1 - \dfrac{1}{1 + 2\sin\frac{\pi}{14}}.$

さて，この族に対応する極限集合 $\Lambda_s^{(n)}$ が連結であるようなパラメータ s 全体，すなわち

$$\mathcal{M}_n := \left\{ s \in \mathbb{D}^* \mid \Lambda_s^{(n)} \text{が連結集合} \right\}$$

について考察する．この集合は上で与えられた IFS の族に対する Mandelbrot 集合と呼ばれ，その構造は多くの研究者により調べられてきた．

一般に部分集合 $A \subset \mathbb{C}$ が $A = \overline{\operatorname{int} A}$ を満たすとき正則閉であるという．まず，Barnsley-Harrington[BHa] は，ある $\varepsilon > 0$ が存在して，$B\left(\frac{1}{2}, \varepsilon\right) \cap \mathcal{M}_2 \subset \mathbb{R}$，すなわち $\mathcal{M}_2$ が正則閉でないことを示した．そこで Bandt[Ba] は $\operatorname{int} \mathcal{M}_2$ は実軸を除いて正則閉であることを予想し，Solomyak-Xu[SX] による部分的解決を経て，Calegari-Koch-Walker[CKW] により肯定的かつ完全な証明が与えられた．

1) 例えば Falconer[F]，Schlicker-Kevin[SK] を見よ．

定理 (Calegari-Koch-Walker [CKW]) $\mathcal{M}_2 = \overline{\mathrm{int}\,\mathcal{M}_2} \cup (\mathcal{M}_2 \cap \mathbb{R})$.

また $n = 3$, $n \geq 5$ については，Bandt-Hung [BHu] は $\mathcal{M}_n$ は正則閉集合であることを示した．

定理 (Bandt-Hung [BHu]) $n = 3$, $n \geq 5$ ならば，$\mathcal{M}_n$ は正則閉集合である．

本論文の第 2 章において，次の主定理の証明を与える．

主定理 2.13 任意の $n \geq 4$ に対して，$\mathcal{M}_n$ は正則閉集合である．

これは，$n = 4$ の場合は新しい結果を，$n \geq 5$ の場合は Bandt-Hung [BHu] の結果の簡明かつ幾何学的な別証明を与えたことになる．この証明では，集合 Λ_s を充填した極限集合 X_s の凸性に着目する．X_s が非凸となるようなパラメータ s に関しては，Calegari-Koch-Walker[CKW] により導入されたトラップと呼ばれる概念を適用し，X_s が凸となるようなパラメータ s に関しては，その偏角と絶対値に関する特徴づけを与える．

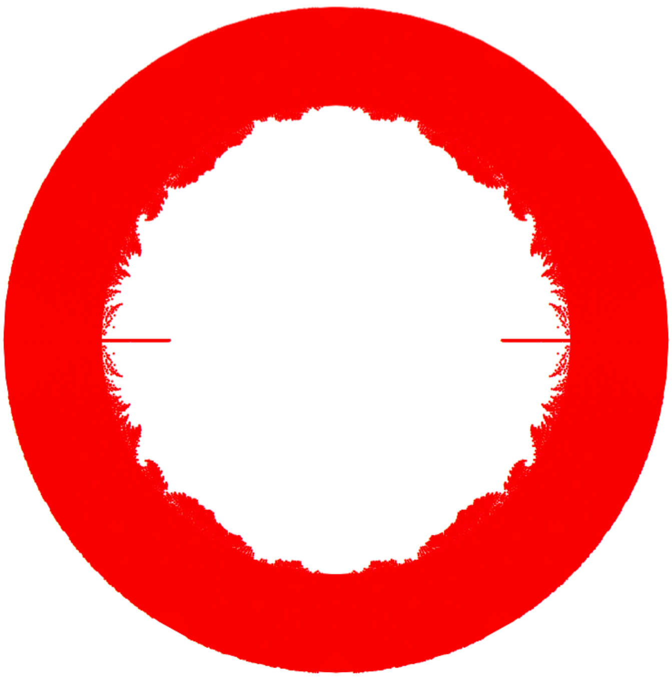
一方で，Bousch は次の先駆的な結果を示した．

定理 (Bousch [B1, B2]) $\mathcal{M}_2$ は連結かつ局所連結な集合である．

本論文の第 3 章において，Bousch[B1] の方法をより一般化することで，次の主定理を証明する．

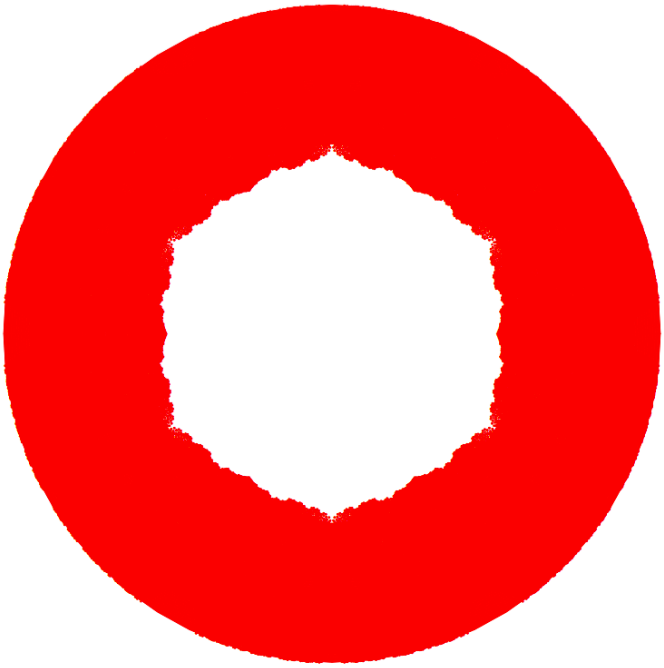
主定理 3.6 任意の $n \geq 3$ に対して，$\mathcal{M}_n$ は連結集合である．

さて，$\mathcal{M}_n$ $(n = 2, 3, 4)$ の図を紹介する．

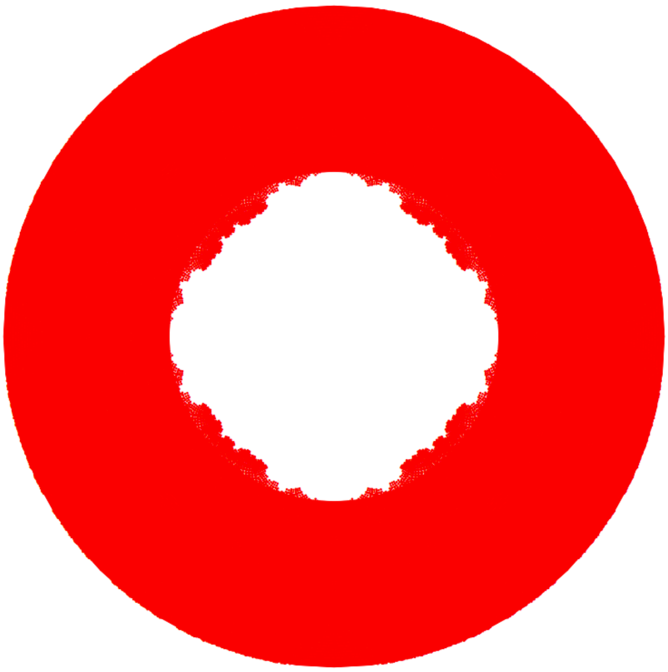


$\mathcal{M}_2$

実際に $\mathcal{M}_2 \setminus \overline{\mathrm{int}\,\mathcal{M}_2} \neq \varnothing$ が確認できる．



$\mathcal{M}_3$



$\mathcal{M}_4$

1.2 $\mathcal{M}_n$ に関する諸結果

以後は $n \in \mathbb{N}$ を一つ固定し $\Lambda_s := \Lambda_s^{(n)}$ とする．まず，記号力学系に関する用語をいくつか整理する．[2]
$\emptyset$ を空語とし，$I^m := \{\boldsymbol{w} := (w_0, \ldots, w_{m-1}) \mid$ 任意の $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ に対して，$w_i \in I\}$，$I^0 := \{\emptyset\}$ を定める．I^m の元を語といい，語 $\boldsymbol{w} \in I^m$ に対して，$f_{\boldsymbol{w}} := f_{w_0} \circ \cdots \circ f_{w_{m-1}}$ と表す．また右側無限列の全体を $I^{\mathbb{N}} := \{\boldsymbol{a} := (a_0, a_1, \ldots) \mid$ 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して，$a_i \in I\}$ と表す．無限列 $\boldsymbol{a} \in I^{\mathbb{N}}$ の長さ $m \in \mathbb{N}$ による切断を $\boldsymbol{a}|_m := (a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}) \in I^m$ と表す．

以後，$\{g_j\}_{j \in I}$ と各 $j \in I$ に関して位相共役な縮小写像の組 $\{f_j(z) = sz + \xi_n^j\}_{j \in I}$ を考える．ここで位相共役とは，$f_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ と $g_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対して，$h_j \circ f_j = g_j \circ h_j$ となる同相写像 $h_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が存在するときをいう．この写像 h_j を位相共役写像という．

定義 1.1 (プレ-アドレス写像・アドレス写像)
（1） 写像 $\pi_m : I^m \times \mathbb{D}^* \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を次のように定め，プレ-アドレス写像という．

$$\begin{array}{rccc} \pi_m & : I^m \times \mathbb{D}^* \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \cup & & \cup \\ & (\boldsymbol{w}, s, z) & \longmapsto & f_{\boldsymbol{w}}(s, z) \end{array}$$

（2） 写像 $\pi_\infty : I^\infty \times \mathbb{D}^* \to \Lambda_s$ を次のように定め，アドレス写像という．

$$\begin{array}{rccc} \pi_\infty & : I^\infty \times \mathbb{D}^* & \longrightarrow & \Lambda_s \\ & \cup & & \cup \\ & (\boldsymbol{a}, s) & \longmapsto & \lim_{m \to \infty} f_{\boldsymbol{a}|_m}(s, z) \end{array}$$

点列 $\{f_{\boldsymbol{a}|_m}(s, z)\}_{m=0}^\infty$ は Cauchy 列である．実際に $\ell \leq m$ ならば，

$$\begin{aligned} |f_{\boldsymbol{a}|_\ell}(s, z) - f_{\boldsymbol{a}|_m}(s, z)| &\leq \sum_{k=\ell}^{m-1} |f_{\boldsymbol{a}|_k}(s, z) - f_{\boldsymbol{a}|_{k+1}}(s, z)| \\ &\leq \sum_{k=\ell}^{m-1} s_{\boldsymbol{a}|_k} |z - f_{a_{k+1}}(s, z)| \\ &\leq \sum_{k=\ell}^{m-1} C^k (|z| + B) \\ &\leq \frac{C^\ell}{1 - C} (|z| + B) \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，写像 π_∞ は well-defined であり，定義より全射でもある．またプレ-アドレス写像 π_m の一様収束極限がアドレス写像 π_∞ である．$f_{\boldsymbol{w}}(s, z) = s^m z + \sum_{i=0}^{m-1} \xi_n^{w_i} s^i$ であるから，

$$\pi_\infty(\boldsymbol{a}, s) = \lim_{m \to \infty} f_{\boldsymbol{a}|_m}(s, z) = \sum_{i=0}^\infty \xi_n^{a_i} s^i$$

が成り立つ．

定義 1.2 (ε-連結) $\varepsilon > 0$ とする．以下の条件を満たす有限列 $\{e_i\}_{i=0}^\ell \subset A$ が存在するとき，集合 $A \subset \mathbb{C}$ 内の 2 点 x, y が A 内の ε-鎖で結べるという．
（1） $x = e_0$ かつ $y = e_\ell$．
（2） 任意の $i \in \{0, \ldots, \ell - 1\}$ に対して，$d(e_i, e_{i+1}) \leq \varepsilon$．

任意の $x, y \in A$ が A 内の ε-鎖で結べるとき A は ε-連結であるという．また連結集合 A は ε-連結である．特に A がコンパクトならば，逆も成り立つ．

[2] 記号は Baribeau-Roy[BR] に概ね従う．

ここで次の定理 1.3 を述べる準備を行う．d を $\mathbb{C}$ 上のユークリッド距離とし，空でない部分集合 $A, B \subset \mathbb{C}$ に対して，$\mathrm{dist}\,(A, B) := \inf\{d(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ を定める．これを集合間距離という．また，$j \in I$ を固定し，2 つの列 $\boldsymbol{a} = (j, a_1, \ldots)$，$\boldsymbol{b} = (j+1, b_1, \ldots) \in I^{\mathbb{N}}$ に対して，集合 Δ_n を

$$\Delta_n := \left\{ \frac{\xi_n^k - \xi_n^\ell}{\xi_n^j - \xi_n^{j+1}} \mid k, \ell \in I \right\}$$

と定める．$\Delta_n^{\mathbb{N}} := \{\boldsymbol{c} := (c_0, c_1, \ldots) \mid$ 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して，$c_i \in \Delta_n\}$ と表す．

定理 1.3 (Hata [Ha], Bousch [B1])
縮小写像の組 $\{f_j(z) = sz + \xi_n^j\}_{j \in I}$，$\xi_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}, s \in \mathbb{D}^*$ に対して，以下の条件は同値である．
（1） Λ_s は連結である．
（2） Λ_s は弧状連結である．
（3） 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，Λ_s は ε-連結である．
（4） ある $j \in I$ が存在して，$f_j(\Lambda_s) \cap f_{j+1}(\Lambda_s) \neq \varnothing$ が成り立つ．ただし，$f_n = f_1$ とする．
（5） ある $j \in I$ が存在して，$\mathrm{dist}\ (f_j(\Lambda_s), f_{j+1}(\Lambda_s)) = 0$ が成り立つ．ただし，$f_n = f_1$ とする．
（6） ある $\boldsymbol{a} = (j, a_1, \ldots)$，$\boldsymbol{b} = (j+1, b_1, \ldots) \in I^{\mathbb{N}}$ が存在して，$\pi_\infty(\boldsymbol{a}, s) = \pi_\infty(\boldsymbol{b}, s)$ が成り立つ．
（7） ある $\boldsymbol{c} \in \Delta_n^{\mathbb{N}}$ が存在して，$c_0 = 1$ かつ $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} c_i s^i = 0$ が成り立つ．

証明． （4）$\Longrightarrow$（6），（6）$\Longleftrightarrow$（7），（7）$\Longrightarrow$（4）は明らか．Hata[Ha] [3] により，（1）$\Longleftrightarrow$（2）$\Longleftrightarrow$（4）．また，Λ_s のコンパクト性により，（1）$\Longleftrightarrow$（3），（4）$\Longleftrightarrow$（5）である． □

注意 1.4　Λ_s の回転対称性により，定理 1.3(3) ならば，任意の $j \in I$ に対して，$f_j(\Lambda_s) \cap f_{j+1}(\Lambda_s) \neq \varnothing$ が成り立つ．ただし，$f_n = f_1$ とする．

ここで次の定理 1.5 を述べるための準備を行う．まず中心 $a \in \mathbb{C}$，半径 $\varepsilon > 0$ の開円板を

$$B(a, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, a) < \varepsilon\}$$

と定め，部分集合 $A \subset \mathbb{C}$ に対して，

$$N_\varepsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{ある } a \in A \text{ が存在して}, d(z,a) < \varepsilon\} = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$$

を集合 A の ε-膨張という．次に空でない部分集合 $A \subset \mathbb{C}$ に対して，$\mathrm{diam}\ A := \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\}$ と定める．

ここで, $F \subset \mathbb{C}$ を空でない部分集合とする．$\mathbb{C}$ の部分集合の族 $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ が $F \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^\infty U_i$ かつ $0 < \mathrm{diam}\ U_i \leq \delta$ を満たすとき，F の δ-被覆であるという．この $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ が δ-被覆全体を動くとき，

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) := \inf\left\{ \sum_{i=1}^\infty (\mathrm{diam}\ U_i)^s \mid \{U_i\}_{i=1}^\infty \ :\ F \text{ の} \delta\text{-被覆} \right\}$$

と定める．$\delta \to 0$ の極限を $\mathcal{H}(F) := \displaystyle\lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$ と書き，F の s 次元 Hausdorff 外測度という．これを用いて，$\dim_H(F) := \inf\{s \mid \mathcal{H}(F) = 0\} = \sup\{s \mid \mathcal{H}(F) = \infty\}$ と定め，F の Hausdorff 次元という．また一般に，相似写像から成る IFS$\{f_j\}_{j \in I}$ が開集合条件を満たすとは，空でない有界開集合 $F \subset \mathbb{C}$ が，$\displaystyle\bigcup_{j \in I} f_j(F) \subset F$ であり，各 $f_j(F)$ 同士が互いに素であるときを言う．いま，IFS$\left\{f_j(z) = sz + \xi_n^j\right\}_{j \in I}$ が開集合条件を満たせば，Hutchinson[Hu] の定理から

$$\dim_H(\Lambda_s) = \frac{-\log n}{\log |s|}$$

を得ることが知られている．[4]

[3] この定理の証明は第 4 章で扱う．
[4] 証明は Falconer[F] を見よ．

定理 1.5 (Bandt-Hung [BHu])　$\mathcal{M}_n\ (n \geq 2)$ に対して，次が成り立つ．
（1）$\mathcal{M}_n$ は $\mathbb{D}^*$ 内の閉集合である．
（2）次の包含関係が成立する．

$$\mathbb{A}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) := \left\{ s \in \mathbb{D}^* \mid \frac{1}{\sqrt{n}} < |s| < 1 \right\} \subset \mathcal{M}_n.$$

(2) の証明．$s \in \mathbb{D}^* \setminus \mathcal{M}_n$ をとる．このとき，Λ_s は全不連結である．$\delta := \dfrac{1}{2}\mathrm{dist}\,(f_0(\Lambda_s), f_1(\Lambda_s))$ とする．開集合条件の定義にある F として $N_\delta(\Lambda_s)$ を考える．このとき，$\{f_j\}_{j\in I}$ は開集合条件を満たす．よって，

$$\frac{-\log n}{\log |s|} = \dim_H(\Lambda_s) \leq \dim_H(\mathbb{C}) = 2$$

であるから，$|s| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ を得る．□

2　$\mathcal{M}_n$ の正則閉性

この章では，主結果である次の定理 2.13 を証明する．

定理 2.13　任意の $n \geq 4$ に対して，$\mathcal{M}_n$ は正則閉集合である．すなわち，$\mathcal{M}_n = \overline{\mathrm{int}\,\mathcal{M}_n}$.

そのために，まず準備を行う．集合 X_s を $X_s := \Lambda_s \cup (\mathbb{C} \setminus \Lambda_s$の有界な連結成分全体$)$ と定義し，凸性に着目し，

$$\mathcal{M}_n^\circ := \{s \in \mathcal{M}_n \mid X_s\ :\ \text{凸集合}\},\quad \mathcal{M}_n^\times := \{s \in \mathcal{M}_n \mid X_s\ :\ \text{非凸集合}\}$$

と定め，$\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n^\circ \sqcup \mathcal{M}_n^\times$ と分ける．極限集合 Λ_s はオーダー n の回転対称性をもつため，定理 1.3 により，ある $f_j(\Lambda_s), f_{j+1}(\Lambda_s)$ についてのみ考察すればよい．以後，$j = 0$ としても一般性を失わない．

2.1　集合 X_s が凸の場合

2 点 $x, y \in X_s$ を結ぶ閉線分を $[x, y] = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\}$ と表し，集合 X_s 上の辺 σ の長さを $|\sigma|$ と表す．ここで，$\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}^2$ と同一視する．$u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，$H(u,\alpha) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid (z,u) = \alpha\}$ を定め，$H(u,\alpha)$ が定める 2 つの閉半平面を

$$H^+(u,\alpha) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid (z,u) \geq \alpha\},\quad H^-(u,\alpha) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid (z,u) \leq \alpha\}$$

と定める．ただし (,) は標準的内積とする．以後は簡単の為に，H^+, H^- と表す．

定義 2.1 (支持線・支持半平面) 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ とする．
（1）$z \in A$ に対して，$z \in A \cap H$ が成り立ち，$A \subset H^+$ または $A \subset H^-$ が成り立つとき，H は点 z において A を支持するという．H がある点 $z \in A$ において A を支持するとき，H は A を支持するという．このとき，H を A の支持線という．
（2）H が A を支持し，$A \subset H^-$ となるとき，H^- を A の支持半平面といい，u を H と H^- の外向き法ベクトルという．また，H が点 z において A を支持するとき，u を A の z における外向き法ベクトルという．H^+ のときも同様に定める．

注意 2.2　$A \subset \mathbb{R}^2$ の空でない閉凸集合とする．このとき，集合 A の任意の境界点において A の支持線が存在することが知られている．これを支持線定理という．

命題 2.3　任意の $j \in I$ に対して，ある辺 $\sigma \subset \partial X_s$ が存在して，辺 σ の向きは $\xi_n^j(1-s)$ である．

証明. $j \in I$ を固定する．集合 X_s は空でない閉凸集合であるから，注意 2.2 により ∂X_s の各点で支持線が存在する．$X_s \subset H^-$ となるように向き $\xi_n^j \dfrac{1-s}{s}$ の支持線 H を考え，点 $p \in H \cap X_s$ をとる．このとき，$f_j(p), f_{j+1}(p) \in \partial X_s$ かつ $f_j(p) \neq f_{j+1}(p)$ が成り立つ．集合 X_s の凸性により，点 $f_j(p)$ における支持線 H_j と点 $f_{j+1}(p)$ における支持線 H_{j+1} は一致する．よって，線分 $[f_j(p), f_{j+1}(p)]$ を含む X_s の辺を σ と置けば証明が終わる． $\square$

命題 2.4 $j \in I$ を 1 つ固定する．向きが $\xi_n^j(1-s)$ である全ての辺 $\sigma \subset \partial X_s$ に対して，ある一意的な辺 $\sigma' \subset \partial X_s$ が存在して，$\sigma = f_j(\sigma') \cup f_{j+1}(\sigma')$ が成り立つ．

証明. $X_s \subset H^-$ となるように向き $\xi_n^j \dfrac{1-s}{s}$ の支持線 H を考え，$\sigma' := H \cap X_s$ と置く．$|\sigma| > 0$ であるためには，$|\sigma'| > 0$ が必要であるから，$\sigma \supset f_j(\sigma') \cup f_{j+1}(\sigma')$ が成り立つ．一方で，$f_i(\omega) \subset \sigma$ となる辺 $\omega \neq \sigma$ と番号 $i \in I$ は存在しない．もし存在するなら，辺 ω の向きは $\xi_n^i \dfrac{1-s}{s}$ となり，$\omega \neq \sigma$ に反する．よって，$\sigma \subset f_j(\sigma') \cup f_{j+1}(\sigma')$ が成り立つ． $\square$

命題 2.5 $j \in I$ を 1 つ固定する．向きが $\xi_n^j(1-s)$ ではない全ての辺 $\sigma \subset \partial X_s$ に対して，ある一意的な辺 $\sigma'' \subset \partial X_s$ と一意的な番号 $k \in I$ が存在して，$\sigma = f_k(\sigma'')$ が成り立つ．

証明. 辺 σ の向きを τ と置く．$X_s \subset H^-$ となるように向き $\dfrac{\tau}{s}$ の支持線 H を考え，$\sigma'' := H \cap X_s$ と置く．$|\sigma| > 0$ であるためには，$|\sigma''| > 0$ が必要であるから，ある $k \in I$ が存在して，$\sigma \supset f_k(\sigma'')$ が成り立つ．一方で，$f_i(\omega) \subset \sigma$ となる辺 $\omega \neq \sigma$ と番号 $i \in I$ は存在しない．もし存在するなら，辺 ω の向きは $\dfrac{\tau}{s}$ となり，$\omega \neq \sigma$ に反する．よって，$\sigma \subset f_k(\sigma'')$ が成り立つ． $\square$

2.2 集合 X_s が非凸の場合

部分集合 $A, B \subset \mathbb{C}$ に対して，$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ により $A + B$ を定める．$w \in \mathbb{C}$ に対して，$A + \{w\}$ を $A + w$ と表す．

定義 2.6 (ショートホップパス) $\varepsilon > 0$, $s \in \mathcal{M}_n$ とし，D を $p, q \in D$ となる閉円板と同相な $\mathbb{C}$ 内のコンパクト集合とする．以下の条件を満たす有限個の列 $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=0}^{\ell} \subset I^{\mathbb{N}}$ が存在するとき，2 点 $p, q \in \Lambda_s$ は (ε, D)-ショートホップパスで結べるという．

(1) $\pi_\infty(\boldsymbol{e}_0, s) = p$ かつ $\pi_\infty(\boldsymbol{e}_\ell, s) = q$.

(2) 任意の $i \in \{0, \ldots, \ell-1\}$ に対して，$d(\pi_\infty(\boldsymbol{e}_i, s), \pi_\infty(\boldsymbol{e}_{i+1}, s)) \leq \varepsilon$.

(3) 集合 $\{\pi_\infty(\boldsymbol{e}_i, s)\}_{i=0}^{\ell} \subset D$.

命題 2.7 列 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in I^{\mathbb{N}}$ は先頭より長さ m の共通な語を持つとする．$s \in \mathcal{M}_n^\times$, D を $p, q \in D$ となる閉円板と同相な $\mathbb{C}$ 内のコンパクト集合とする．また，$\mathrm{dist}\,(f_0(\Lambda_s), f_1(\Lambda_s)) \leq \delta$ かつ $\overline{N_{\frac{\delta}{2}|s|^m}(f_w(\Lambda_s))} \subset D$ となる $\delta > 0$ が存在したとする．このとき，2 点 $\pi_\infty(\boldsymbol{a}, s), \pi_\infty(\boldsymbol{b}, s) \in \Lambda_s$ は結ぶ $(|s|^m\delta, D)$-ショートホップパスで結べる．

証明. ある $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}'$ を用いて，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{w}\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b} = \boldsymbol{w}\boldsymbol{b}'$ と書ける．$\overline{N_{\frac{\varepsilon}{2}}(\Lambda_s)} \subset D'$ となる集合 $D' \subset \mathbb{C}$ を考える．定理 1.3 により，$\overline{N_{\frac{\varepsilon}{2}}(\Lambda_s)}$ は弧状連結であるから，δ-連結でもある．よって，2 点 $\pi(\boldsymbol{a}', s), \pi(\boldsymbol{b}', s)$ を結ぶ (δ, D')-ショートホップパスが存在する．これを f_w で写したものが，2 点 $\pi_\infty(\boldsymbol{a}, s), \pi_\infty(\boldsymbol{b}, s) \in \Lambda_s$ は結ぶ $(|s|^m\delta, D)$-ショートホップパスがある． $\square$

定義 2.8 (トラップ) D を $\Lambda_s \subset \operatorname{int} D$ となる閉円板と同相な $\mathbb{C}$ 内のコンパクト集合，$s \in \mathcal{M}_n^\times$ とする．以下の条件を満たすとき，長さ m の語 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in I^m$ は (s, D)-トラップであるという．

(1) 語 $\boldsymbol{w}_1$ の初めは 0，語 $\boldsymbol{w}_2$ の初めは 1 である．すなわち，

$$\boldsymbol{w}_1 = (0, a_1, \ldots, a_{m-1}) \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{w}_2 = (1, b_1, \ldots, b_{m-1}).$$

(2) 2 点 $P_s^+, P_s^- \in f_{\boldsymbol{w}_1}(\Lambda_s) \setminus f_{\boldsymbol{w}_2}(D)$ を結ぶ道 α と 2 点 $Q_s^+, Q_s^- \in f_{\boldsymbol{w}_2}(\Lambda_s) \setminus f_{\boldsymbol{w}_1}(D)$ を結ぶ道 β が存在して，これらの代数的交点数 [5] は 0 ではない．

(3) ある $\varepsilon > 0$ が存在して，$\overline{N_{\frac{\varepsilon}{2}}(\Lambda_s)} \subset D$ かつ $\operatorname{dist}(f_0(\Lambda_s), f_1(\Lambda_s)) \leq \varepsilon$ が成り立つ．

定義 2.9 (セルライク・トラップライク)

(1) 連結かつコンパクトな部分集合 $X \subset \mathbb{C}$ がセルライクであるとは，$\mathbb{C} \setminus X$ が連結集合であるときをいう．

(2) 部分集合 $X \subset \mathbb{C}$ をセルライクとする．以下の条件を満たすとき，$w \in \mathbb{C}$ はトラップライクであるという．

① 集合 $X \cup (X + w)$ は連結集合である．

② 2 点 $p_s^\pm \in X \setminus (X + w)$ と 2 点 $q_s^\pm \in (X + w) \setminus X$ から成る $\partial(X \cup (X + w))$ 上の交代的な 4 点 $p_s^\pm, q_s^\pm$ が存在する．

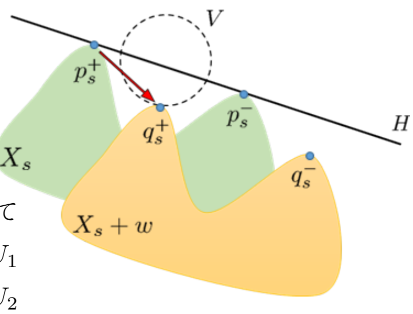
命題 2.10 $s \in \mathcal{M}_n^\times$ ならば，トラップライクである $w \in \mathbb{C}$ が存在する．

証明. 集合 X_s の支持線 H を以下の条件を満たすようにとる．

① ある開集合 $U_1, U_2 \subset \partial X_s$ が存在して，$H \cap X_s = U_1 \cup U_2$.

② 集合 U_1, P_2 はある開区間 $J \subset H$ より分離される．

③ $X_s \subset H^-$.



開区間 J の中点を含み，$\mathbb{C} \setminus X_s$ にある開円板を V とする．支持線 H に関して X_s 側の，$q_s^+ \in V \setminus H$ を選ぶ．U_1 内の点において最も V に近い点を $p_s^+ \in U_1$ とする．$w := q_s^+ - p_s^+$ と置くと，$w \in \mathbb{C}$ はトラップライクである．実際に，U_2 内の点において最も V から遠い点を $p_s^- \in U_2$ とする．このとき，$q_s^- = p_s^- + w$ である． □

命題 2.11 $s_0 \in \mathcal{M}_n^\times$ とする．このとき，ある $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in I^{\mathbb{N}}$ が存在して，任意の $\delta > 0$ に対して，ある $\mu_\delta > 0$, $M_\delta \in \mathbb{N}$ が存在して，$m \geq M_\delta$ ならば，$T_m : B(s_0, \delta) \to B(0, \mu_\delta)$ は全射である．ここで，写像 T_m は次で定めるとし，$g_n \in \mathbb{C}$ は正 n 角形 $\{\rho_j\}_{j \in I}$ の重心とする．

$$\begin{array}{rccc} T_m : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & s & \longmapsto & \pi_m(\boldsymbol{b}|_m, s, g_n) - \pi_m(\boldsymbol{a}|_m, s, g_n) \end{array}$$

証明. $s_0 \in \mathcal{M}_n$ であるから，定理 1.3(5) により，ある $\boldsymbol{a} = (0, a_1, \ldots)$, $\boldsymbol{b} = (1, b_1, \ldots) \in I^{\mathbb{N}}$ が存在して，$\pi_\infty(\boldsymbol{a}, s_0) = \pi_\infty(\boldsymbol{b}, s_0)$ である．$\varepsilon > 0$ を任意に 1 つ取り固定し，写像 T_m の一様収束極限を T_∞ と表す．

$\boldsymbol{a} = (0, 0, 0, \ldots)$, $\boldsymbol{b} = (1, 1, 1, \ldots)$ のときに限り，任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して，$T_\infty(s) = 1$ である．しかし，$T_\infty(s_0) = \pi_\infty(\boldsymbol{b}, s_0) - \pi_\infty(\boldsymbol{a}, s_0) = 0$ であるから，写像 T_m は定数ではない正則関数である．開写像定理により，写像 T_m は開写像である．よって，任意の $\delta > 0$ に対して，$T_m(B(s_0, \delta))$ は $\mathbb{C}$ 内の開集合である．従って，ある $\mu_\delta > 0$ が存在して，$B(0, \mu_\delta) \subset T_m(B(s_0, \delta))$ が成り立つ． □

[5] 詳しくは Guillemin-Pollack[GP] を見よ．

系 2.12 $s \in \mathcal{M}_n^\times$ とする．このとき，ある $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in I^{\mathbb{N}}$ が存在して，任意の $w \in \mathbb{C}$ と $\delta > 0$ に対して，ある $s_1 \in B(s, \delta)$ と番号 $m \in \mathbb{N}$ が存在して，次が成り立つ．

$$w = \frac{1}{s_1^m}\left(\pi_m(\boldsymbol{b}|_m, s_1, g_n) - \pi_m(\boldsymbol{a}|_m, s_1, g_n)\right)$$

証明． 拡大写像 $g : \mathbb{C} \ni z \mapsto s_1^{-m} z \in \mathbb{C}$ と命題 2.11 の T_m はそれぞれ全射であるから，$g \circ T_m$ も全射． □

2.3 $\mathcal{M}_n$ $(n \geq 4)$ の正則閉性

ある $q \in \mathbb{N}$, $m \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, $k \in I \setminus \{0\}$ を用いて，

$$W_n := \left\{ s \in \mathbb{D}^* \mid \arg s = \frac{2\pi}{q}\left(m - \frac{k}{n}\right) \text{ かつ } |s| \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

と定める．

定理 2.13 任意の $n \geq 4$ に対して，$\mathcal{M}_n$ は正則閉集合である．すなわち，$\mathcal{M}_n = \overline{\operatorname{int} \mathcal{M}_n}$.

証明． $\mathcal{M}_n \supset \overline{\operatorname{int} \mathcal{M}_n}$ は，$\mathcal{M}_n$ が閉集合であるから明らか．従って，$\mathcal{M}_n \subset \overline{\operatorname{int} \mathcal{M}_n}$ を示せばよい．いま，$s_0 \in \mathcal{M}_n$ を任意にとる．$\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n^\circ \sqcup \mathcal{M}_n^\times$ に注意し，場合分けを行う．

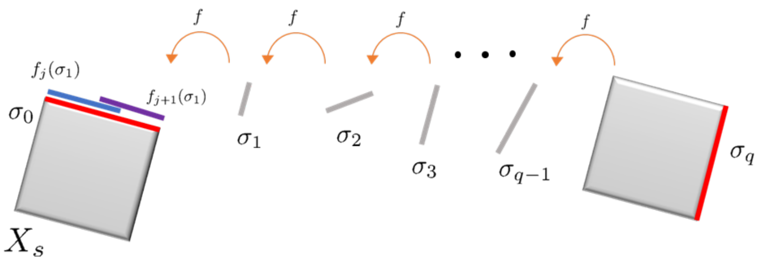
(Case 1) $s_0 \in \mathcal{M}_n^\circ$ のとき．

命題 2.3 により，特に $j = 0$，すなわち集合 X_{s_0} 上に向き $1 - s_0$ である辺 σ_0 が存在する．この辺 σ_0 に対して，命題 2.4 を適用すると，ある一意的な辺 σ_1 を得る．この辺 σ_1 の向きは $1 - s_0$ ではないため，命題 2.5 を適用することにより，辺 σ_2 を得る．この操作を繰り返す．集合 X_{s_0} の有界性に注意すると，命題 2.5 は無限回適用できない．よって，ある $q \in \mathbb{N}$ が存在して，以下を満たすような集合 X_{s_0} 上の辺の有限列 $\{\sigma_i\}_{i=0}^q$ を得る．

① 辺の長さに関して拡大的である．すなわち，任意の $i \in \{0, \ldots, q-1\}$ に対して，$|\sigma_{i+1}| = |s_0|^{-1}|\sigma_i|$ が成り立つ．このとき $|\sigma_q| = |s_0|^{-q}|\sigma_0|$ が従う．

② ある $k \in I \setminus \{0\}$ が存在して，辺 σ_q の向きは $\xi_n^k(1 - s_0)$ である．

③ $|\sigma_0| = |\sigma_q|$.



したがって，

$$2|s_0|^q|\sigma_0| = 2|s_0|^q|\sigma_q| = 2|s_0||\sigma_1| \geq |\sigma_0|$$

であるから，$|s_0| \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$ を得る．$n \geq 4$ ならば，任意の $q \in \mathbb{N}$ に対して，不等式

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \quad \cdots\cdots(\ast)$$

は成立する．また，$\xi_n^k(1 - s_0)$ と $s_0^{-q}(1 - s_0)$ は向きが等しいため，ある $c > 0$ が存在して，

$$s_0^{-q}(1 - s_0) = c\xi_n^k(1 - s_0)$$

が成り立つ．これは，ある $q \in \mathbb{N}, k \in I$ が存在して，$s_0^q \xi_n^k > 0$ と同値である．

これにより，ある $m \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ が存在して，

$$\arg s_0 = \frac{2\pi}{q}\left(m - \frac{k}{n}\right)$$

が従う．よって定理 1.5 により，

$$s_0 \in W_n \subset \overline{\mathbb{A}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \subset \overline{\operatorname{int}\mathcal{M}_n}.$$

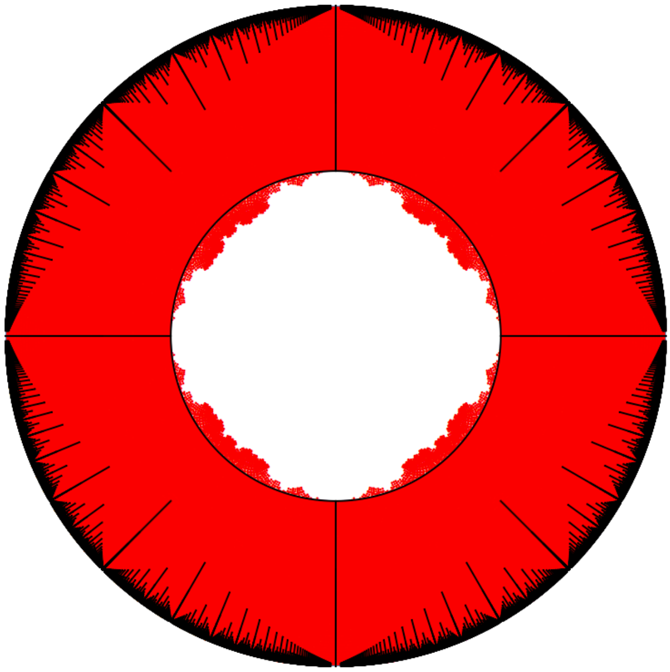


図 1　$\mathcal{M}_4$(赤)，W_4 と $|s| = \dfrac{1}{\sqrt{4}}$ の円 (黒)

図 1 を見ると，$W_4 \subset \overline{\mathbb{A}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4}}\right)}$ を確認できる．

(Case 2)　$s_0 \in \mathcal{M}_n^{\times}$ のとき．

命題 2.10 より，あるトラップライク $w \in \mathbb{C}$ が存在する．定義 2.9 より，

$$p_{s_0}^{+},\ p_{s_0}^{-} \in \partial X_{s_0} \setminus (X_{s_0} + w) \quad \text{かつ} \quad q_{s_0}^{+},\ q_{s_0}^{-} \in \partial(X_{s_0} + w) \setminus X_{s_0}$$

が存在する．$\partial X_{s_0} \subset \Lambda_{s_0}$ であるから，$p_{s_0}^{\pm}, q_{s_0}^{\pm} \in \Lambda_{s_0}$ である．定理 1.3 により，2 点 $p_{s_0}^{\pm}$ を結ぶ道 α と 2 点 $q_{s_0}^{\pm}$ を結ぶ道 β であり，代数的交点数が 0 でないものが存在する．

X_{s_0} はコンパクト集合であるから，ある $\varepsilon > 0$ が存在して，

$$p_{s_0}^{+},\ p_{s_0}^{-} \in \Lambda_{s_0} \setminus \overline{N_\varepsilon\left(X_{s_0} + w\right)} \quad \text{かつ} \quad q_{s_0}^{+},\ q_{s_0}^{-} \in (\Lambda_{s_0} + w) \setminus \overline{N_\varepsilon\left(X_{s_0}\right)} \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ．Λ_{s_0} と $\overline{N_\varepsilon\left(X_{s_0} + w\right)}$ のコンパクト性により，$\operatorname{dist}\left(\Lambda_{s_0}, \overline{N_\varepsilon\left(X_{s_0} + w\right)}\right) > 0$ である．このことと，アドレス写像 π_∞ は $I^{\mathbb{N}}$ 上一様連続な関数であることより，s に関する連続的な摂動に関して，① は成り立つ．すなわち，ある $\delta > 0$ が存在して，任意の $s \in B(s_0, \delta)$ に対して，ある $\varepsilon' > 0$ が存在して，

$$p_{s}^{+},\ p_{s}^{-} \in \Lambda_{s} \setminus \overline{N_{\varepsilon'}\left(X_{s} + w\right)} \quad \text{かつ} \quad q_{s}^{+},\ q_{s}^{-} \in (\Lambda_{s} + w) \setminus \overline{N_{\varepsilon'}\left(X_{s}\right)}$$

が成り立つ．

ここで，定理 1.3 により，$\boldsymbol{a} = (0, a_1, \ldots)$，$\boldsymbol{b} = (1, b_1, \ldots) \in I^{\mathbb{N}}$ が存在して，$\pi_\infty(\boldsymbol{a}, s_0) = \pi_\infty(\boldsymbol{b}, s_0)$ が成り立ち，系 2.12 により点 s_0 のいくらでも近くに，点 $s_1 \in B(s_0, \delta)$ とある番号 $m \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$w = \frac{1}{s_1^m}\left(\pi_m(\boldsymbol{b}|_m, s_1, g_n) - \pi_m(\boldsymbol{a}|_m, s_1, g_n)\right) \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ．このとき，$D := \overline{N_{\varepsilon'}(X_{s_1})}$ と置くと，長さ m の語 $\boldsymbol{a}|_m, \boldsymbol{b}|_m$ は (s_1, D)-トラップである．

実際に，$P_{s_1}^{\pm} := f_{\boldsymbol{a}|_m}(p_{s_1}^{\pm})$，$Q_{s_1}^{\pm} := f_{\boldsymbol{a}|_m}(q_{s_1}^{\pm})$，$\alpha' := f_{\boldsymbol{a}|_m}(\alpha)$，$\beta' := f_{\boldsymbol{a}|_m}(\beta)$ (複号同順) と置く．任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して ② は成り立つので，次の関係式

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{a}|_m}(\Lambda_{s_1} + w) &= f_{\boldsymbol{a}|_m}(\Lambda_{s_1}) + f_{\boldsymbol{a}|_m}(w) \\
&= f_{\boldsymbol{a}|_m}(\Lambda_{s_1}) + s_1^m w \\
&= f_{\boldsymbol{b}|_m}(\Lambda_{s_1})
\end{aligned}
$$

を得て，

$$
P_{s_1}^{\pm} \in f_{\boldsymbol{a}|_m}(\Lambda_{s_1}) \setminus f_{\boldsymbol{a}|_m}\left(\overline{N_{\varepsilon'}(X_{s_1} + w)}\right) \subset f_{\boldsymbol{a}|_m}(\Lambda_{s_1}) \setminus f_{\boldsymbol{b}|_m}(D)
$$

かつ

$$
Q_{s_1}^{\pm} \in f_{\boldsymbol{a}|_m}(\Lambda_{s_1} + w) \setminus f_{\boldsymbol{a}|_m}\left(\overline{N_{\varepsilon'}(X_{s_1})}\right) \subset f_{\boldsymbol{b}|_m}(\Lambda_{s_1}) \setminus f_{\boldsymbol{a}|_m}(D)
$$

となり，2 点 $P_{s_1}^{\pm}$ を結ぶ道 α' と 2 点 $Q_{s_1}^{\pm}$ を結ぶ道 β' の代数的交点数は 0 ではない．

このとき，背理法により $s_1 \in \mathcal{M}_n$ が示せる．実際に，$\delta = \mathrm{dist}\,(f_0(\Lambda_{s_1}), f_1(\Lambda_{s_1})) > 0$ と仮定する．語 $\boldsymbol{a}|_m, \boldsymbol{b}|_m$ は (s_1, D)-トラップであるから，

$$
\alpha \subset f_{\boldsymbol{a}|_m}\left(\overline{N_{\frac{\delta}{2}}(X_{s_1})}\right) \subset \overline{N_{|s_1|^m \frac{\delta}{2}}\left(f_{\boldsymbol{a}|_m}(X_{s_1})\right)}
$$

かつ

$$
\beta \subset f_{\boldsymbol{b}|_m}\left(\overline{N_{\frac{\delta}{2}}(X_{s_1})}\right) \subset \overline{N_{|s_1|^m \frac{\delta}{2}}\left(f_{\boldsymbol{b}|_m}(X_{s_1})\right)}
$$

となる．このとき，

$$
\mathrm{dist}\left(\overline{N_{|s_1|^m \frac{\delta}{2}}\left(f_{\boldsymbol{a}|_m}(X_{s_1})\right)}, \overline{N_{|s_1|^m \frac{\delta}{2}}\left(f_{\boldsymbol{b}|_m}(X_{s_1})\right)}\right) \leq \delta |s_1|^m < \delta
$$

となり矛盾する． □

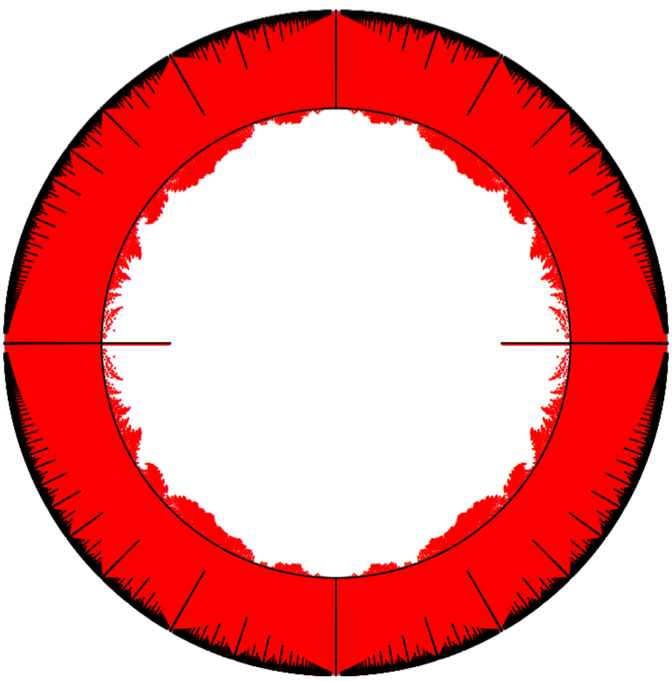


図 2　$\mathcal{M}_2$(赤)，W_2 と $|s| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の円 (黒)

注意 2.14　図 2 より，$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq |s| < 1$ の円環から飛び出た 2 本の ‘スパイク’ が確認できる．

2.4　$\mathcal{M}_3$ の正則閉性について

ここで，定理 2.13 の証明の途中にある不等式 (∗) について $n=3$ の場合を考察する．$n=3, q \geq 2$ のとき，$\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$ が成立する．しかしながら，$n=3, q=1$ のとき，$\dfrac{1}{\sqrt{n}} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$ となる．

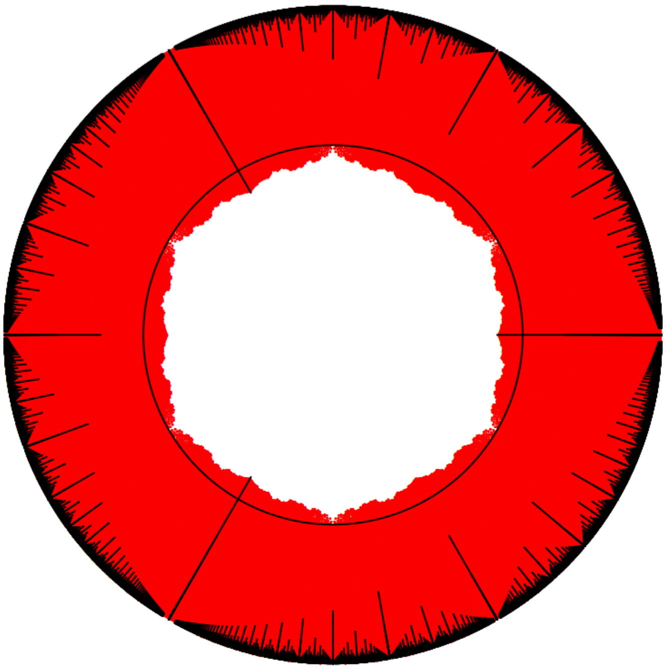


図 3　$\mathcal{M}_3$(赤)，W_3 と $|s| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の円 (黒)

実際に図 3 より，$\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq |s| < 1$ の円環から飛び出た 3 本の ‘スパイク’ が確認できる． よって，定理 2.13 で用いた証明方法では，

$$\left\{ re^{i\theta} \mid \theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \text{ かつ } r \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\} \subset \overline{\mathrm{int}\,\mathcal{M}_3}$$

を示すことができない．もし上の包含関係が示すことができれば，$n=3$ の場合にも Bandt らの証明と比べ，幾何的かつシンプルな別証明を与えることができる．また $s=0.51$ は上述の飛び出た ‘スパイク’ 上の点であるが，図 4,5,6 より $s = 0.51 \in \mathrm{int}\,\mathcal{M}_3$ が期待できる．

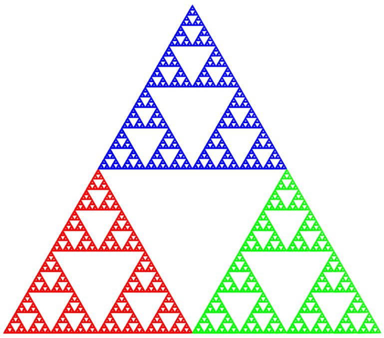


図 4　$s = 0.5$

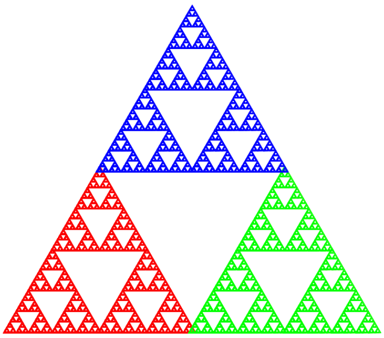


図 5　$s = 0.51$

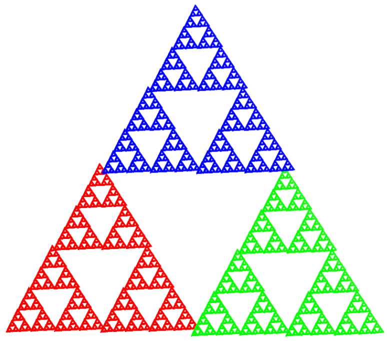


図 6　$s = 0.51 + 0.01i$

3 $\mathcal{M}_n$ $(n \geq 3)$ の連結性

$s \in \mathcal{M}_n$, $L := \operatorname{diam} \Delta_n$ に対して，次の集合を準備する．

$$W := \left\{ g(\boldsymbol{c}, s) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i s^i,\ \boldsymbol{c} \in \Delta_n^{\mathbb{N}},\ |c_i| \leq L \right\}, \qquad W_N := \left\{ g(\boldsymbol{c}, s) = 1 + \sum_{i=1}^{N-1} c_i s^i,\ \boldsymbol{c} \in \Delta_n^{\mathbb{N}},\ |c_i| \leq L \right\}$$

$$H := \left\{ g(\boldsymbol{c}, s) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i s^i,\ \boldsymbol{c} \in \Delta_n^{\mathbb{N}} \right\}, \qquad H_N := \left\{ g(\boldsymbol{c}, s) = 1 + \sum_{i=1}^{N-1} c_i s^i,\ \boldsymbol{c} \in \Delta_n^{\mathbb{N}} \right\}.$$

注意 3.1 簡単のために，$g \in H$ を $g = (1, c_1, c_2, \ldots)$，$g \in H_N$ を $g = (1, c_1, c_2, \ldots, c_{N-1})$ と表す．また，列 $\boldsymbol{c}$ を固定したとき $g(\boldsymbol{c}, s)$ を $g(s)$ と表す．

定義 3.2 (カット写像) 写像 $\mathrm{Cut}_N : W \to W_N$ を次のように定め，カット写像という．

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{Cut}_N : & W & \longrightarrow & W_N \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} c_i s^i & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{N-1} c_i s^i \end{array}$$

ここで，$g \in W$ の non-vanishing な最低次の次数を Val g と表すとする．

命題 3.3 $R + \varepsilon < 1$ なる $\varepsilon > 0$, $R \in (0, 1)$ が与えられているとする．このとき，次の条件 (＊) を満たす $N \in \mathbb{N}$ が存在する．

(＊) $g_0(s_0) = 0$ なる任意の $(g_0, s_0) \in W \times \overline{B(0, R)}$ と，Val $(g_0 - g) \geq N$ なる $g \in W$ に対して，ある $s' \in B(s_0, \varepsilon)$ が存在して，$g(s') = 0$ である．

証明. W に一様収束位相を考える．$F := \{(g_0, s_0) \in W \times \overline{B(0, R)} \mid g_0(s_0) = 0\}$ とおく．定理 1.3 より，$F \neq \varnothing$. また，補題 3.4 より F はコンパクトである．$\mathrm{Val}(g_0 - g_1) =: n = n_{g_0, g_1}$ なる $g_1 \in W$ を任意に 1 つ取り固定する．このとき，$|s| < R + \varepsilon$ ならば，

$$\begin{aligned} |g_0(s) - g_1(s)| &= \left| \sum_{i=n}^{\infty} (b_i - c_i) s^i \right| \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} (|b_i| + |c_i|) s^i \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} 2L s^i = \frac{2L|s|^n}{1 - |s|} \leq \frac{2L|R + \varepsilon|^n}{1 - |R + \varepsilon|} =: C_{R, \varepsilon, g_0, g_1} \end{aligned}$$

が従う。ここで，$\delta = \delta_{\varepsilon, R, s_0}$ を次の 2 つの条件を満たすようにとる．

① $0 < \delta < \min \left\{ \dfrac{R + \varepsilon - |s_0|}{2}, \dfrac{\varepsilon}{2} \right\}$.

② g_0 は $\partial B(s_0, \delta)$ 上に零点を持たず，$\operatorname{int} B(s_0, \delta)$ に零点 s_0 のみを持つ．

$\eta := \displaystyle\min_{s \in \partial B(s_0, \delta)} |g_0(s)|$ と置き，また

$$\hat{V} := \left\{ (g_1, s_1) \in F \mid s_1 \in B(s_0, \delta) \text{ かつ } \max_{|s| < R + \varepsilon} |g_1(s) - g_0(s)| < \frac{\eta}{2} \right\}$$

と置く．$C_{\varepsilon, R, g_0, g_1} < \dfrac{\eta}{2}$ を満たすように番号 $\hat{n} = \hat{n}_{\varepsilon, R, g_0, g_1}$ をとる．

このとき，$\mathrm{Val}(g_1 - g_2) \geq \hat{n}$ なる任意の $g_2 \in W$ に対して，$g_2(s_2) = 0$ となる $s_2 \in B(s_1, \varepsilon)$ が一意的に存在する．実際に，$|g_0(s) - g_2(s)| \leq |g_0(s) - g_1(s)| + |g_1(s) - g_2(s)| < \eta$ であるから Roushe の定理により，$g_2 = g_0 + (g_2 - g_0)$ と g_0 は $\operatorname{int} B(s_0, \delta)$ に同数の零点を持つ．②より，g_2 の零点は 1 点のみであり，

$|s_2 - s_1| \leq |s_2 - s_0| + |s_0 - s_1| < 2\delta \leq \varepsilon$. いま，$F$ はコンパクトであるから，$F \subset \bigcup_{k:\text{ finite}} \hat{V}_k$ である．番号 $\hat{n}$ は，この $\hat{V}_k$ 毎に決まるから，$N := \max_{k:\text{ finite}} \hat{n}_k$ と置けば，証明が終わる． □

補題 3.4　命題 3.3 の証明途中での，F は $W \times \overline{B(0,R)}$ 内の閉集合である．

証明． $\left(W \times \overline{B(0,R)}\right) \setminus F$ が開集合であることを示す．$(f,s) \in \left(W \times \overline{B(0,R)}\right) \setminus F$ を任意にとる．f の連続性により，ある $\varepsilon' > 0$ と s のコンパクトな近傍 U が存在して，任意の $t \in U$ に対して，$|f(t)| > \varepsilon'$ が成り立つ．また，W は一様収束位相を考えているため，この ε' に対して，ある番号 $M_{\varepsilon'}$ が存在して，$m \geq M_{\varepsilon'}$ ならば，$|f(t) - g(t)| < \varepsilon'$ が成り立つ．

このとき，ある f のコンパクトな近傍 $V \subset W$ が存在して，任意の $g \in V$ に対して，$|g(t)| > 0$ である．実際に，$|g(t)| \geq |f(t)| - |g(t) - f(t)| > \varepsilon' - \varepsilon' = 0$. 従って，$V \times U \subset \left(W \times \overline{B(0,R)}\right) \setminus F$ である． □

命題 3.5　$N \in \mathbb{N}$ を命題 3.3 により得られたものとする．$A, B \in H_N$ が与えられているとする．このとき，次の 5 つの条件を見たす W 内の有限列 $p_0 q_0 \ldots p_{m-1} q_{m-1} p_m$ が存在する．

① 任意の $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ に対して，$q_i \in W$.
② 任意の $i \in \{0, \ldots, m\}$ に対して，$p_i \in H_N$.
③ 任意の $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ に対して，p_i は q_i を割り切る．
④ 任意の $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ に対して，$p_{i+1} := \mathrm{Cut}_N(q_i)$.
⑤ $p_0 = A$　かつ　$p_m = B$.

証明． $A, B \in H_N$ に対して，$\mathrm{Err}(A,B) := \min\{N, \mathrm{Val}(A,B)\}$ とおく．この $\mathrm{Err}(A,B)$ に関する数学的帰納法で示す．

(Case 1)　$\mathrm{Err}(A,B) = N$ のとき，$A = B$ である．

(Case 2)　$j < \mathrm{Err}(A,B)$ なる任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して，命題が成立するとせよ．$\mathrm{Err}(A,B) = j$ のとき，命題が成立することを示す．

$$A = (1, c_1, \ldots, c_{j-1}, a, c_{j+1}, c_{j+2}, \ldots),\ B = (1, c_1, \ldots, c_{j-1}, b, c'_{j+1}, c'_{j+2}, \ldots),\ a \neq b$$

と置き，$S = (1, c_1, \ldots, c_{j-1}, a, 0, 0, \ldots)$ を考える．$\mathrm{Err}(A,S) > j$ であるから帰納法の仮定により，A から S を結ぶ有限列が存在する．

まず，$T := \mathrm{Cut}((-a)s^j \cdot S)$ と置く．このとき，

$$T = (1, c_1, \ldots, c_{j-1}, 0, *, *, \ldots, *)$$

である．$U := (1, c_1, \ldots, c_{j-1}, 0, 0, 0, \ldots, 0)$ と置くと，$\mathrm{Err}(T,U) > j$ であるから帰納法の仮定により，T から U を結ぶ有限列が存在する．

次に，$V := \mathrm{Cut}(bs^j \cdot U)$ と置く．このとき，

$$V = (1, c_1, \ldots, c_{j-1}, b, *, *, \ldots, *)$$

そして，$\mathrm{Err}(V,B) > j$ であるから帰納法の仮定により，V から B を結ぶ有限列が存在する．

ゆえに，W 内の有限列 $A, \ldots, S, T, \ldots, U, V \ldots, B$ が得られ，証明が終わる． □

定理 3.6　任意の $n \geq 3$ に対して，$\mathcal{M}_n$ は連結集合である．

証明． 定理 1.3(3) を示せばよい．$R := \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ とし，$\varepsilon \in (0, 1-R)$ とする．$s \in \mathcal{M}_n$ を任意にとる．このとき，ある $s_m \in \{s \in \mathbb{D}^* \mid R \leq |s| < 1\}$ と，この s_m と s を繋ぐ ε-鎖が存在することを示せばよい．

定理 1.3(7) より，ある $f \in H$ が存在して，$f(s) = 0$ である．$A := \mathrm{Cut}(f)$ とおく．命題 3.3 より，A は根 s_0 を持つ．$B \equiv 1$ と置くと，B は根なし．命題 3.5 により，p_i の根の有限列 $\{s_i\}_{i=0}^{m}$ が存在して，$|s_m| \geq R$ が成り立つ．実際に，もし，任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して，$|s_i| < R$ ならば，命題 3.5 が有限回で終了することに反する． □

4 Hata の定理の証明

第 1 章の定理 1.3 を示すために，次の定理 4.1 を示せばよい．

定理 4.1 (Hata [Ha])
(X, d) を完備距離空間，$I \subset \mathbb{N}_0$ を $\#I \geq 2$ である有限集合とする．$j \in I$ に対して，$f_j : X \to X$ を X 上の縮小写像とする．Λ を $\{f_j\}_{j \in I}$ により定まる極限集合とする．このとき，以下の条件は同値である．
(1) Λ は連結である．
(2) Λ は弧状連結である．
(3) 任意の相異なる $i, i' \in I$ に対して，ある $n \in \mathbb{N}$ と数列 $\{j_k\}_{k=0}^{n-1} \subset I$ が存在して，以下が成り立つ．
　① $j_0 = i$ かつ $j_{n-1} = i'$.
　② 任意の $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ に対して，$f_{j_{k-1}}(\Lambda) \cap f_{j_k}(\Lambda) \neq \varnothing$ が成り立つ．

証明． Kigami[K] に従う．
(1) $\Longrightarrow$ (3) を示す．$i \in I$ を任意に 1 つ取り固定する．集合 $A \subset I$ を

$$A := \left\{ j \in I \mid \text{ある } n \in \mathbb{N} \text{ と数列 } \{j_k\}_{k=0}^{n-1} \subset I \text{ が存在して,①,②が成り立つ} \right\}$$

により定める．$A \neq \varnothing$ としてよい．$U := \displaystyle\bigcup_{j \in A} f_j(\Lambda)$, $V := \displaystyle\bigcup_{j \in I \setminus A} f_j(\Lambda)$ と置くと，$U \sqcup V = \Lambda$ である．U, V は共に開かつ閉集合であるから，$U = \Lambda$ または $U = \varnothing$ である．$f_j(\Lambda) \subset U$ より，$U = \Lambda$ かつ $V = \varnothing$ となり，$A = I$.

(3) $\Longrightarrow$ (2) を示す．任意の $x, y \in \Lambda$ に対して，$\gamma_*(0) = x, \gamma_*(1) = y$ を満たす連続写像 $\gamma_* : [0,1] \to \Lambda$ を構成する．この x, y に対して，仮定よりある番号 $n = n(j_x, j_y) \in \mathbb{N}$ が存在して、数列 $\{j_k = j_k(j_x, j_y)\}_{k=0}^{n-1}$ が存在して，
　① $j_0(j_x, j_y) =: j_x$ かつ $j_{n-1}(j_x, j_y) =: j_y$
　② 任意の $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ に対して，$f_{j_{k-1}}(\Lambda) \cap f_{j_k}(\Lambda) \neq \varnothing$
が成り立つ．よって，任意の $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ に対して，点 $p(j_{k-1}, j_k) \in f_{j_{k-1}}(\Lambda) \cap f_{j_k}(\Lambda)$ が存在する．
まず，$\{w_k^{(1)}\}_{k=0}^{n-1} \subset I$ を $w_k^{(1)} := j_k(j_x, j_y)$ と定め，$\{x_k^{(1)}\}_{k=0}^{n} \subset \Lambda$ を次の 2 つの条件で定める．
　①' $x_0^{(1)} := x$ かつ $x_n^{(1)} := y$.
　②' 任意の $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ に対して，$x_k^{(1)} := p(w_{k-1}^{(1)}, w_k^{(1)}) = p(j_{k-1}, j_k)$.
次に，$k \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して，$\left\{ j_\ell^{(2)} \right\}_{\ell=kn}^{(k+1)n-1} \subset I$ を

$$j_\ell^{(2)} := j_{\ell-kn}\left(j\left(f_{w_k^{(1)}}^{-1}(x_k^{(1)}) \right), j\left(f_{w_{k+1}^{(1)}}^{-1}(x_{k+1}^{(1)}) \right) \right) = j_{\ell-kn}\left(j\left(f_{j_k}^{-1}(x_k^{(1)}) \right), j\left(f_{j_{k+1}}^{-1}(x_{k+1}^{(1)}) \right) \right)$$

と定める．これを用いて，$\left\{ w_\ell^{(2)} \right\}_{\ell=kn}^{(k+1)n-1} \subset I^2$ を $w_\ell^{(2)} := w_k^{(1)} j_\ell^{(2)}$ と定め，$\left\{ x_\ell^{(2)} \right\}_{\ell=kn}^{(k+1)n} \subset \Lambda$ を次の 2 つの条件で定める．
　①" $x_{kn}^{(2)} := x_k^{(1)}$ かつ $x_{(k+1)n}^{(2)} := x_{k+1}^{(1)}$.
　②" 任意の $\ell \in \{kn+1, \ldots, (k+1)n-1\}$ に対して，$x_k^{(2)} := p(w_{k-1}^{(2)}, w_k^{(2)})$.
よって，$\left\{ w_k^{(2)} \right\}_{k=0}^{n^2-1} \subset I^2$, $\left\{ x_k^{(2)} \right\}_{k=0}^{n^2} \subset \Lambda$ を得る．上の操作を帰納的に繰り返すことにより，任意の $m \in \mathbb{N}$

に対して，$\left\{w_k^{(m)}\right\}_{k=0}^{n^m-1} \subset I^m$，$\left\{x_k^{(m)}\right\}_{k=0}^{n^m} \subset \Lambda$ を得る．ここで，

$$U_n := \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{k}{n^m} \mid k \in \{0, \ldots, n^m\} \right\}$$

と置く．$0, 1 \in U_n$ であり，また $t \in U_n$ に対して，ある $m_t \in \mathbb{N}, k_t \in \{0, \ldots, n^m\}$ が存在して，$t = \dfrac{k_t}{n^{m_t}}$ が成り立つ．これらの m_t, k_t を用いることで，$\gamma : U_n \to \Lambda$ を $\gamma(t) := x_{k_t}^{(m_t)}$ と定める．このとき，γ は well-defined である．実際に，$t_1 = t_2 \in U_n$ に対して，ある $m_{t_1}, m_{t_2}, k_{t_1}, k_{t_2}$ が存在して，$\dfrac{k_{t_1}}{n^{m_{t_1}}} = \dfrac{k_{t_2}}{n^{m_{t_2}}}$ である．$x_k^{(m)}$ の定義より，

$$\gamma(t_1) = x_{k_{t_1}}^{(m_{t_1})} = x_{k_{t_1} n^{m_{t_2} - m_{t_1}}}^{(m_{t_1} + (m_{t_2} - m_{t_1}))} = \gamma(t_2)$$

である．任意の $m \in \mathbb{N}, k \in \{0, \ldots, n^m\}$ に対して，$\gamma\left(U_n \cap \left[\dfrac{k}{n^m}, \dfrac{k+1}{n^m}\right]\right) \subset f_{w_k^{(n)}}(\Lambda)$ であるから，$\alpha, \beta \in \gamma\left(U_n \cap \left[\dfrac{k}{n^m}, \dfrac{k+1}{n^m}\right]\right)$ に対して，

$$d(\gamma(\alpha), \gamma(\beta)) \leq \max_{\boldsymbol{w} \in I^m} \mathrm{diam} f_{\boldsymbol{w}}(\Lambda)$$

となり，γ は U_n 上の一様連続な関数である．コンパクト集合内の稠密な集合 U_n 上の一様連続な関数は，コンパクト集合 $\overline{U_n}$ 上の一様連続な関数に一意的に拡張できるため，$\gamma_* : \overline{U_n} = [0, 1] \to \Lambda$ を得る．また，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して，$\gamma_*(0) = \gamma(0) = x_0^{(m)} = x$ かつ $\gamma_*(1) = \gamma(1) = x_{n^m}^{(m)} = y$ を満たす． □

謝辞

指導教員である石井 豊准教授 (九州大学大学院数理学研究院) より，２年間のセミナーならびに本修士論文執筆にあたりご丁寧かつ熱心なご指導を賜りました．セミナーと論文執筆を通じて，数学における基礎的な考え方を始め，複素力学系やフラクタル幾何学に関する深遠な理論に至るまで多くのことを学ぶことができました．また自らの研究を客観的に見つめる機会として，発表あるいは研究集会の場を与えていただいたことも大変ありがたく有意義な経験となりました．ここに感謝の意を表すとともに，厚くお礼を申し上げます．

参考文献

[B1] T. Bousch, Paires de similitudes $z \mapsto sz + 1,\ z \mapsto sz - 1$. preprint (1988), available from the author's webpage.

[B2] T. Bousch, Connexité locale et par chemins hölderiens pour les systèmes itérés de fonctions. preprint (1992), available from the author's webpage.

[Ba] C. Bandt, On the Mandelbrot set for pairs of linear maps. Nonlinearity 15 (2002), no. 4, pp.1127-1147.

[BHa] M. Barnsley, A. Harrington, A Mandelbrot set for pairs of linear maps. Phys. D 15 (1985), no. 3, pp.421-432.

[BHu] C. Bandt, N. Hung Viet, Fractal n-gons and their Mandelbrot sets. Nonlinearity 21 (2008), no. 11, pp.2653-2670.

[BR] L. Baribeau, M. Roy, Analytic multifunctions, holomorphic motions and Hausdorff dimension in IFSs. Monatsh. Math. 147 (2006), no. 3, pp.199-217.

[CKW] D. Calegari, S. Koch, A. Walker, Roots, Schottky semigroups, and a proof of Bandt's Conjecture. Ergodic Theory Dynam. Systems 37 (2017), no. 8, pp.2487-2555.

[F] K. Falconer, Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. Third edition. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester (2014), xxx+368 pp. ISBN: 978-1-119-94239-9.

[GP] V. Guillemin, A. Pollack, Differential topology. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.(1974), xvi+222.

[Ha] M. Hata, On the structure of self-similar sets. Japan J. Appl. Math. 2 (1985), no. 2, pp.381-414.

[Hu] J. Hutchinson, Fractals and self-similarity. Indiana Univ. Math. J. 30 (1981), no. 5, pp.713-747.

[K] J. Kigami, Analysis on fractals. Cambridge Tracts in Mathematics, 143. Cambridge University Press, Cambridge, (2001),viii+226, pp.ISBN: 0-521-79321-1.

[SK] B. Schlicker, D. Kevin, Sierpinski n-gons, Pi Mu Epsilon Journal, 10 (1995), no. 2, pp.81-89.

[SX] B. Solomyak, H. Xu, On the 'Mandelbrot set' for a pair of linear maps and complex Bernoulli convolutions. Nonlinearity 16 (2003), no. 5, pp.1733-1749.