

Einstein 宇宙および anti-de Sitter 空間の幾何と
crooked plane による基本領域の構成

論文作成者：芦田 大夢

(名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 M2)

アドバイザー：糸 健太郎准教授

概要

本稿は2015年度, 2016年度の糸健太郎准教授の少人数クラスで行われたセミナーを通して行った学習を元に執筆したサーベイ論文である.

Einstein 宇宙とは, Euclid 空間の Lorentz 幾何における類似である Minkowski 空間の conformal なコンパクト化として与えられる. また anti-de Sitter 空間は双曲空間の Lorentz 幾何における類似である.

近年はこれらの空間の基本領域の研究が特に盛んになされており, 多くの論文が出版されている. Riemann 幾何においては等長写像の部分群が離散的であることと固有不連続であることは一致する. しかし Lorentz 幾何においては等長写像の部分群が離散的であるが固有不連続でない例が存在している. そこで, 等長写像の離散部分群が固有不連続かどうかを調べるために基本領域を考える. Minkowski 空間や Einstein 宇宙, anti-de Sitter 空間の基本領域の構成は一般に簡単ではない. そこで crooked plane という道具を用いると基本領域を構成することができる.

本稿では Minkowski 空間, Einstein 宇宙や anti-de Sitter 空間の関係と, 各空間における crooked plane の関係について述べた. また, Minkowski 空間, Einstein 宇宙の基本領域についても構成した.

目次

1	Introduction	2
第 I 部 Lorentz 幾何学		7
2	擬 Riemann 幾何学	7
2.1	線形代数の復習	8
2.2	擬 Riemann 多様体	11
2.3	Lorentz 線形空間	13
2.4	擬 Riemann 被覆写像, 擬直交群	16
3	双曲空間と anti-de Sitter 空間	18
3.1	双曲空間	18
3.2	Anti-de Sitter 空間	20
4	Einstein 宇宙 Ein^{n+1}	23
4.1	Einstein 宇宙の定義	23
4.2	Ein^2	25
4.2.1	Ein^2 の位相	25
4.2.2	Ein^2 の lightcone	26
4.2.3	2つの hypersphere	26
4.3	Ein^3	26
4.3.1	Ein^3 の lightcone	27
4.3.2	2つの lightcone の交わり	27
4.3.3	Einstein hypersphere	28
4.4	$\mathbb{R}^{n,1}$ の conformal なコンパクト化	29
4.4.1	Riemann 幾何の場合 S^n	29
4.4.2	Lorentz 幾何の場合 Ein^{n+1}	30
4.4.3	具体例による確認	33
第 II 部 離散群と基本領域		40
5	\mathbb{H}^2 への作用の基本領域	40
6	Minkowski crooked plane	43
6.1	$\mathbb{E}^{2,1}$ の crooked plane	43
6.2	具体例の計算	45
6.3	\mathbb{H}^2 と crooked plane	46

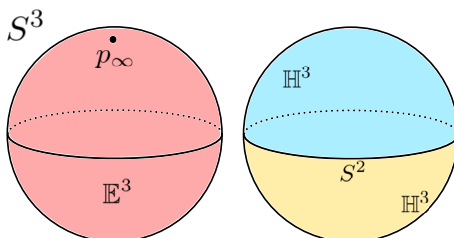
7	Ein³における crooked plane	52
7.1	最も簡単な例	53
7.2	Torus data	61
8	AdS crooked plane	63
8.1	$\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$	65
8.2	全測地的な平面	66
8.3	AdS-crooked plane の具体的構成	71
8.4	AdS-crooked plane の諸性質	72
8.5	AdS ³ への持ち上げ	74
9	AdS-crooked plane と crooked surface の対応	75
9.1	AdS ³ の Ein ³ への埋め込み	75
9.2	測地線の Ein ³ への埋め込み	78
9.3	AdS-crooked plane の Ein ³ への埋め込み	82
9.4	Crooked surface に対応する AdS-crooked plane の構成	86
10	Crooked surface を用いた基本領域の構成	87
10.1	Disjoint crooked surface	87
10.2	Crooked Schottky domain	89
11	後書き	91
A	Symplectic 幾何学と Einstein 宇宙	92
A.1	Symplectic ベクトル空間を用いた Ein ³ の構成	92
A.2	Lagrangian 平面と Einstein 宇宙	93
A.3	Pointed photon と complete flags	94
A.4	歪 symplectic 自己同型写像と時間的向きを逆にする自己同型写像	95
A.5	symplectic 自己同型写像と時間的向きを保つ自己同型写像	97
A.6	Positive compatible な複素構造と free involution	97
A.7	接触幾何との関わり (紹介)	99

1 Introduction

私は双曲幾何学の対象である，Einstein 宇宙や anti-de Sitter 空間について，それらへの群の作用の基本領域を構成する方法について調べた。

まずは Einstein 宇宙，anti-de Sitter 空間について説明する．もともと双曲幾何学において，次のような関係がある．

1. Euclid 空間 \mathbb{E}^3 に 1 点を足すと conformal にコンパクト化することができ，これによって S^3 が得られる．(図左)
2. 双曲空間 \mathbb{H}^3 は S^3 へと conformal に埋め込むことができる．また， \mathbb{H}^3 の二重被覆を $\widehat{\mathbb{H}^3}$ とすると， $S^3 = \widehat{\mathbb{H}^3} \cup S^2$ である．(図右)



これによって， $\mathbb{E}^3, \mathbb{H}^3$ の等長写像群は S^3 の conformal な変換の群へと埋め込まれる．すなわち， S^3 で考えることは \mathbb{E}^3 や \mathbb{H}^3 を考えることにつながっている．

似たようなことを Lorentz 幾何学で考えよう．すると，次の疑問は自然である．

- Minkowski 空間 $\mathbb{E}^{2,1}$ を conformal にコンパクト化できないか？
- そして得られる集合，すなわち S^3 に対応する集合は何か？
- この集合の“半分”に入っている集合，すなわち \mathbb{H}^3 に対応する集合は何か？

これらの疑問に対する答えは次である．

1. Minkowski 空間 $\mathbb{E}^{2,1}$ に lightcone と呼ばれる集合を足すと conformal にコンパクト化することができ，この集合は Einstein 宇宙 Ein^3 である．
2. $\text{Ein}^3 \setminus \text{Ein}^2$ として現れるのは anti-de Sitter 空間 AdS^3 の二重被覆 $\widehat{\text{AdS}^3}$ である．

したがって，次のように対応していると分かる．

Riemann 幾何学		Lorentz 幾何学
Euclid 空間 \mathbb{E}^3	\longleftrightarrow	Minkowski 空間 $\mathbb{E}^{2,1}$
球面 S^3	\longleftrightarrow	Einstein 宇宙 Ein^3
双曲空間 \mathbb{H}^3	\longleftrightarrow	Anti-de Sitter 空間 AdS^3

Riemann 幾何の場合と同様に, $\mathbb{E}^{2,1}$, AdS^3 の等長写像群は Ein^3 の conformal な変換の群へと埋め込まれる. すなわち, Ein^3 を考えることは $\mathbb{E}^{2,1}$ や AdS^3 を考えることにつながっている.

次に, 群の作用の基本領域の構成について説明をする. まず, 次の定理が存在している.

Theorem 1.1. ([12], Cor7.12) M を擬 Riemann 多様体, Γ を固有不連続な M の等長写像群とする. このとき, M/Γ は擬 Riemann 多様体となり, その局所的な構造は M から決定する.

これは固有不連続な等長写像群 Γ のに対して局所的に M の性質を持つ多様体が決定するということである. この Γ が変化すれば, M/Γ の形も変化する. つまり離散群 Γ が M に固有不連続に作用するかどうかとを調べることは重要な問題である.

Riemann 幾何学においては離散群と不連続群は完全に対応する一方で, 擬 Riemann 幾何学ではそうはならず, 離散的であるが不連続でない群が存在する. そういった部分に難しさが存在する. しかし, 擬 Riemann 多様体において等長写像の離散群は, 基本領域を持てば固有不連続となる. したがって, 離散群の基本領域を調べることは, 局所的に良い性質を持つ, 様々な形の多様体を調べることに繋がっている.

また双曲空間 \mathbb{H}^3 への等長写像の離散群 Γ は \mathbb{H}^3 へ固有不連続に作用し, \mathbb{H}^3/Γ は局所的に \mathbb{H}^3 の構造を持つ. また, \mathbb{H}^3 における基本領域は, S^3 における conformal な写像の離散群の基本領域へと自然に拡張する. このように, 双曲幾何学において基本領域に関する研究は基本的かつ重要である.

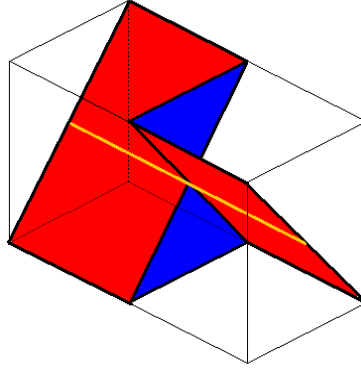
今は双曲空間の具体例を挙げたが, Lorentz 幾何における類似, すなわち, Anti-de Sitter 空間の離散群の作用による基本領域を構成する方法に興味が出てくる. しかし, Minkowski 空間などでは Riemann 幾何における場合をそのまま適応することができず, 別の方法を用いる必要がある. 以下, その歴史を書こう.

最初に Drumm が [6] にて, $\mathbb{E}^{2,1}$ の離散群への作用の基本領域の構成を行った. これは Lorentz 幾何において最も簡単な場合である. 具体的には $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{E}^{2,1}$ と考えて, \mathbb{H}^2 で基本領域を構成する方法を $\mathbb{E}^{2,1}$ 全体へと拡張する形で作られた. この際に考案された道具が crooked plane と呼ばれるいびつな多角形である. 本稿ではこの crooked plane をしばしば Minkowski crooked plane と呼ぶ.

この後 2003 年, Frances が [9] にて crooked surface と呼ばれる, Ein^3 における crooked plane を構成した. これは Minkowski crooked plane を Ein^3 に埋め込んで閉包を取ったものとして構成される.

そして 2013 年に V. Charette, D. Francoeur, R. Lareau-Dussault が [2] で Ein^3 の基本領域を構成した. その際には上記の crooked surface が活用された.

その後は 2014 年, J. Danciger, F. Guèritaud, F. Kassel が [5] にて AdS^3 の基本領域を構成した. その際に使われた道具は AdS^3 における crooked plane, AdS -



crooked plane である。これは、 $g \in \text{AdS}^3$ における接空間 $T_g \text{AdS}^3$ が $\mathbb{E}^{2,1}$ と同一視できることから、 $\mathbb{E}^{2,1}$ において、vertex が原点である crooked plane を、指数写像を用いて AdS^3 へと射影することによって定義される。

そして 2015 年、Goldman が [10] にて Minkowski crooked plane, AdS-crooked plane と crooked surface の三者間で次のような関係を示した。

Theorem 1.2. ([10], Main theorem)

1. AdS-crooked plane を $\mathbf{C} \subset \text{AdS}^3$ として、その二重被覆 $\widehat{\text{AdS}^3}$ への逆像を $\widehat{\mathbf{C}}$ とする。このとき、 $\widehat{\mathbf{C}}$ を Ein^3 へ埋め込んだものは crooked surface となっている。
2. 逆に、ある involution に適合した crooked surface に対して、ある AdS-crooked plane が存在する。

これによって anti-de Sitter 空間の基本領域を Einstein 宇宙へと拡張することが可能になった。

本修士論文の目的は $\mathbb{E}^{2,1}, \text{Ein}^3, \text{AdS}^3$ の 3 つの空間の関係を明瞭にし、 $\mathbb{E}^{2,1}, \text{Ein}^3$ の基本領域を構成することである¹。

本稿の構成は大きく 2 つに分かれており、第 1 部では Lorentz 幾何学の基礎事項について述べ、第 2 部で具体的に基本領域の話をする。

§2 では擬 Riemann 幾何学について必要な部分に絞って述べる。擬 Riemann 幾何学とは Riemann 幾何学の一般化であり、内積 \mathbf{g} の値として 0 あるいは負も許した場合に展開される幾何学である。その中で、特に指数と呼ばれる値が 1 であるときの幾何学が Lorentz 幾何学であり、一般相対性理論の中でも重要な意味を持つ。

§3 では擬 Riemann 幾何の知識を用いて双曲空間、anti-de Sitter 空間の定義をする。具体例としてはこの後も多く登場する $\mathbb{H}^2, \text{AdS}^3$ を選んだが、 AdS^3 については §7 で再び詳しく取り扱う。

§4 では Einstein 宇宙の定義について述べる。もともとの定義は、指数 2 の $(n+3)$ 次元擬 Euclid 空間 $\mathbb{R}^{n+1,2}$ において計量の値が 0 となるベクトル全体の集合を $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

¹ AdS^3 の基本領域については学習が及ばなかった。

で割ったものであり, A.Einstein が考案した空間である. その後に, Minkowski 空間のコンパクト化として Ein^n を構成する. 特に重要な対象は $\text{Ein}^2, \text{Ein}^3$ であるから, 度々具体例として取り上げ, 性質を確認している.

§5 では最も知られている双曲幾何学の事実として, \mathbb{H}^2 における等長写像群の作用の基本領域を構成する.

§6 では Minkowski 空間 $\mathbb{E}^{2,1}$ の等長写像群の基本領域を \mathbb{H}^2 の類似として具体的に構成する方法について述べる. その際に crooked plane の定義も行う.

§7 では Einstein 宇宙における crooked plane の閉包として crooked surface を構成する. また, あるうまい 4 点を取ってくることで, そこから crooked surface が構成できることを確認する.

§8 では AdS-crooked plane の定義を行い, その具体的な形について, AdS^3 の幾何学について述べながら確認していく.

§9 では [10] で示された AdS-crooked plane と crooked surface 間の対応について説明する. ただ, Goldman が示した方法とは別の証明を与える. これによって, Minkowski crooked plane を直接 Ein^3 に埋め込む場合と, $T_e\text{AdS}^3 \cong \mathbb{E}^{2,1}$ という対応を用いて Anti-de Sitter 空間を経由して Ein^3 に埋め込む場合とで, どういった違いが生まれるかを観察することができる.

§10 では crooked surface を用いて Ein^3 の等角写像の群による作用の基本領域を決定する.

本稿を執筆するにあたり, 2 年間にわたり格別なご指導を賜りました, 糸健太郎先生に深く感謝申し上げます. 双曲幾何学も擬 Riemann 幾何も知らない状態であった私が, 最新の論文を読めるまで成長できたのはひとえに糸先生のお陰です. ありがとうございます. また本稿を査読してくださった名古屋大学多元数理科学研究科の先生にも感謝いたします. 未熟な論文であった本稿の完成度を高めることができたのは先生方の丁寧な査読ゆえだと考えております. そして, 毎週貴重な時間を割いてセミナーを聴きに来てくださった藤野弘基さんに深く感謝致します. 2 年間にわたって, 専門的な意見で私の思考の手助けをしてくださったこと, 感謝してもしきれません. 次に非常に高度な知見から概念の意味を解説してくださった棕野純一さんに感謝します. 論文を読む上では 1 つ 1 つの言葉の意味にこだわりすぎることなく, きちんと概念を捉える事が大切だと気づくことができました. そして日常の議論を通じて様々な知見やアイデアを与えてくれた, 同じ修士課程の坂田祥之さん, 鴻源空さん, 高橋光さんに感謝します. また私の成長を手助けしてくださった数理学科学生自習室およびその部屋の皆さんに圧倒的感謝致します.

大切な図式

本稿を読み進める上では適宜、次の図式を参照して読み進めるとよい。

$$\begin{array}{ccccc}
 & \widehat{\text{Ein}}^3 & & \overline{C} & \\
 & \uparrow & \searrow / \{\pm e\} & \cap & \\
 \widehat{\text{AdS}}^3 & \cong SL(2; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\Psi} & \text{Ein}^3 & \supset \text{Ein}^2 \\
 \downarrow / \{\pm e\} & \downarrow / \{\pm e\} & \swarrow \exp & \uparrow \iota & \uparrow \bar{\iota} \\
 \text{AdS}^3 & \cong PSL(2; \mathbb{R}) & \xleftarrow{\exp} \mathfrak{sl}(2; \mathbb{R}) \cong & \mathbb{E}^{2,1} & \supset \mathcal{S} \\
 \cup & & & \cup & \\
 C & & & C &
 \end{array}$$

各記号は次のような意味である。

- $\mathbb{E}^{2,1}$ は 3次元 Minkowski 空間であり \mathcal{S} は Lorentzian unit sphere, すなわち

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^{2,1} ; x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

である。

- AdS^3 は 3次元 anti-de Sitter 空間であり, $\widehat{\text{AdS}}^3$ はその二重被覆である。
- Ein^3 は 3次元 Einstein 宇宙, Ein^2 は 2次元 Einstein 宇宙であり, $\widehat{\text{Ein}}^3$ は Ein^3 の二重被覆である。
- Ψ は $\widehat{\text{AdS}}^3$ から Ein^3 への埋め込みであり, 以下の形で与えられる。

$$\begin{aligned}
 \Psi: \widehat{\text{AdS}}^3 &\longrightarrow \text{Ein}^3 \\
 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto [a-d : b+c : b-c : a+d-2 : a+d+2]
 \end{aligned}$$

- ι は $\mathbb{E}^{2,1}$ から Ein^3 への埋め込みであり, 以下の形で与えられる。

$$\begin{aligned}
 \iota: \mathbb{E}^{2,1} &\longrightarrow \text{Ein}^3 \\
 (x, y, z) &\mapsto [x : y : z : x^2 + y^2 - z^2 : 1]
 \end{aligned}$$

また, $\bar{\iota}$ とは, ι によって埋め込んだ後に閉包を取ることである。

- C は Minkowski crooked plane であり, \overline{C} は crooked surface である。また, \mathbf{C} は AdS-crooked plane である。
- $/\{\pm e\}$ は, 矢印の根元の空間を $\{\pm e\}$ で同一視すると, 矢印の行き先の空間が得られるということである。

第I部

Lorentz 幾何学

まずは Lorentz 幾何の基礎事項から始めていく。

最初の節では擬 Riemann 幾何学という, Riemann 幾何学の一般化について学習する. Lorentz 幾何学は擬 Riemann 幾何学の中の特別な場合である. この節では今後に必要な最低限の内容を補う.

次の節では双曲空間と anti-de Sitter 空間を定義する. 双曲空間は Riemann 幾何学における定曲率 -1 を持つ空間として定義される. anti-de Sitter 空間は Lorentz 幾何学における双曲空間の類似である. それぞれ具体例として, この後にも登場する $\mathbb{H}^2, \text{Ein}^3$ を補った.

その後の節では, Einstein 宇宙の定義を行う. Einstein 宇宙とは, A.Einstein が定義した空間であり, Minkowski 空間の conformal なコンパクト化となっている. Euclid 空間は 1 点を足すことでコンパクト化できるが, Minkowski 空間はそうはなっていない点に難しさがある.

2 擬 Riemann 幾何学

まず Riemann 幾何学とは, Riemann 計量 g と呼ばれる構造を持つ多様体を取り扱う幾何学の一分野である. 言い換えれば, “内積を持つ” 多様体を扱うものが Riemann 幾何学である. Riemann 計量 g とは, 多様体 M 上の各点に対して, 接空間上に正定値な対称双線形形式を割り当てる対応である. この正定値であることは非退化かつ半正定値であることと同値になる. そこで, 正定値性という仮定を少し緩めることを考えよう. すなわち, 非退化性のみ仮定する. すると, Riemann 幾何学とは似てはいるが, 一点に留まり続ける曲線でなくても, その弧長が 0 になるものが存在する, といった直感に反する様々な結果を得ることができる. これが擬 Riemann 幾何学であり, 中でも Lorentz 幾何学は擬 Riemann 計量の指数が 1 の場合の幾何学である.

この節では線形代数の基本的な事項について復習し, Riemann 幾何学の一般化である擬 Riemann 幾何学について述べる. その後に Lorentz 幾何学の性質についても紹介し, 双曲空間や anti-de Sitter 空間と呼ばれる対象の定義への足がかりとしよう.

この節は主に [12] を参考に執筆した.

2.1 線形代数の復習

まず最初に擬 Riemann 幾何学を考える上で必要となる線形代数の知識を補う。命題には特に証明を与えないが、必要ならば [12] を参考にするといよい。今節では V を実ベクトル空間とし、 $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ を V 上の対称双線形形式とする。まずはいくつか道具を定義しよう。

Definition 2.1. ([12], Definition2.17)

1. b が正定値 (positive definite) であるとは、任意の 0 でない $v \in V$ に対し $b(v, v) > 0$ が成立することである。
2. b が半正定値 (semipositive definite) であるとは、任意の $v \in V$ に対し $b(v, v) \geq 0$ が成立することである。
3. b が非退化 (nondegenerate) であるとは、任意の $v \in V$ に対して $b(v, w) = 0$ ならば $w = 0$ が成立することである。

負定値、半負定値についても同様に定義される。正定値であることと半正定値かつ非退化であることは同値である。

Definition 2.2. ([12], Definition2.18) b の指数 (index) とは、部分空間 $W \subset V$ で、 $b|_W$ が負定値になるようなものの次元の最大値である。この値を $\text{Ind } V$ と表す。

指数が 0 であることは b が半正定値であることと同値である。

e_1, \dots, e_n を V の基底とする。このとき、 $b_{ij} = b(e_i, e_j)$ として、 $B = (b_{ij})$ とする。

Lemma 2.3. ([12], Lemma2.19) b が非退化であることと、 B が可逆であることは同値である。

それでは、内積の一般化となる概念を定義しよう。

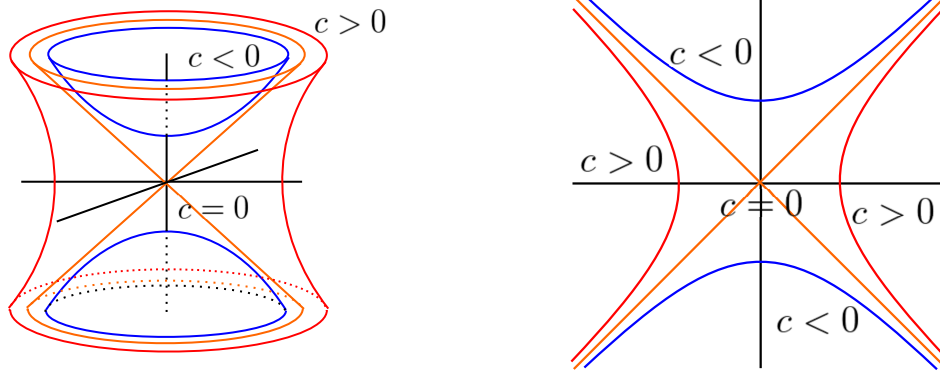
Definition 2.4. ([12], Definition2.20) V 上の計量 (metric) g とは、 V 上の非退化な対称双線形形式のことである。

計量についても同様に指数が定義される。指数が 0 であるとき、計量は内積となる。

Example 2.5. $V = \mathbb{R}^3$ とする。 \mathbb{R}^3 上の計量を

$$g(v, w) = v_1w_1 + v_2w_2 - v_3w_3$$

とする。 $g(v, v) = c$ で定義される図形を考えよう。 $c > 0$ に対して定義される図形を赤、 $c < 0$ に対して定義される図形を青、 $c = 0$ に対して定義される図形を黄色で描くと、次の図のようになる。



上方向が timelike. 右図は左図の断面.

この青, 赤, 黄の図形を構成するベクトルにそれぞれ名前を付けておきたい.

Definition 2.6. ([12], Definition3.3) $v \in V$ について, 以下のように定義する.

1. $\langle v, v \rangle > 0$ であるとき, v は **spacelike** であるという.
2. $\langle v, v \rangle < 0$ であるとき v は **timelike** であるという.
3. $\langle v, v \rangle = 0$ であるとき, v は **lightlike** であるとか **isotropic** であるという.

そしてベクトルの持つ spacelike, timelike, lightlike といった性質を, **causal character** という.

V の lightlike なベクトル全体を **null cone** といい, $\mathfrak{N}(V)$ と書く. また, V を $p+q$ 次元ベクトル空間とし, $\text{Ind } V = q$ とする. このとき, V は (\mathbf{p}, \mathbf{q}) 型ベクトル空間であるという.

計量 \mathbf{g} に対して $v, w \in V$ が直交するとは, $\mathbf{g}(v, w) = 0$ となることである. 部分空間 $W \subset V$ に対して, W に直交する空間は

$$W^\perp = \{v \in V ; \text{任意の } w \in W \text{ に対して } \mathbf{g}(v, w) = 0\}$$

として定義できる. ([12], pp.49) 以下, いくつか性質を与える.

Lemma 2.7. ([12], Lemma2.22)

1. $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.
2. $(W^\perp)^\perp = W$.
3. $\mathbf{g}|_W$ が非退化であるとき, $V = W \oplus W^\perp$.

ベクトル $v \in V$ の大きさを

$$|v| = \sqrt{|\mathbf{g}(v, v)|}$$

で定義しよう. ([12], pp.50) 根号の中に絶対値が付くのは, 計量は負の値を取り得るからである.

線形空間はその内積に対して正規直交基底を取ることができた. 同様に, 計量が定まっていれば, その計量に関して正規直交基底を取ることが可能である.

Lemma 2.8. ([12], Lemma2.24) $V \neq \{0\}$ はその計量 g に関する正規直交基底を持つ.

V の正規直交基底を e_1, \dots, e_n としたとき, $\mathbf{g}_{ij} = \mathbf{g}(e_i, e_j) = (\pm\delta_{ij})_{i,j}$ であるから $G = (\mathbf{g}_{ij})$ は対角行列となる.

Lemma 2.9. ([12], Lemma2.26) V の \mathbf{g} に関する正規直交基底において, timelike なベクトルの本数は \mathbf{g} の指数に一致する.

したがって, 非退化な部分空間 $W \subset V$ に対して,

$$\text{Ind } V = \text{Ind } W + \text{Ind } W^\perp$$

が成立する. したがって次の系が成立する.

Corollary 2.10. V を (p, q) 型ベクトル空間, $W \subset V$ を非退化な部分空間とし, W は (p_1, q_1) 型ベクトル空間, W^\perp は (p_2, q_2) 型ベクトル空間とする. このとき,

$$p = p_1 + p_2,$$

$$q = q_1 + q_2$$

が成立する.

また, V は上手く基底をとって, p 本の spacelike なベクトルと q 本の timelike なベクトルによって張られるようにできる.

最後に, 計量を保つような写像を定義しよう.

Definition 2.11. ([12], pp.51) 線形空間 V_1, V_2 の計量をそれぞれ $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ とする. 線形写像 f が線形等長写像 (linear isometry) であるとは, f が全単射であり, $v, w \in V_1$ に対して次を満たすことである.

$$\mathbf{g}_1(v, w) = \mathbf{g}_2(f(v), f(w))$$

以上で線形代数の復習を終える. それでは多様体の話に入って行こう.

2.2 擬 Riemann 多様体

M を滑らかな多様体とする.

Definition 2.12. ([12], Definition3.1) 滑らかな多様体 M 上の計量 (metric) g とは, 任意の $p \in M$ に対して接空間 $T_p M$ 上の非退化な双線形形式

$$g_p: T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$$

でその指数が一定となるようなものを定める対応である.

Definition 2.13. ([12], Definition3.2) 滑らかな多様体 M と計量 g の組 (M, g) を擬 Riemann 多様体 (semi Riemannian manifold, pseudo Riemannian manifold) という.

g_p の指数 ν を M の指数という. $\nu = 0$ のとき, M を Riemann 多様体といい, $\dim M \geq 2$ かつ $\nu = 1$ のとき, M を Lorentz 多様体という. すなわち, 擬 Riemann 多様体は Riemann 多様体の一般化となっている.

$v, w \in T_p M$ に対して, $g_p(v, w) = \langle v, w \rangle$ と書く.

Example 2.14. ([12], pp.44-57. [1], §2.2) $p + q$ 次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^{p+q} を考える. 任意の $x \in \mathbb{R}^{p+q}$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{p+q} &\leftrightarrow T_x M \\ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{p+q} \end{pmatrix} &\leftrightarrow v_x = \sum_{i=1}^{p+q} v_i \frac{\partial}{\partial v_i} \end{aligned}$$

と対応を作ることで $\mathbb{R}^{p+q} \cong T_x \mathbb{R}^{p+q}$ であった.

$\nu = q$ としたとき, $v_x, w_x \in T_x \mathbb{R}^{p+q}$ に対して,

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + \cdots + v_p w_p - v_{p+1} w_{p+1} - \cdots - v_{p+q} w_{p+q}$$

は計量となる.

この g を持つ \mathbb{R}^{p+q} を $\mathbb{R}^{p,q}$ と書き, 擬 Euclid 空間 (semi Euclidian space, pseudo Euclidian space) という. $\nu = 0$ のとき, $\mathbb{R}^{p,0} = \mathbb{R}^p$. $n \geq 2$ のとき, $\mathbb{R}^{n-1,1}$ を n 次元 Minkowski 空間 (Minkowski n-space) という.

また計量は行列と自然に対応し, 上の計量であれば

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & \\ 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & & 1 & & & \\ & & & -1 & 0 & \cdots \\ & & & 0 & \ddots & \\ & & & \vdots & & -1 \end{pmatrix} \cong I_p \oplus -I_q$$

と表せる。

また、擬 Euclid 空間 $\mathbb{R}^{p,q}$ の nullcone $\mathfrak{N}(\mathbb{R}^{p,q})$ を $\mathfrak{N}^{p,q}$ と表す。

また、 $\mathbb{R}^{p,q}$ でベクトルの始点として原点以外も許した空間を **affine 空間** といい、 $\mathbb{E}^{p,q}$ と書く。

さて、 M を Riemann 多様体とする。このとき、 M の部分多様体 N もまた Riemann 多様体となる。実際、各 $p \in N$ に対して、 $T_p N \subset T_p M$ であり、 \mathbf{g}_p を $T_p N$ へと制限することによって N の計量が得られる。一方で、 M が擬 Riemann 多様体であるとき、その部分多様体 N は必ずしも擬 Riemann 多様体になるとは限らない。なぜなら、 \mathbf{g}_p の部分空間への制限は必ずしも非退化性を保つとは限らないからである。そこで、次の定義を与える。

Definition 2.15. ([12], Definition3.4) N を M の部分多様体とする。 M の計量 \mathbf{g} の包含写像 $j: N \rightarrow M$ による引き戻し $j^*\mathbf{g}$ が N の計量となっているとき、 N は **擬 Riemann 部分多様体 (semi Riemannian submanifold)** であるという。

事実として次の補題を与える。

Lemma 2.16. ([12], Lemma3.5) $(M, \mathbf{g}_M), (N, \mathbf{g}_N)$ を擬 Riemann 多様体とし、 π と σ をそれぞれ $M \times N$ から M, N への射影とする。このとき

$$\mathbf{g} = \pi^*(\mathbf{g}_M) + \sigma^*(\mathbf{g}_N)$$

とすると、 $(M \times N, \mathbf{g})$ は擬 Riemann 多様体となる。

これによって、擬 Euclid 空間 $\mathbb{R}^{p,q}$ について、

$$\underbrace{\mathbb{R}^1 \times \cdots \times \mathbb{R}^1}_{p \text{ 個}} \times \underbrace{\mathbb{R}^{0,1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{0,1}}_{q \text{ 個}} = \mathbb{R}^{p,q}$$

が成立している。

次に線形等長写像を擬 Riemann 多様体の話へ拡張しておく。

Definition 2.17. ([12], Definition3.6) 微分同相写像 $\phi: M \rightarrow N$ が等長写像 (**isometry**) であるとは、

$$\phi^*\mathbf{g}_N = \mathbf{g}_M$$

となっていることである。このような ϕ が存在するとき、 M と N は等長的である (**isometric**) という。

等長写像は微分同相性を仮定しているが、もう少し緩めた概念を定義する。

Definition 2.18. ([12], Definition3.60) 滑らかな写像 $\phi: M \rightarrow N$ が局所等長写像 (**local isometry**) であるとは、任意の $p \in M$ に対し、微分写像 $d\phi_p$ が線形等長写像となっていることである。

これは逆関数の定理より、任意の $p \in M$ に対してある近傍 $\mathcal{U} \subset M$ で $\phi|_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \rightarrow \phi(\mathcal{U})$ が等長写像になっているということである。

次に、等長写像をより一般化した概念について定義をする。

Definition 2.19. ([12], pp.92) 恒等的に正または負である M 上の滑らかな関数 h に対し、微分同相写像 $\phi: M \rightarrow N$ が等角写像 (**conformal map**) であるとは、

$$\phi^* \mathbf{g}_N = h \mathbf{g}_M$$

となっていることである。このとき、 M と N は等角である (**conformal**) という。

特に $h = 1$ のときが等長写像であり、 $h = -1$ のときを反等長写像 (**anti isometry**) という。

2.3 Lorentz 線形空間

Definition 2.20. ([12], pp.140) 計量を持つ線形空間 V ($\dim V \geq 2$) の指数が 1 であるとき、 V を Lorentz 線形空間 (**Lorentzian vector space**) であるという。

W を Lorentz 線形空間 V の部分空間とし、 \mathbf{g} を V の計量とする。 \mathbf{g} の W への制限について次の 3 つに分類ができる。 ([12], pp.141)

1. $\mathbf{g}|_W$ が正定値であるとき、 W は **spacelike** であるという。
2. $\mathbf{g}|_W$ が非退化であるが半正定値でないとき、 W は **timelike** であるという。
3. $\mathbf{g}|_W$ が退化しているとき、 W は **null** であるとか退化 (**degenerate**) しているという。

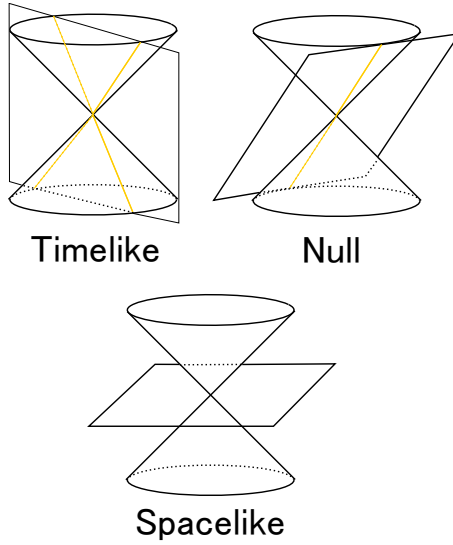
これらの分類を W の **causal character** という。

以降述べる 3 つの補題は Lorentz 幾何のイメージを掴むために役立つ。次のページの図を参考にしながら証明を読むと分かりやすい。

Lemma 2.21. ([12], Lemma5.26) 次の 3 つの主張は同値である。

1. W は timelike である (すなわち W 自身も Lorentz 線形空間)。
2. W は 2 つの線形独立な null なベクトルを持つ。
3. W は timelike なベクトルを含む。

Proof. (1) から (2) を示そう。 e_1, \dots, e_m を W の正規直交基底とし、 e_1 を timelike なベクトルとする。このとき、 $e_1 \pm e_2$ はどちらも null となる。



次に (2) から (3) を示す. u, v を線形独立で null なベクトルとする. このとき, $u \pm v$ のいずれかが timelike となる. 実際,

$$\mathbf{g}(u \pm v, u \pm v) = \pm 2\mathbf{g}(u, v)$$

であり, u, v の線形性から $\mathbf{g}(u, v) \neq 0$ である.

最後に (3) から (1) を示す. $z \in W$ を timelike としたとき, $W^\perp \subset z^\perp$ である. z^\perp は spacelike であるから, その部分空間 W^\perp も spacelike となり, したがって W は timelike となる. \square

Lemma 2.22. ([12], Lemma5.27) 次の 3 つの主張は同値である.

1. W は lightlike である.
2. W は null なベクトルを含むが, timelike なベクトルを含まない.
3. $W \cap \mathfrak{N}(V)$ は V の null な直線である.

Proof. (1) から (2) は W に lightlike なベクトルが 1 つしか存在しないことから, 前の補題を適用すればよい.

(2) から (3) も W に lightlike なベクトルが 1 つしか存在しないことから従う.

(3) から (1) を示そう. これは, W は spacelike にはなり得ず. また前の補題より, timelike にもならないから, W は lightlike であると分かる. \square

次に, Lorentz 線形空間の時間的向き付けの話をする. ([12], pp.143)

\mathcal{T} を Lorentz 線形空間 V の timelike なベクトル全体の集合とする. このとき, $u \in \mathcal{T}$ に対して,

$$\text{Cone}(u) = \{v \in \mathcal{T} ; \langle u, v \rangle < 0\}$$

を u を含む V の **timecone** という。逆側の timecone は,

$$\text{Cone}(-u) = \{v \in \mathcal{T} ; \langle u, v \rangle > 0\}$$

で表される。 u^\perp は spacelike であるから、 \mathcal{T} はこれら 2 つの timecone の非交和である。すなわち,

$$\text{Cone}(u) \cup \text{Cone}(-u) = \mathcal{T}$$

である。

Lemma 2.23. ([12], Lemma5.29) v, w を Lorentz 線形空間 V の timelike なベクトルとする。 v, w が同じ timecone に含まれることと $\langle v, w \rangle < 0$ は同値である。

Proof. $u \in V$ を timelike なベクトルで v, w が $\text{Cone}(u)$ に含まれるようなものとする。このとき,

$$\text{Cone}(u) = \text{Cone}(v) = \text{Cone}(w)$$

であるから、 $v \in \text{Cone}(w)$ を考えればよい。逆を示そう。仮定より $\text{Cone}(v) = \text{Cone}(w)$ は容易に分かり、さらに $v \in \text{Cone}(w)$ かつ $w \in \text{Cone}(v)$ であることから分かる。 \square

V の timecone には 2 つの連結成分が存在するが、そのうちどちらか一方を選ぶことを V を時間的に向き付ける (**time orient**) という。

さて、線形空間の話を一一般化しよう。 M を Lorentz 多様体とし、 τ を M 上の関数で、各 p に対して $T_p M$ の timecone τ_p を割り当てる関数とする。

Definition 2.24. ([12], pp.144-145) 各 $p \in M$ に対し、 p のある近傍 \mathcal{U} 上で滑らかな M のベクトル場 V で、各 $q \in \mathcal{U}$ に対して、 $V_q \in \tau_q$ であるようなものが存在するとき、 τ は滑らかであるといい、このとき τ を M の時間的向き (**time-orientation**) という。

M 上に時間的向きが存在するならば、 M は時間的向き付け可能 (**time-orientable**) であるといい、 M 上のある時間的向きを選ぶことを、 M を時間的に向き付ける (**time orient**) という。

Example 2.25. Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{n,1}$ は時間的向き付け可能である。滑らかなベクトル場としては、 u^1, \dots, u^{n+1} を \mathbb{R}^{n+1} の自然な座標系としたとき、 $\frac{\partial}{\partial u^{n+1}}$ 成分を持つものを選んでこればよい。

Lemma 2.26. ([12], Lemma5.32) Lorentz 多様体 M が時間的向き付け可能であることは、 M 上に timelike なベクトル場 X が存在することと同値である。

Proof. M 上に timelike なベクトル場が存在するならば、各 $p \in M$ に対して、 X_p を含むような timecone を割り当てればよい。

逆に、 τ を M 上の時間的向きとする。 τ は滑らかであることより、 M の各点 p に対し、ある近傍 \mathcal{U} 上に、各 $q \in \mathcal{U}$ に対して $V_q \in \tau_q$ となるような timelike なベクトル場 X_u が存在する。あとは 1 の分割を用いて張り合わせればよい。 \square

多様体の向き付け可能性と時間的向き付け可能性は独立した概念である。Möbius の輪と $S^1 \times [0, 1]$ を考えよ。

Remark 1. ([12], pp.240-241) 時間的向きに対して、空間的向き (**space orientation**) という概念もある。これは timelike 成分を除いた正定値部分空間に対してベクトル空間の通常の向き付けと同様に定義される概念である。

2.4 擬 Riemann 被覆写像, 擬直交群

Γ を滑らかな多様体 M の微分同相写像群とする。各 $p \in M$ に対し、

$$\Gamma p = \{\varphi(p); \varphi \in \Gamma\}$$

を p の Γ による軌道 (**orbit**) という。ここで、 M を Γ による軌道で同一視した集合 M/Γ を次で定義する。

$$M/\Gamma = \{\Gamma p; p \in M\}$$

このとき、 $k: M \rightarrow M/\Gamma$ を自然な射影とする。この M/Γ が多様体の構造を持ち、 k を被覆写像となるような条件を与える。

Definition 2.27. ([12], Definition7.6) 多様体 M の微分同相写像群 Γ が固有不連続 (**properly discontinuous**) であるとは、任意のコンパクト集合 $K \subset X$ に対し、

$$\{g \in \Gamma; g(K) \cap K \neq \emptyset\}$$

が有限となることである。

被覆変換群は固有不連続である。

Proposition 2.28. ([12], Proposition7.6) Γ を固有不連続な M の微分同相写像群とする。このとき、 M/Γ には一意的に多様体の構造が入り、そのとき $k: M \rightarrow M/\Gamma$ は被覆写像となる。特に、 M が連結のとき、その被覆変換群は Γ となる。

特に、 M が単連結であるとき、 $\pi_1(M/\Gamma) \cong \Gamma$ である。

では、擬 Riemann 多様体の構造まで入れることを考えよう。

Definition 2.29. ([12], Definition7.11) 擬 Riemann 多様体 M の被覆写像 $k: \widetilde{M} \rightarrow M$ で、局所等長写像でもあるものを擬 Riemann 被覆写像という。

Corollary 2.30. ([12], Corollary7.12) Γ を固有不連続な擬 Riemann 多様体 M の等長写像群とする。このとき、 M/Γ には一意的に擬 Riemann 多様体の構造が入り、そのとき $k: M \rightarrow M/\Gamma$ は擬 Riemann 被覆写像となる。また M が連結のとき、その被覆変換群は Γ となる。

被覆写像と向き, 時間的向きの関係について与えた補題が次である.

Lemma 2.31. ([12], Proposition9.11) M を連結な擬 Riemann 多様体, Γ を M に固有不連続に作用する等長写像の離散群, $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$ を擬 Riemann 被覆とする. このとき, M/Γ が向き付け可能 [resp. 時間的向き付け可能] であることは, M が向き付け可能 [resp. 時間的向き付け可能] かつ Γ が向き [resp. 時間的向き] を保つことと同値である.

次に, $M = \mathbb{R}^{p,q}$ の等長写像群 $O(p, q)$ を次で定義する. ([12], pp.234)

$$\{g \in GL(p+q; \mathbb{R}) ; \langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle\}$$

ただし, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^{p,q}$ の計量とする. これは一般線形群 $GL(p+q; \mathbb{R})$ の閉部分群となっているから, Lie 群である. これを擬直交群 (**Semi orthogonal group**) といひ, 直交群の一般化となっている.

ここで, ε を

$$\varepsilon = I_p \oplus -I_q$$

と定める.

Lemma 2.32. ([12], Lemma9.2) 次は同値である.

1. $g \in O(p, q)$.
2. $g^T \varepsilon g = \varepsilon$.
3. g の列ベクトルまたは行ベクトルは \mathbb{R}^{p+q} の正規直交基底となる. ただし, 最初の p 本のベクトルは spacelike であり, 後ろの q 本のベクトルは timelike である.
4. g は正規直交基底を正規直交基底へと移す.

では $q \neq 0$ として, $a \in O(p, q)$ を

$$a = \begin{pmatrix} a_S & b \\ c & a_T \end{pmatrix}$$

と表す. ただし, a_T は $q \times q$ 行列で, a_S は $p \times p$ 行列とする.

Definition 2.33. ([12], Definition9.5) $a \in O(p, q)$ を上記のように分割したとき, a が **time orientation** を保つ [resp. 保たない] とは, $\det a_T > 0$ [< 0] となることである. また, a が **space orientation** を保つ [resp. 保たない] とは, $\det a_S > 0$ [< 0] となることである.

実は $O(p, q)$ は 4 つの連結成分に分割できるが, これは $\det a_T$ と $\det a_S$ の符号と対応している. これをそれぞれ $O^{++}(p, q), O^{+-}(p, q), O^{-+}(p, q), O^{--}(p, q)$ と表す. ただし, 1 つ目の符号は $\det a_S$ の, 2 つ目の符号は $\det a_T$ の符号と対応している.

3 双曲空間と anti-de Sitter 空間

この節では双曲空間 \mathbb{H}^n と anti-de-Sitter 空間 AdS^n について定義をする。

まず、双曲空間 \mathbb{H}^n とは定曲率 -1 を持つ Riemann 多様体であり、定曲率 1 を持つ Riemann 多様体である球面 S^n と同様に自然な概念である。Lorentz 幾何における Euclid 空間として Minkowski 空間が定義されたが、anti-de Sitter 空間はいわば Lorentz 幾何における双曲空間である。それゆえ双曲空間と anti-de Sitter 空間の間には似た性質が成り立っている。

いずれも最初是一般の形で定義を行い、具体例として \mathbb{H}^2 および AdS^3 の場合を考察する。この2つのモデルは後々にも深く考察を行うが、この節においては一般的な話に留めている。

この節は主に [4] を参考に執筆した。

3.1 双曲空間

この節の定義や性質は主に [4] の §2.2.1, §2.2.2 による。

$p = n, q = 1$ とし、このとき $\mathbb{R}^{n,1}$ の計量を $\eta = I_n \oplus -I_1$ とする。双曲空間 (hyperbolic space) \mathbb{H}^n を以下で定義する。

$$\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n,1} ; x^T \eta x = -1, x_{n+1} > 0\}$$

$x^T \eta x = -1$ は連結成分が2つの双曲面を定義し、その一方を \mathbb{H}^n とするのである。したがって $x_{n+1} > 0$ の仮定については、 $x_{n+1} < 0$ としても問題ない。

$x \in \mathbb{H}^n$ における接空間 $T_x \mathbb{H}^n$ は $x^\perp \subset \mathbb{R}^{n,1}$ に一致する。ただし、

$$x^\perp = \{y \in \mathbb{R}^{n,1} ; x^T \eta y = 0\}$$

である。したがって、 $T_x \mathbb{H}^n$ の計量は $\mathbb{R}^{n,1}$ の計量を x^\perp に制限したものとして定義できる。また $x \in \mathbb{H}^n$ は timelike であるから、 x^\perp では計量が正定値となることを確認しておく。つまり、 \mathbb{H}^n は Riemann 多様体となる。

\mathbb{H}^n の等長写像群を考えよう。 $\mathbb{R}^{n,1}$ の等長写像群は

$$O(n, 1) = \{g \in GL(n+1; \mathbb{R}) ; g^T \eta g = \eta\}$$

である。よって、 \mathbb{H}^n の等長写像は、 $O(n, 1)$ を $\{\pm e\}$ で割ったものである。すなわち

$$\begin{aligned} \text{Isom}(\mathbb{H}^n) &= PO(n, 1) \\ &= O(n, 1)/\{\pm e\} \\ &= \{g \in GL(n+1; \mathbb{R}) ; g^T \eta g = \eta\} \end{aligned}$$

である。

定義から、 \mathbb{H}^n は \mathbb{R}^n の 1 次元部分空間と交わる時、その交点の数は 1 である。したがって、双曲空間は

$$\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} ; x^T \eta x < 0\} / \mathbb{R}^\times \subset \mathbb{RP}^n$$

とも定義できる。ただし、 $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ である。したがって、双曲空間とは射影空間の部分集合として考えることもできる。

さて、 \mathbb{H}^n の理想境界 (ideal boundary) $\partial^\infty \mathbb{H}^n$ を次で定義する。

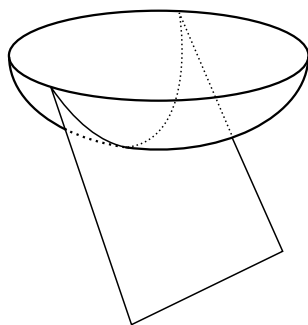
$$\partial^\infty \mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} ; x^T \eta x = 0\} / \mathbb{R}^\times \subset \mathbb{RP}^n$$

$PO(n, 1)$ は \mathbb{H}^n も保つから、 $\partial^\infty \mathbb{H}^n$ も保つ。

Proposition 3.1. ([4], Proposition 2.4) \mathbb{H}^n の測地線は $\partial^\infty \mathbb{H}^n$ 上の異なる 2 点によってただ 1 つに決定される。

$n = 2$ とする。このとき双曲空間の測地線は簡単に調べることができる。

$v \in \mathbb{R}^{2,1}$ を spacelike なベクトルとする。このとき、 v^\perp と \mathbb{H}^2 は必ず交わりを持ち、その交わりが \mathbb{H}^2 の測地線となる。



双曲空間 \mathbb{H}^2 にはいくつかの等価なモデルが存在しており、どれもよく活用する。

Example 3.2. (上半平面モデル, [4], §2.2.3. [15], §2.1)

\mathbb{H}^2 は \mathbb{C} の上半平面にある計量を入れたものと等長的である。すなわち、

$$\mathbb{H}^2 \cong \{z = x + iy \in \mathbb{C} ; \text{Im } z = y > 0\}$$

であり、対応する計量は

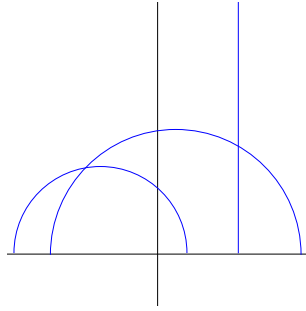
$$h = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

である。これを上半平面モデル (upper half-plane model) という。

上半平面モデルの等長写像類群は $PSL(2; \mathbb{R})$ であり、これは Möbius 変換として作用する。すなわち

$$\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} (z) = \frac{xz + y}{uz + v}$$

である。また、このモデルにおける測地線は、上半平面の理想境界である実軸上に中心を持つ円、または虚軸に平行な直線と上半平面の共通部分である。



Example 3.3. (Poincaré 円板モデル, [15], §2.2)

\mathbb{H}^2 は \mathbb{C} の単位円板とも等長的である. すなわち,

$$\mathbb{H}^2 \cong \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$$

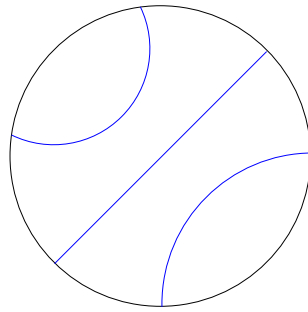
であり, 対応する計量は

$$h = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - |z|^2)^2}$$

である.

このモデルは簡潔に言えば最初に定義した \mathbb{H}^2 と $(0, 0, -1)$ を結ぶ直線と xy 平面の交点である.

また, このモデルにおける測地線は円板の理想境界である S^1 と直行するような直線や円と円板の共通部分である.



3.2 Anti-de Sitter 空間

この節の定義や性質は主に [4] の §2.3.1, §2.3.2 による.

Anti-de Sitter 空間は双曲空間の類似として構成することができる.

$\mathbb{R}^{n,1}$ の計量を $\theta = I_n \oplus -I_1$ とする. まず先ほどの定義で双曲空間は 2 枚の双曲面の一方のみとして

$$\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} ; x^T \theta x = -1, x_{n+1} > 0\}$$

のように定義された。すなわち、対蹠点どうしを同一視することによって

$$\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n,1} ; x^T \theta x = -1\} / \{\pm e\}$$

と双曲空間を定義することもできる。

ここで、 $\mathbb{R}^{n-1,2}$ の計量を

$$\eta = I_{n-1} \oplus -I_2$$

とする。このとき、

$$\text{AdS}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n-1,2} ; x^T \eta x = -1\} / \{\pm e\}$$

を **anti-de Sitter 空間 (anti-de Sitter space)** という。

$x \in \text{AdS}^n$ における接空間 $T_x \text{AdS}^n$ は $x^\perp \subset \mathbb{R}^{n-1,2}$ に一致する。したがって、 $T_x \text{AdS}^n$ の計量は $\mathbb{R}^{n-1,2}$ の計量を x^\perp に制限したものとして定義できる。ここで $x \in \text{AdS}^n$ は timelike であるから、 x^\perp は Lorentz 計量を持つことを確認しておく。つまり、 AdS^n は Lorentz 多様体となる。

AdS^n の二重被覆 $\widehat{\text{AdS}}^n$ は

$$\widehat{\text{AdS}}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n-1,2} ; x^T \eta x = -1\}$$

で与えられる。 $\mathbb{R}^{n-1,2}$ の座標系を x_1, \dots, x_{n+1} とすると、

$$x^T \eta x = -1 \iff x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + 1 = x_n^2 + x_{n+1}^2$$

これは各 (x_1, \dots, x_{n-1}) に対して S^1 が決定することを主張している。したがって、 $\widehat{\text{AdS}}^n$ は $\mathbb{R}^{n-1} \times S^1$ に微分同相である。

Proposition 3.4. ([4], pp.22) AdS^n は n が偶数のとき向き付け可能でないが、 n が奇数のときは向き付け可能である。また、 AdS^n は時間的向き付け可能である。

Proof. 補題 2.31 を用いる。今回は $M = \widehat{\text{AdS}}^n, \Gamma = \{\pm e\}$ である。また、 $\widehat{\text{AdS}}^n$ は向き付け可能かつ時間的向き付け可能である。

$\det(-e)$ の符号は n の偶奇によって変化するから、向き付け可能性も変化する。しかし、いずれの場合も timelike 成分の行列式の値は 1 であるため、時間的向き付け可能である。□

AdS^n の等長写像は、 η を保つ線形変換全体を $\{\pm e\}$ で割ったものである。すなわち

$$\begin{aligned} \text{Isom}(\text{AdS}^n) &= PO(n-1, 2) \\ &= O(n-1, 2) / \{\pm e\} \\ &= \{g \in GL(n+1; \mathbb{R}) ; g^T \eta g = \eta\} / \{\pm I\} \end{aligned}$$

である。

定義から、 $\widehat{\text{AdS}}^n$ は \mathbb{R}^n の 1 次元部分空間と交わる時、その交点の数は 2 である。したがって、双曲空間と同様に、anti-de Sitter 空間を

$$\text{AdS}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} ; x^T \eta x < 0\} / \mathbb{R}^\times \subset \mathbb{RP}^n$$

とも定義できる。

さて、 AdS^n の理想境界 (ideal boundary) $\partial^\infty \text{AdS}^n$ を次で定義する。

$$\partial^\infty \text{AdS}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} ; x^T \eta x = 0\} / \mathbb{R}^\times \subset \mathbb{RP}^n$$

$PO(n-1, 2)$ は AdS^n を保つから、 $\partial^\infty \text{AdS}^n$ も保つ。

Example 3.5. ($PSL(2; \mathbb{R})$ モデル, [4], §2.3.3)

$n = 3$ の場合を考える。簡単な座標変換を行う。

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{2,2} &\cong M(2; \mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_3 + x_1 & x_2 + x_4 \\ x_2 - x_4 & x_3 - x_1 \end{pmatrix} =: g \end{aligned}$$

この変換によって、 $x^T \eta x = -\det g$ となる。したがって AdS^3 は、行列式の値が 1 となるような行列全体を $\{\pm e\}$ で割ったものであると考えられる。すなわち、

$$\text{AdS}^3 \cong PSL(2; \mathbb{R})$$

である。

AdS^3 の計量を計算すると、 $g_1, g_2 \in PSL(2; \mathbb{R})$ に対して、

$$\langle g_1, g_2 \rangle = -\frac{1}{2} \text{tr}(g_1 g_2^{-1})$$

となる。したがって、

$$G_0 := PSL(2; \mathbb{R}) \times PSL(2; \mathbb{R})$$

の AdS^3 への共役作用、すなわち $(g_1, g_2)h = g_1 h g_2^{-1}$ の作用は計量を保つ。実際、

$$\begin{aligned} \langle (g_1, g_2)h_1, (g_1, g_2)h_2 \rangle &= \langle g_1 h_1 g_2^{-1}, g_1 h_2^{-1} g_2^{-1} \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr}(g_1 h_1 g_2^{-1} g_2 h_2^{-1} g_1^{-1}) \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr}(g_1 h_1 h_2^{-1} g_1^{-1}) \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr}(h_1 h_2^{-1}) \\ &= \langle h_1, h_2 \rangle \end{aligned}$$

である。

$e \in PSL(2; \mathbb{R})$ を取り, e のイソトロピー群を $H < G_0$ とする. ただし, イソトロピー群とは e を固定するような作用を与える G_0 の部分群である. これを計算すると,

$$H = \{(X, Y) \in G_0 ; X = Y\} \cong PSL(2; \mathbb{R})$$

である. よって, $PSL(2; \mathbb{R})$ は $PSL(2; \mathbb{R})$ に内部自己同型として作用する.

また $\widehat{AdS^3} = SL(2; \mathbb{R})$ であり, $\mathbb{R}^2 \times S^1$ に微分同相であるから, $\widehat{AdS^3}$ はしばしばソリッドトーラスの内部として描かれる.

4 Einstein 宇宙 Ein^{n+1}

この節では Einstein 宇宙と呼ばれる対象を定義する. これは A.Einstein が模範的な宇宙のモデルとして考案した空間であり, したがって Einstein 宇宙はしばしば Einstein 宇宙とも呼ばれる. これは Minkowski 空間の conformal なコンパクト化にもなっており, Riemann 幾何における Euclid 空間の conformal なコンパクト化の類似として考えることができる.

特に重要な対象は $\text{Ein}^2, \text{Ein}^3$ であり, anti-de Sitter 空間との関連も深い. したがって何度も具体例として取り上げ, その性質を確認していく.

この節は主に [1] を参考に執筆した.

4.1 Einstein 宇宙の定義

この節の定義や性質は主に [1] の §2.3 による.

$\mathbb{R}^{n+1,2}$ の計量を $I_{n+1} \oplus -I_2$ と定義すると, $\mathfrak{N}^{n+1,2}$ は以下で定義される.

$$x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = x_{n+2}^2 + x_{n+3}^2$$

この nullcone から原点を取り払って \mathbb{R}^\times で割ったものを **Einstein 宇宙 (Einstein space, Einstein universe)** といい, Ein^{n+1} と書く. すなわち

$$\text{Ein}^{n+1} := (\mathfrak{N}^{n+1,2} \setminus \{0\}) / \mathbb{R}^\times \subset \mathbb{RP}^{n+2}$$

である. Einstein 宇宙を考える上で, その二重被覆 $\widehat{\text{Ein}}^{n+1}$ を考えると便利である. すなわち

$$\widehat{\text{Ein}}^{n+1} := (\mathfrak{N}^{n+1,2} \setminus \{0\}) / \mathbb{R}^+ \subset S^{n+2}$$

である.

$(x_1, \dots, x_{n+3}) \in \mathbb{R}^{n+1,2}$ を \mathbb{R}^+ で割った空間の座標を $(x_1 : \dots : x_{n+3})$ と表し, \mathbb{R}^\times で割った空間の座標を $[x_1 : \dots : x_{n+3}]$ と表す. 特に, \mathbb{R}^\times で割った空間の座標を斉次座標 (**homogeneous coordinate**) という.

では $\widehat{\text{Ein}}^{n+1}$ の具体的な形を調べよう。最後に \mathbb{R}^+ で割ることを考えるから $x \in \mathfrak{N}^{n+1,2} \setminus \{0\}$ をとると、 $x_{n+2}^2 + x_{n+3}^2 \neq 0$ である。各座標を $\sqrt{x_{n+2}^2 + x_{n+3}^2}$ で割ることで、

$$x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = x_{n+2}^2 + x_{n+3}^2 = 1$$

としてよい。したがって、 $\widehat{\text{Ein}}^{n+1} \cong S^n \times S^1$ 。

以上より、 $\text{Ein}^{n+1} = \widehat{\text{Ein}}^{n+1} / \{\pm e\} \cong (S^n \times S^1) / \{\pm e\}$ となる。これは $S^n \times S^1$ をそれぞれの対蹠点で同一視することである。

Ein^{n+1} には具体的な計量は定められていない。しかし Ein^{n+1} は $\mathbb{R}^{n,1}$ の conformal なコンパクト化となっている (後の節で確かめる) ため、spacelike や timelike, lightlike といった言葉は意味を持つ。

では Ein^{n+1} で扱う対象についていくつか定義をしよう。

Definition 4.1. P を $\mathbb{R}^{n+1,2}$ の 2次元部分空間で、任意の $v \in P$ に対し $\langle v, v \rangle = 0$ であるものとする。この P を Ein^{n+1} へ射影したものを **photon** という。

各 photon は Ein^{n+1} の曲線に対応しており、 $\mathbb{R}P^1$ と同一視できる。また、 $p, q \in \text{Ein}^3$ がある 1 つの photon に含まれているとき、**incident** であるという。

Definition 4.2. $\mathbb{R}^{n+1,2}$ のベクトル v に対して決定する 3 つの対象がある。その対象は v の causal character によって変化する。

$v \in \mathbb{R}^{n+1,2}$ を null なベクトルとすると、 $\mathbb{R}v$ は null な直線である。 $\mathbb{R}v$ の Ein^{n+1} への射影は、 Ein^{n+1} の 1 点に対応する。これを p とする。このとき、

$$L(p) = (v^\perp \cap \mathfrak{N}^{n+1,2}) / \mathbb{R}^\times$$

を **lightcone** という。

次に $v \in \mathbb{R}^{n+1,2}$ を spacelike なベクトルとしたとき、

$$(v^\perp \cap \mathfrak{N}^{n+1,2}) / \mathbb{R}^\times$$

を **Einstein hypersphere** という。

最後に、 $v \in \mathbb{R}^{n+1,2}$ を timelike なベクトルとしたとき、

$$(v^\perp \cap \mathfrak{N}^{n+1,2}) / \mathbb{R}^\times$$

を **spacelike hypersphere** という。

それぞれの対象の性質を見ていこう。

1. $v^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1,2}$ は $\mathbb{R}v$ を含む、計量が退化した $n+2$ 次元空間となる。 $L(p)$ の特異点は p のみであり、 $L(p) \setminus \{p\} \cong \mathbb{R} \times S^{n-1}$ である。

また, photon 全体を $\text{Pho}^{n,1}$ としたとき,

$$L(p) = \{\phi \in \text{Pho}^{n,1}; p \in \phi\}$$

と定義することもできる.

2. Einstein hypersphere は一つ次元が下がった Einstein 宇宙, すなわち Ein^n と同一視できる. 実際, $v^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1,2}$ は $(n, 2)$ 型部分空間となっているから, $v^\perp \cap \mathfrak{N}^{n+1,2} \cong \mathfrak{N}^{n,2}$ である.
3. Spacelike hypersphere は S^n に同相である. 実際, $v^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1,2}$ は $(n+1, 1)$ 型部分空間となっており, $v^\perp \cap \mathfrak{N}^{n+1,2} \cong \mathfrak{N}^{n+1,1}$ である. したがって, $x = (x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathfrak{N}^{n+1,1} \setminus \{0\}$ に対して,

$$\begin{aligned} x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 &= x_{n+2} \\ \left(\frac{x_1}{x_{n+2}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}\right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

であるから, これは S^n に同相である.

最後に, $\text{Ein}^{n+1} \setminus L(p)$ は \mathbb{E}^{n+1} に conformal に同型である. これを **Minkowski patch** という.

4.2 Ein^2

それでは $n = 1$, すなわち Ein^2 について調べていく. この節の定義や性質は主に [1] の §2.4 による.

4.2.1 Ein^2 の位相

$\text{Ein}^2 \cong (S^1 \times S^1)/\mathbb{R}^\times$ であり, これはトーラスに微分同相となる. 実際に計算してみよう.

$$\mathfrak{N}^{2,2} = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^{2,2}; x^2 + y^2 = u^2 + v^2\}$$

を射影化する. 原点は省くので, 先ほどまでと同様の議論で

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1$$

としてよい. すなわち,

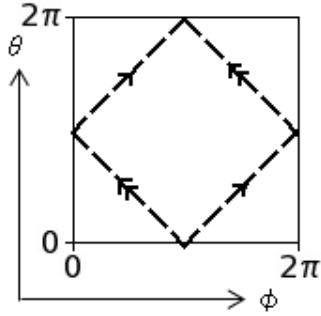
$$\mathfrak{N}^{2,2}/\mathbb{R}^+ = \{(\cos \theta : \sin \theta : \cos \phi : \sin \phi); \theta, \phi \in \mathbb{R}\} \subset \widehat{\text{Ein}}^2$$

である. もう一段階射影したとき, 同一視されるのは次.

$$(\cos \theta : \sin \theta : \cos \phi : \sin \phi) \sim (\cos(\theta + \pi) : \sin(\theta + \pi) : \cos(\phi + \pi) : \sin(\phi + \pi))$$

よって, Ein^2 は以下の基本領域を矢印に沿って貼り合わせて得られる.

したがって, Ein^2 はトーラスに微分同相となる.



4.2.2 Ein² の lightcone

$L(p)$ は p に交わる 2 つの photon から成る.

これも実際に計算してみよう. $p \in \text{Ein}^2$ を代表する lightlike なベクトルを $v = (1, 0, 1, 0)$ とすると,

$$v^\perp \cap \mathfrak{N}^{2,2} = \{(x, y, x, v) \in \mathbb{R}^{2,2}; y^2 = v^2\}$$

である. これを射影すると,

$$(v^\perp \cap \mathfrak{N}^{2,2})/\mathbb{R}^+ = \{(\cos \theta : \sin \theta : \cos \theta : \pm \sin \theta)\}$$

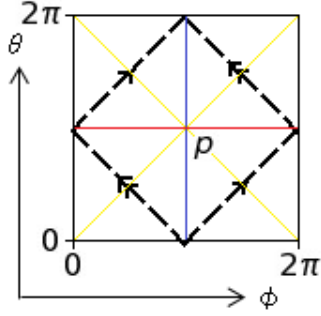
あとは上図と同じ矢印によって張り合わせを行えばよい. これは, トーラスの meridian と longitude となっており, 確かに p に交わる 2 つの photon から成っている. これより, Ein^2 は $L(p)$ を構成する 2 つの photon による葉層構造を持つ. 各葉層構造の leaf space は \mathbb{RP}^1 と特徴づけることができる.

4.2.3 2 つの hypersphere

Einstein hypersphere と spacelike hypersphere についても同様にして計算可能である. 詳しい計算過程は省略するが, $\widehat{\text{Ein}}^2$ において, spacelike hypersphere に対応するものを赤線, Einstein hypersphere に対応するものを青線, light cone に対応するものを黄線として以下に示した. あとは基本領域を考え, 矢印に沿った貼り合わせを行えば Ein^2 における図を得ることができる.

4.3 Ein³

次に $n = 2$, すなわち Ein^3 について調べていく. この節の定義や性質は主に [1] の §2.5 による.



4.3.1 Ein³ の lightcone

Ein³ の lightcone は pinched torus に同相である．実際に確かめてみよう．lightlike なベクトルとして $v = (1, 0, 0, 1, 0)$ を取る．このとき

$$v^\perp \cap \mathfrak{N}^{3,2} = \{(x, y, z, x, v) ; y^2 + z^2 = v^2\}$$

である．これを \mathbb{R}^+ で割ると，

$$(v^\perp \cap \mathfrak{N}^{3,2})/\mathbb{R}^+ = \left\{ \left(\frac{x}{v} : \cos \theta : \sin \theta : \frac{x}{v} : 1 \right) \right\} \cup \{(\pm 1 : 0 : 0 : \pm 1 : 0)\}$$

ここで， $t = \frac{x}{v}$ とすると，上の集合は

$$\{(t : \cos \theta : \sin \theta : t : 1)\} \cup \{(\pm 1 : 0 : 0 : \pm 1 : 0)\}$$

あとは $t \rightarrow \pm\infty$ を考えると， $(t : \cos \theta : \sin \theta : t : 1)$ は $(\pm 1 : 0 : 0 : \pm 1 : 0)$ へと収束する．最後に Ein³ に射影することで $(\pm 1 : 0 : 0 : \pm 1 : 0)$ は同一視され，pinched torus が見える．

4.3.2 2つの lightcone の交わり

Ein³ でのみ現れる対象について定義を行う．

Definition 4.3. $\mathbb{R}^{3,2}$ の (2,1) 型部分空間の null cone を射影したものを **spacelike circle** という．同様に $\mathbb{R}^{3,2}$ の (1,2) 型部分空間の null cone を射影したものを **time-like circle** という．

実際，(2,1) 型部分空間 W を次のように定める．

$$W = \{(x, y, 0, u, 0) ; x, y, u \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{3,2}$$

このとき，

$$\mathfrak{N}(W) = \{(x, y, 0, u, 0) ; x^2 + y^2 = u^2\} \subset \mathbb{R}^{3,2}$$

であり、これを Ein^3 へ射影して斉次座標で見よう。

$$[x : y : 0 : u : 0] = \left[\frac{x}{u} : \frac{y}{u} : 1 : 0 : 0 \right]$$

であって、 $\left(\frac{x}{u}\right)^2 + \left(\frac{y}{u}\right)^2 = 1$ だから、

$$\begin{cases} \frac{x}{u} = \cos \theta \\ \frac{y}{u} = \sin \theta \end{cases}$$

とすることで、 $(\mathfrak{N}(W) \setminus \{0\})/\mathbb{R}^\times$ は、

$$\{[\cos \theta : \sin \theta : 1 : 0 : 0] ; \theta \in \mathbb{R}\} \subset \text{Ein}^3$$

となり、これは円となっている。

さて、 $p \neq q$ であるような $p, q \in \text{Ein}^3$ を取る。 p, q が incident でないとき、 $L(p) \cap L(q)$ は spacelike circle となっている。実際に確かめよう。lightlike な 2 本のベクトル

$$v = (1, 0, 0, 1, 0), \quad w = (1, 0, 0, 0, 1)$$

が、それぞれ $p, q \in \text{Ein}^3$ を代表しているとする。このとき

$$v^\perp \cap w^\perp \cap \mathfrak{N}^{3,2} = \{(x, y, z, x, x); y^2 + z^2 = x^2\}$$

であり、 \mathbb{R}^\times で割ると、

$$\{[1 : \cos \theta : \sin \theta : 1 : 1] ; \theta \in \mathbb{R}\} \subset \text{Ein}^3$$

これは spacelike circle となっている。

また、 p, q が incident である、すなわち同じ photon に含まれるとき、 $L(p) \cap L(q)$ は p, q を含む唯一の photon となる。

4.3.3 Einstein hypersphere

Ein^3 の Einstein hypersphere を求めよう。spacelike な $v = (1, 0, 0, 0, 0)$ に対し、

$$v^\perp \cap \mathfrak{N}^{3,2} = \{(0, y, z, u, v); y^2 + z^2 = u^2 + v^2\}$$

となる。これを \mathbb{R}^\times で割ると、

$$(v^\perp \cap \mathfrak{N}^{3,2})/\mathbb{R}^\times = \{[0 : \cos \theta : \sin \theta : \cos \phi : \sin \phi] ; \theta, \phi \in \mathbb{R}\}$$

となり、これは $\mathfrak{N}^{2,2}/\mathbb{R}^\times$ の時と同様に、 $S^1 \times S^1$ とみなせる。すなわち、 Ein^2 と同じものが出てくる。

4.4 $\mathbb{R}^{n,1}$ の conformal なコンパクト化

\mathbb{R}^n は conformal に S^n に埋め込むことができ、更に 1 点を補うことでコンパクト化も可能である。では Lorentz 幾何においてこの操作はどうなっているだろうか。実は $\mathbb{R}^{n,1}$ は conformal に Ein^{n+1} に埋め込むことができ、また点を補うことによってコンパクト化が可能である。これは Penrose [13] のアイデアによる

まず最初に Riemann 幾何の場合で埋め込み、コンパクト化がどうなっているかを調べ、その後に Minkowski 空間の場合で調べる。その後は実際に $n = 1, 2$ の場合で Minkowski 空間の埋め込みがどうなっているかを調べる。

4.4.1 Riemann 幾何の場合 S^n

この節の定義や性質は主に [1] の §3.1 による。

Conformal Riemannian sphere S^n は $\mathfrak{N}^{n+1,1}$ の射影化によって定義される。実際、

$$\mathfrak{N}^{n+1,1}/\mathbb{R}^\times = \{[v_1 : \cdots : v_{n+1} : 1] ; v_1^2 + \cdots + v_{n+1}^2 = 1\} \cong S^n$$

である。

この S^n に conformal な構造を定義しよう。 S^n の開集合 \mathcal{U} に対し、局所切断 $\sigma: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1,1} \setminus \{0\}$ を取る。これによって \mathcal{U} 上には σ による Lorentz 計量の引き戻しとして計量が定まる。この計量は σ の取り方によって変化するが、その conformal class は σ の取り方によらない。実際、任意の局所切断は \mathbb{R}^\times に値をとる \mathcal{U} 上の関数を用いて $\sigma' = f\sigma$ と書ける。そのとき、

$$g_{\sigma'} = f^2 g_\sigma$$

となるから、誘導された計量は conformal に同値となる。したがって S^n 上に conformal な構造を定義することができた。

$\mathfrak{N}^{n+1,1}$ は $O(n+1, 1)$ によって不変であるから、その射影である S^n は $PO(n+1, 1)$ の作用によって不変である。すなわち、 $PO(n+1, 1)$ は S^n の conformal な自己同型写像の群である。

では \mathbb{E}^n を S^n に conformal に埋め込むことを考える。その前に、まずは $\mathfrak{N}^{n+1,1}$ に埋め込む。 $\mathbb{R}^{n+1,1}$ の計量を

$$I_n \oplus -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、埋め込み $\mathbb{E}^n \hookrightarrow \mathfrak{N}^{n+1,1}$ を

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^n &\longrightarrow \mathfrak{N}^{n+1,1} \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} x \\ \langle x, x \rangle \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とすると、これは埋め込みになっている。この埋め込みと $\mathfrak{R}^{n+1,1} \rightarrow S^n$ の射影を合成することで、 \mathbb{E}^n を S^n に conformal に埋め込むことができる。

\mathbb{E}^n を S^n へ埋め込んだ際の像の補集合は 1 点である。それではこの“穴”を補うことを考えよう。これは \mathbb{E}^n の単位球についての反転 (inversion) を用いて考えることができる。これは $\mathbb{E}^n \setminus \{0\}$ 上で

$$x \mapsto \frac{1}{\langle x, x \rangle} x$$

として表される。

これは $\mathbb{R}^{n+1,1}$ 上で

$$I_n \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と表される。実際、

$$\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{x}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{z}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 \end{bmatrix}$$

である。

ここで、“穴”とは原点の inversion であり、その斉次座標は

$$[0_n : 1 : 0]$$

である。これを無限遠点 (improper point) といい、 p_∞ で表す。したがって、

$$\mathbb{E}^n \cup \{p_\infty\} = S^n$$

となる。

4.4.2 Lorentz 幾何の場合 Ein^{n+1}

この節の定義や性質は主に [1] の §3.2 による。

ここからが本題である。基本的には先ほどのケースと同様に議論が進む。まず、 $\mathbb{R}^{n+1,2}$ の計量を

$$I_n \oplus -I_1 \oplus -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、先ほどの場合と似たように、 $\iota: \mathbb{E}^{n,1} \longrightarrow \text{Ein}^{n+1}$ を作る。先ほどと同様に

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{n,1} &\longrightarrow \mathfrak{N}^{n+1,2} \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ \langle x, x \rangle \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とすると、これは $\mathbb{E}^{n,1}$ の $\mathfrak{N}^{n+1,2}$ への埋め込みである。あとはこれを \mathbb{R}^\times で割ることによって Ein^{n+1} への埋め込みを考えることができる。

再び先ほどのケースと似たように、 $PO(n+1, 2)$ は Ein^{n+1} の conformal な自己同型写像の群である。

さて、では $\mathbb{E}^{n,1}$ を Ein^{n+1} へ埋め込んだ時の像の補集合について考察をしよう。

$p_0 \in \text{Ein}^{n+1}$ を斉次座標 $[0_{n+1} : 0 : 1]$ に対応する原点とする。Lorentzian unit sphere

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{E}^{n,1} ; \langle x, x \rangle = 1\}$$

に関する $\mathbb{E}^{n,1} \setminus \mathfrak{N}^{n,1}$ 上の inversion を

$$I_{\mathcal{S}}: x \mapsto \frac{1}{\langle x, x \rangle} x$$

と定義する。これは Ein^{n+1} において、

$$I_{n+1} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。 $I_{\mathcal{S}}$ は本来は $\mathbb{E}^{n,1} \setminus \mathfrak{N}^{n,1}$ 上の写像であるが、 Ein^{n+1} における inversion も同じ記号で表すとする。

$I_{\mathcal{S}}$ によって $\text{Ein}^{n+1} \setminus \iota(\mathbb{E}^n)$ の点へ飛ばされる点全体の集合を考えよう。

まず、Riemann 幾何の場合の類似から、 $\mathbb{E}^{n,1}$ において計量が 0 になるような点全体の埋め込みを inversion で飛ばそう。

まず、

$$L^{\text{aff}}(p_0) = \{v \in \mathbb{E}^{n,1}; \langle v, v \rangle = 0\}$$

を 0 のまわりの **affine lightcone** という。

したがって、

$$I_{\mathcal{S}}(\iota(L^{\text{aff}}(p_0))) = \{[v : 1 : 0]; \langle v, v \rangle = 0\}$$

である。

しかし、まだ補集合には inversion によって埋められていない点が存在している。今ここまでで議論していたのは $\mathbb{E}^{n+1} \cup \iota(\mathbb{E}^{n,1})$ の点である。これは、 $n+2$ または

$n+3$ 番目の成分が0とならないような点全体である。したがって、残る点は $n+2$ かつ $n+3$ 番目の成分が0であるような点の集合である。すなわち

$$\{[v : 0 : 0] ; \langle v, v \rangle = 0\} \subset \text{Ein}^{n+1}$$

であり、これは実質 $\mathbb{R}^{n,1}$ の null cone である。上の集合の射影化を **ideal sphere** といい、 S_∞ と表す。ここで、 $S_\infty \cong S^{n-1}$ である。実際、

$$v = (v_1, \dots, v_{n+1})$$

としたとき、ideal sphere は

$$S_\infty = \{[v_1 : \dots : v_{n+1} : 0 : 0] ; v_1^2 + \dots + v_n^2 = v_{n+1}^2\} \subset \text{Ein}^{n+1}$$

である。条件式の両辺を v_{n+1}^2 で割って、

$$\frac{v_i}{v_{n+1}} = V_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

とすると、

$$S_\infty = \{[V_1 : \dots : V_n : 1 : 0 : 0] ; V_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, \dots, n)\} \subset \text{Ein}^{n+1}$$

であり、これは S^{n-1} に同相である。

また、

$$S_\infty \cup I_{\mathcal{I}} \iota(L^{\text{aff}}(p_0)) = L(p_\infty)$$

である。 S_∞ と $I_{\mathcal{I}}(L^{\text{aff}}(p_0))$ は先ほど計算したから、 $L(p_\infty)$ を計算する。

$$p_\infty = [0 : \dots : 0 : 1 : 0]$$

であり、対応する $\mathbb{R}^{3,2}$ の null な直線は

$$v = (0, \dots, 0, 1, 0)$$

によって張られる。したがって、

$$v^\perp \cap \mathfrak{N}^{3,2} = \{(v_1, \dots, v_{n+2}, 0) ; v_1^2 + \dots + v_n^2 = v_{n+1}^2\} \subset \mathbb{R}^{3,2}$$

であるから、これを Ein^{n+1} へ射影して、

$$\begin{aligned} L(p_\infty) &= \{[v_1 : \dots : v_{n+2} : 0] ; v_1^2 + \dots + v_n^2 = v_{n+1}^2\} \\ &= \{[v_1 : \dots : v_n : v_{n+1} : 1 : 0] ; v_1^2 + \dots + v_n^2 = v_{n+1}^2\} \\ &\quad \cup \{[V_1 : \dots : V_n : 1 : 0 : 0] ; V_1^2 + \dots + V_n^2 = 1\} \\ &= I_{\mathcal{I}}(L^{\text{aff}}(p_0)) \cup S_\infty \end{aligned}$$

である。ただし,

$$V_i = \frac{v_i}{v_{n+1}} \quad (i = 1, \dots, n)$$

とした。

また, 次の命題は Ein^{n+1} が Minkowski 空間に lightcone を補ったものだという
ことを示している。

Corollary 4.4.

$$\text{Ein}^{n+1} = \mathbb{E}^{n+1} \cup L(p_\infty)$$

Proof.

$$\text{Ein}^{n+1} = \mathbb{E}^{n,1} \cup I_{\mathcal{S}t}(L^{\text{aff}}(p_0)) \cup S_\infty = \mathbb{E}^{n,1} \cup L(p_\infty)$$

□

4.4.3 具体例による確認

この節では具体的に $n = 2, 3$ の場合で $\mathbb{E}^{2,1}$ のコンパクト化を見ていく。

Example 4.5. ($n = 2$ の場合)

$\mathbb{R}^{2,2}$ の計量を

$$I_1 \oplus -I_1 \oplus -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}^{1,1} & \longrightarrow & \mathfrak{N}^{2,2} & \longrightarrow & \text{Ein}^2 \\ (x, y) & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 - y^2 \\ 1 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} x \\ y \\ x^2 - y^2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

という conformal な埋め込みを考える。

まず, この少し変わった計量が入った $\mathbb{R}^{2,2}$ において null cone は

$$\mathfrak{N}^{2,2} = \{(x, y, u, v) ; x^2 = y^2 + uv\}$$

で定義されている。ここで

$$\begin{cases} U = \frac{1}{2}(u + v) \\ V = \frac{1}{2}(u - v) \end{cases}$$

とすると,

$$\begin{cases} u = U + V \\ v = U - V \end{cases}$$

である。このとき、 $\mathfrak{N}^{2,2}$ は

$$\mathfrak{N}^{2,2} = \{(x, y, U + V, U - V); x^2 + V^2 = y^2 + U^2\}$$

と表せる。これを \mathbb{R}^+ で割ると、

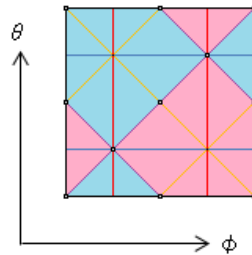
$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \cos \phi \\ U = \sin \phi \\ V = \sin \theta \end{cases}$$

とでき、

$$\mathfrak{N}^{2,2}/\mathbb{R}^+ = \{(\cos \theta : \cos \phi : \sin \theta + \sin \phi : \sin \phi - \sin \theta) ; \theta, \phi \in \mathbb{R}\}$$

である。

まず $\mathbb{E}^{1,1}$ の像は $\widehat{\text{Ein}}^2$ において次の図の薄青部 (+1 成分) と薄赤塗部 (-1 成分) のようになっている。



これを示していく。まず、 $\mathbb{E}^{1,1}$ における spacelike, timelike, lightlike な直線がそれぞれ $\widehat{\text{Ein}}^2$ においてどこに対応しているかを調べよう。まず、 $\mathbb{E}^{1,1}$ における spacelike な直線で最も自明なものは、

$$\{(t, 0) \in \mathbb{E}^{1,1}; t \in \mathbb{R}\}$$

で表すことができる。これを $\mathfrak{N}^{2,2}$ へ埋め込むと、

$$\{(t, 0, t^2, 1) \in \mathbb{R}^{2,2}; t \in \mathbb{R}\}$$

となり、 \mathbb{R}^+ で割ると各成分を三角関数を用いて表すことができる.. $k > 0$ なる定数 k を用いて、

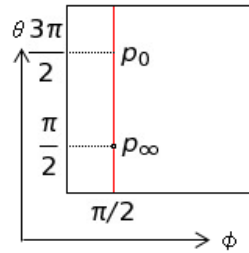
$$\begin{cases} kt = \cos \theta \\ 0 = \cos \phi \\ kt^2 = \sin \phi + \sin \theta \\ k = \sin \phi - \sin \theta \end{cases}$$

とすると, $k = \frac{2}{t^2+1}$ となり,

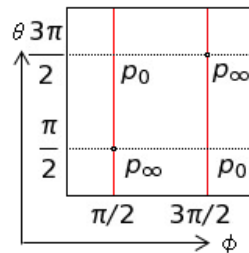
$$\phi \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$

$$\cos \theta = \frac{2t}{t^2+1}, \quad \sin \theta = \frac{t^2-1}{t^2+1}$$

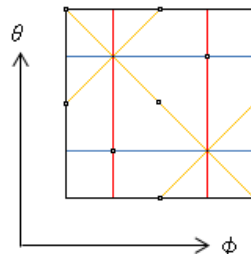
すると, 次のようになる.



$\widehat{\text{Ein}}^2$ は二重被覆であるから, もう一方に対応する方も書き入れると以下のようなになる.



同様に timelike な直線で自明なもの, lightlike な直線を書き込んでいこう. 計算を省略して結果だけ記述すると, 下のようになる. ただし, 青い直線が timelike な直線, 黄色い直線が lightlike な直線である.



ではより一般に $\mathbb{E}^{1,1}$ を $\mathfrak{N}^{2,2}$ へと埋め込んで \mathbb{R}^+ で割ったとしよう. そのとき, 各

成分は三角関数を用いて表すことができ、 $k > 0$ なる定数 k を用いて

$$\begin{cases} kx = \cos \theta \\ ky = \cos \phi \\ k(x^2 - y^2) = \sin \phi + \sin \theta \\ k = \sin \phi - \sin \theta \end{cases}$$

となる。実はこのように $\mathbb{E}^{1,1}$ を埋め込んだとき、 $\widehat{\text{Ein}}^2$ 上には定義されない点が存在している。すなわち、ある $k \neq 0$ と $x, y \in \mathbb{R}$ に対して上の式が成立しないような θ, ϕ が存在している。それは次の点である。

1. $\sin \phi - \sin \theta = 0$ なる点
2. $x^2 - y^2 \neq 0$ かつ $\sin \phi + \sin \theta = 0$ なる点

である。

(2) を満たすような点は存在しない。実際、 $\sin \theta + \sin \phi = 0$ を満たす θ, ϕ の条件は、

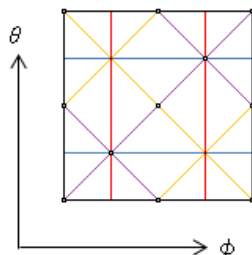
$$\phi = -\theta + 2n\pi, \theta + (2n + 1)\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

である。しかし、このとき $x^2 - y^2 = \cos^2 \theta - \cos^2 \phi = 0$ となる。

次に、(1) を満たす点は、

$$\phi = \theta, \pi - \theta$$

である。これも図に書き込んでいこう。ただし白い穴抜きの点および紫の線で記入した。



ではこれらを埋めていくことを考えよう。

1. 紫の線と p_∞ については、lightcone の θ を $-\theta$ と置換することで埋めることができる。これによって、

$$\begin{aligned} \cos \theta &\mapsto \cos \theta, \\ \cos \phi &\mapsto \cos \phi, \\ \sin \phi + \sin \theta &\mapsto \sin \phi - \sin \theta, \\ \sin \phi - \sin \theta &\mapsto \sin \phi + \sin \theta \end{aligned}$$

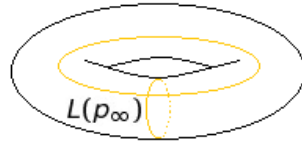
と座標は移され、これは lightcone の inversion に対応している。ここで、 $p_\infty = [0 : 0 : 0 : 1 : 0]$ である。

2. 残る点は $\theta = k\pi, \phi = l\pi$ の点であるが、これは $x^2 - y^2 = 0$ であるような (x, y) に対して

$$\begin{cases} kx = \cos \theta \\ ky = \cos \phi \\ 0 = \sin \phi + \sin \theta \\ 0 = \sin \phi - \sin \theta \end{cases}$$

を計算すればよい。これは ideal circle S_∞ 上の点に対応している。

よって $\text{Ein}^2 = \mathbb{E}^{1,1} \cup L(p_\infty)$ であることは示された。



上の結果を踏まえると、

1. spacelike(timelike) な直線で自明なものの閉包を考えたとき、境界として現れるのは p_∞ .
2. lightlike な直線で自明なものの閉包を考えたとき、境界として現れるのは S_∞ 上の点である。

一般の spacelike(timelike) な直線の閉包を考えたときの境界もまた p_∞ となっているが、簡単に示せるため証明は省略する。

Example 4.6. ($n = 3$ の場合)

$\mathbb{R}^{3,2}$ の計量を

$$I_2 \oplus -I_1 \oplus -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}^{2,1} & \longrightarrow & \mathfrak{N}^{3,2} & \longrightarrow & \text{Ein}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ x^2 + y^2 - z^2 \\ 1 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ x^2 + y^2 - z^2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

という conformal な埋め込みを考える．この埋め込みを理解するために，簡単な座標変換を行う．

$$\mathfrak{N}^{3,2} = \{(x, y, z, u, v); x^2 + y^2 = z^2 + uv\}$$

において

$$\begin{cases} U = \frac{1}{2}(u + v) \\ V = \frac{1}{2}(u - v) \end{cases}$$

とすると

$$\begin{cases} u = U + V \\ v = U - V \end{cases}$$

である．これによって， $\mathbb{R}^{3,2}$ は自然な計量の入った擬 Euclid 空間と見ることができ．したがって $\mathfrak{N}^{3,2}$ は

$$\mathfrak{N}^{3,2} = \{(x, y, z, U + V, U - V); x^2 + y^2 + V^2 = z^2 + U^2\}$$

と表せる． \mathbb{R}^+ で割ったとき，各座標は

$$\begin{cases} x = \sin \theta \cos \phi \\ y = \sin \theta \sin \phi \\ V = \cos \theta \\ z = \cos \psi \\ U = \sin \psi \end{cases}$$

とできる．

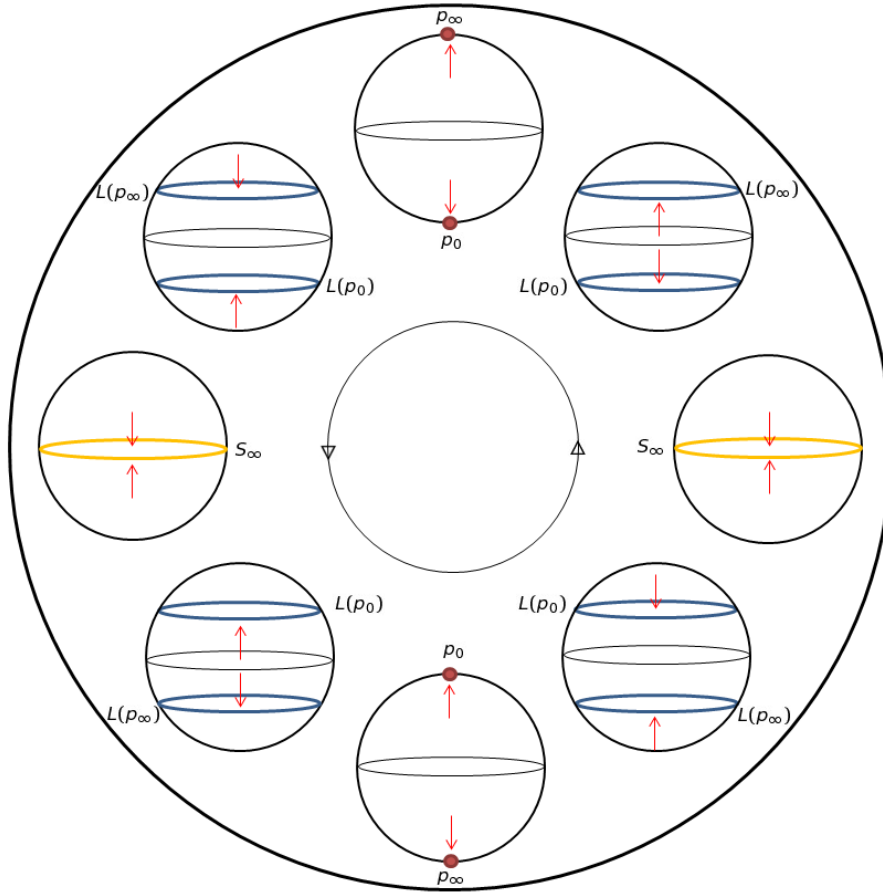
この座標変換のもと， $\mathbb{E}^{2,1}$ は $\widehat{\text{Ein}}^3 \cong S^2 \times S^1$ にどう埋め込まれているかを計算すると，次の図のようになる．

(外側の円が S^1 で，中に書かれているのが S^1 の各点に対応する S^2 の様子である．図中の赤い矢印は S^1 上の点を反時計回りに動かしていったときの lightcone の変化の仕方を示している．)

一方の Minkowski patch に注目しよう． S^1 の点を 1 つ固定したとき，片方の Minkowski patch の埋め込みに対応するのは， S^2 の”南極”の点から $L(p_\infty)$ 上の点までの部分である．これは円板とみなすことができる．(ちなみに”南極”の点から $L(p_0)$ 上の点までの部分は timelike な成分に対応している．)

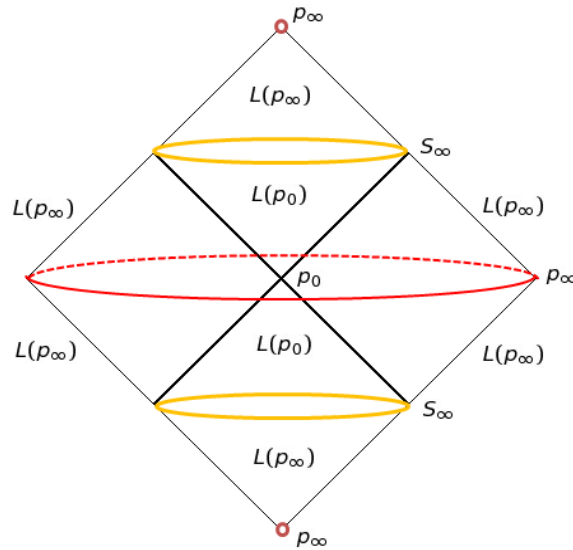
ここで S^1 上の点を動かして円板を重ねていくと，次のような図ができる． Ein^3 はこの図の p_∞ をすべて 1 点に同一視し， $L(p_\infty)$ に適切に同値関係を入れたものになっている．

では $\mathbb{E}^{2,1}$ の平面で spacelike なもの，timelike なもの，null なものをそれぞれ Ein^3 に埋め込み，閉包を取ろう．([1], §3.3.2)



Ein^2 の場合と同様に，spacelike(timelike) な直線の閉包における境界は p_∞ で，lightlike な直線の閉包における境界は S_∞ 上の点である．spacelike(timelike) な直線の閉包は spacelike(timelike) circle となっている．

1. spacelike な平面において任意の直線は spacelike であるから，閉包における境界は p_∞ となる．また，簡単な計算によって閉包は spacelike hypersphere となっていることが分かる．
2. timelike な平面において，その閉包における境界は p_∞ で交わる二つの ideal photon である．また，簡単な計算によって閉包は Einstein hypersphere となっていることが分かる．
3. lightlike な平面 (すなわち退化した平面) において，その閉包における境界は 1つの ideal photon である．したがって閉包は pinched torus となっており，すなわち lightcone である．



第II部

離散群と基本領域

まず最初に $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ の離散部分群の基本領域と呼ばれる領域を決定する手法について紹介する. その後にその手法を $\mathbb{E}^{2,1}$ へと拡張することを考えたい. 拡張の際に用いる道具が Minkowski crooked plane という \mathbb{R}^2 に同相な折れ曲がった平面である. Crooked plane を用いることで, $\mathbb{E}^{n,1}$ における $\text{Isom}(\mathbb{E}^{2,1})$ の離散部分群の基本領域を決定することができる.

5 \mathbb{H}^2 への作用の基本領域

この節では, \mathbb{H}^2 を上半平面モデルを用いて考察する. この節は主に [8],[15] を参考に執筆した.

最初に言葉の定義を行う.

Definition 5.1. ([15], 定義 4.17) X を多様体, G を X に作用する等長写像の離散群とする. $\Delta \subset X$ が G の基本領域 (fundamental domain) であるとは, 次の二つを満たすことである.

1. $\cup_{g \in G} g(\Delta) = X$
2. $g \in G$ に対して $\text{int } \Delta \cap \text{int } g(\Delta) \neq \emptyset$ ならば $g = \text{id}$

さて, 双曲空間の話へ移ろう. すなわち, $X = \mathbb{H}^2$ とし, G は $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ の離散部分群であるとする.

上半平面モデルにおいて $\text{Isom}(\mathbb{H}^2) \cong PSL(2; \mathbb{R})$ と見ることができた。 $PSL(2; \mathbb{R})$ の離散部分群をフックス群 (**Fuchsian group**) という。

$g \in PSL(2; \mathbb{R})$ の分類について述べよう。 ([15], §1.3 (b))

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

の固有値を λ としたとき、固有多項式は、

$$\lambda^2 - \text{tr}(g)\lambda + 1$$

である。 よって、 g の固有値は

$$\lambda = \frac{\text{tr}(g) \pm \sqrt{\text{tr}(g)^2 - 4}}{2}$$

であるから、 g は固有値の値によって次の3つに大別することができる。

1. $\text{tr}(g) > 2$ のとき、 g は双曲的 (**hyperbolic**) であるという。
2. $\text{tr}(g) = 2$ のとき、 g は放物的 (**parabolic**) であるという。
3. $0 < \text{tr}(g) < 2$ のとき、 g は楕円的 (**elliptic**) であるという。

ただし、 $PSL(2; \mathbb{R})$ の元は楕円的になり得ない。 この言葉が意味を持つのは、 $PSL(2; \mathbb{C})$ の場合においてである。

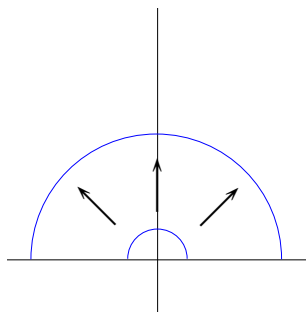
では \mathbb{H}^2 の測地線 γ に対する各 g の作用の仕方を次の具体例を通して確認しよう。

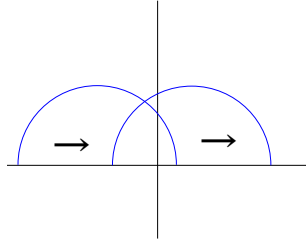
Example 5.2. ([8], §5.5.1)

1. g が双曲的の場合を考えよう。

$$g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

とすると、これは $g(z) = 4z$ として作用するから、次の図のようになる。





2. g が放物的の場合を考えよう.

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると, これは $g(z) = z + 1$ として作用するから, 次の図のようになる.

では \mathbb{H}^2 上に二点間の距離を与える関数を定めよう. \mathbb{H}^2 上の曲線 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ を $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$ とする. この曲線の長さ $L(\gamma)$ は, 簡単な計算から

$$L(\gamma) = \int_a^b \frac{1}{\gamma_2(t)} \sqrt{\left(\frac{d\gamma_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_2}{dt}\right)^2} dt$$

だと分かる. ここで, $x, y \in \mathbb{H}^2$ の距離 $d(x, y)$ を

$$d(x, y) = \inf\{L(\gamma) ; \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2, \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\}$$

によって定義する.

さて, $x, y \in \mathbb{H}^2$ に対して \mathbb{H}^2 の半空間 $H(x, y)$ を次で定義する.

$$H(x, y) = \{z \in \mathbb{H}^2 ; d(z, x) \leq d(z, y)\}$$

次に, G を楕円的でない元からなるフックス群とする. すなわち, G は \mathbb{H}^2 に固有不連続に作用しているとする. このとき, $x_0 \in \mathbb{H}^2$ に対し, G の **Dirichlet 領域 (Dirichlet domain)** とは,

$$\begin{aligned} \Delta_G(x_0) &= \{z \in \mathbb{H}^2 ; \text{任意の } g \in G \text{ に対し, } d(z, x_0) \leq d(z, g(x_0))\} \\ &= \bigcap_{g \in G} H(x_0, g(x_0)) \end{aligned}$$

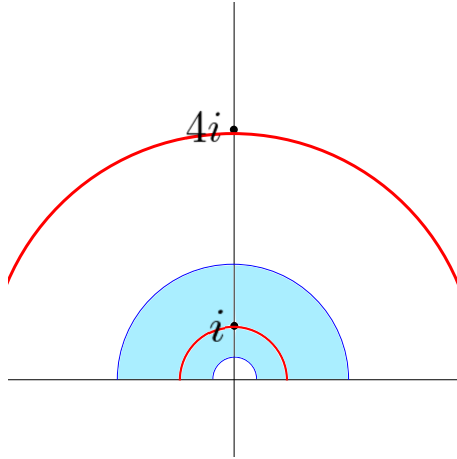
で定義される領域であり, これは G の基本領域となっている.

Example 5.3. ([8], §5.5.1) 先ほどの例で扱った $g \in PSL(2; \mathbb{R})$ について考えよう. すなわち,

$$g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

として $G = \langle g \rangle$ とする. このとき, $i \in \mathbb{H}^2$ に対して, $\Delta_G(i)$ は次の斜線部の領域である.

これは基本領域となっている.



また、より一般に次の定理が成立している。

Theorem 5.4. ([9]) $G = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$ を $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)^0$ の離散部分群とする。また、 D_1^\pm, \dots, D_n^\pm を $2n$ 個の half space で、任意の i, j に対して $D_i^\pm \cap D_j^\pm = \emptyset$ かつ $\gamma(D_i^-) = D_i^+$ になるようなものとする。 Δ をこれらの half space で囲まれた単連結領域としたとき、 G の基本領域は Δ となる。

これは双曲幾何学において基本的かつ重要な定理である。

6 Minkowski crooked plane

Γ を $\mathbb{E}^{2,1}$ の等長写像の離散群とする。 Γ の基本領域を考えたいが、 \mathbb{H}^2 と同様の手法をそのままは使えない。これは Lorentz 計量からは距離を上手く定義できないからである。例えば、Lorentz 計量では異なる二点間のベクトルのノルムが 0 となることがある。しかし crooked plane を用いることによって \mathbb{H}^2 のケースの類似として扱うことができる。

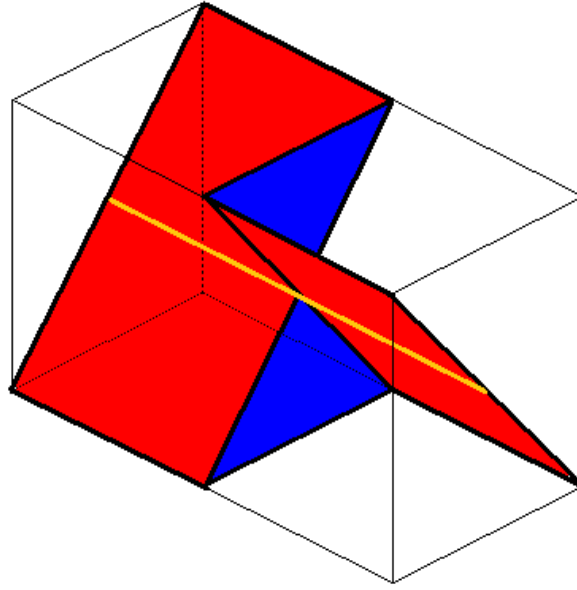
この節は主に [1],[3],[8] を参考に執筆した。

6.1 $\mathbb{E}^{2,1}$ の crooked plane

最初に次のページの図のような図形、Minkowski crooked plane の定義から行う。この定義は [1], §8.1 による。

まず、青い部分から定義をする。 $v \in \mathbb{R}^{2,1}$ を spacelike なベクトルとする。このとき、 v^\perp は $\mathbb{R}^{2,1}$ の $(1, 1)$ 型部分空間である。 v^\perp の基底として lightlike なベクトル v^+, v^- を $\{v^+, v, v^-\}$ が右手系を成し、かつ同じ causal cone, すなわち

$$\{u \in \mathbb{R}^{2,1}; \langle u, u \rangle \leq 0\}$$



に含まれるように取ってくる。このとき, $p \in \mathbb{E}^{2,1}$ に対して,

$$S(p, v) := J(p) \cap (p + v^\perp)$$

を p を錐とする **stem** と呼ぶ。ただし, $J(p)$ は p を特異点に持つ causal cone, すなわち

$$J(p) = \{p + u \in \mathbb{E}^{2,1}; \langle u, u \rangle \leq 0\}$$

とする。

次に, 赤い部分を定義する。 p を通る 2 本の lightlike な直線を

$$l^+ = p + \mathbb{R}v^+$$

$$l^- = p + \mathbb{R}v^-$$

と定義する。 l^\pm は lightlike であるから, $l^\pm \subset (l^\pm)^\perp := p + (v^\pm)^\perp$ である。そして, $(l^\pm)^\perp$ は 2 次元であるから, l^\pm によってそれぞれ 2 分割される。 v^\pm と同じ causal cone に含まれる timelike なベクトル $w \in \mathbb{R}^{2,1}$ をとる。

このとき, $(l^\pm)^\perp$ で l^\pm によって分割された各成分は次のように表せる。

$$W^+(l^\pm) := \{p + u \in l^\pm; \det(u, v, w) > 0\}$$

$$W^-(l^\pm) := \{p + u \in l^\pm; \det(u, v, w) < 0\}$$

これは明らかに w の選び方によらず定まる。この $W^\pm(l^\pm)$ を **wing** と呼ぶ。

ここで,

$$C(p, v)^+ := W^+(l^+) \cup S(p, v) \cup W^+(l^-)$$

を **positively oriented crooked plane** という。negatively oriented crooked plane $C(p, v)^-$ も同様に定義される。

以上の定義から, crooked plane は $p \in \mathbb{E}^{2,1}$ と spacelike なベクトル $v \in \mathbb{R}^{2,1}$ によって決定していると分かる. これらに名前を付けておこう.

1. p を crooked plane の **vertex** という. 実際, 4つの成分の交わりは p である.
2. $\sigma := p + \mathbb{R}v$ は p を通る spacelike な直線であり, これを crooked plane の **spine** という.

この $C(p, v)^\pm$ は \mathbb{R}^2 に同相である.

6.2 具体例の計算

実際に vertex と spine から crooked plane を構成してみよう. この具体例は [1], §8.2 を参考にした.

vertex p と spacelike なベクトル v を次のように定める.

$$p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする. このとき, spine σ は

$$\sigma = \mathbb{R}v = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である. σ^\perp に含まれる 2つの lightlike な直線は

$$l^+ = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, l^- = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である. それぞれの方向ベクトルを v^+, v^- とする. よって, stem は

$$S(p, v) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}; y^2 - z^2 \leq 0 \right\}$$

となる. ここからまずは $W^+(l^+)$ を計算する.

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をとると, $\langle u, v_+ \rangle = -1 < 0$ より, u は v と同じ causal cone に含まれる. また,

$$(l^+)^\perp = \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right) \right\}$$

である. ここから, 行列式を計算して,

$$W^+(l^+) = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ -y \end{array} \right); x > 0 \right\}$$

となる. 同様にして

$$W^+(l^-) = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ y \end{array} \right); x < 0 \right\}$$

となる. よって crooked plane を計算できた.

$\mathbb{E}^{2,1}$ の等長写像全体 $\text{Isom}(\mathbb{E}^{2,1})$ を考える. wing の符号は, 向きを保つ等長写像によって保たれ, 向きを逆にする等長写像によって入れ替わる. ここで, $\text{Isom}(\mathbb{E}^{2,1})$ の単位元成分, すなわち向きを保つ等長写像全体 $\text{Isom}(\mathbb{E}^{2,1})^0$ は vertex と spacelike なベクトル, したがって spine の組全体に推移的に作用する. すなわち

$$\begin{aligned} &\{C(p, v)^+; p \in \mathbb{E}^{2,1}, v \in \mathbb{R}^{2,1}\} \\ &\{C(p, v)^-; p \in \mathbb{E}^{2,1}, v \in \mathbb{R}^{2,1}\} \end{aligned}$$

にそれぞれ推移的に作用する. 向きを逆にする等長写像は $C(p, v)^+ \rightarrow C(p, v)^-$ および $C(p, v)^- \rightarrow C(p, v)^+$ の対応を与えるから, $\text{Isom}(\mathbb{E}^{2,1})$ は crooked plane 全体の集合に推移的に作用する. したがって, crooked plane の性質についてはここで考えた具体例を考えれば十分である. 以降, $C(p, v)$ と書いたときは positively oriented crooked plane を指すものとする.

6.3 \mathbb{H}^2 と crooked plane

この節の内容は [8], §5.5.2 に基づいている.

\mathbb{H}^2 において Dirichlet 領域の境界となっているのは \mathbb{H}^2 の測地線であった. \mathbb{H}^2 の測地線は spacelike な $v \in \mathbb{R}^{2,1}$ に対し, $v^\perp \cap \mathbb{H}^2$ として定義できたことを思い出そう. したがって, \mathbb{H}^2 の測地線に対し, その測地線が $S(0, v) \cap \mathbb{H}^2$ であるような, ある crooked plane $C(0, v)$ がただ一つ定まる. では, crooked plane を用いて Dirichlet 領域の考え方を拡張し, $\mathbb{E}^{2,1}$ における基本領域を計算していこう.

$\text{Isom}(\mathbb{E}^{2,1})^0 \cong SO(2,1)^0 \ltimes \mathbb{R}^{2,1}$ であるから、任意の $\gamma \in \text{Isom}(\mathbb{E}^{2,1})$ は、 $g \in SO(2,1)^0$ と $u \in \mathbb{R}^{2,1}$ を用いて

$$\gamma(x) = g(x) + u$$

と書くことができる。ここで、 g は γ の **linear part** といい、 u は γ の **translational part** という。また、射影 $L: \text{Isom}(\mathbb{E}^{2,1})^0 \rightarrow SO(2,1)^0$ を $L(\gamma) = g$ と定義する。

次に、 $SO(2,1)^0 \cong PSL(2; \mathbb{R})$ である。実際、

$$PSL(2; \mathbb{R}) \rightarrow SO(2,1)^0$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^2 & 2ac & c^2 \\ ab & ad+bc & cd \\ b^2 & 2bd & d^2 \end{pmatrix}$$

である。したがって $g \in SO(2,1)^0$ は $PSL(2; \mathbb{R})$ における元の分類に対応する。すなわち、 g は次の3つに大別することができる。

1. $\text{tr}(g) > 3$ のとき、 g は双曲的 (**hyperbolic**) である。
2. $\text{tr}(g) = 3$ のとき、 g は放物的 (**parabolic**) である。
3. $0 < \text{tr}(g) < 3$ のとき、 g は楕円的 (**elliptic**) である。

すなわち、 g が hyperbolic [resp. elliptic, parabolic] であることと γ が hyperbolic [resp. elliptic, parabolic] であることは同値である。

ではまずは線形写像の場合、すなわち $u = 0$ の場合について考察しよう。 $g \in SO(2,1)^0$ が双曲的であるとき、巡回群 $\langle g \rangle$ の作用による $\mathbb{E}^{2,1} \setminus \{0\}$ の基本領域を求める。(原点は線形写像に対して固定点となってしまうため、省いてある。)

g は双曲的であるから3つの固有値を $\lambda < 1 < \lambda^{-1}$ ($0 < \lambda < 1$) をもつ。それぞれに対応する固有ベクトルを v^+, v, v^- とする。ただし、 $\{v^+, v, v^-\}$ は右手系を成すとする。この v^+, v^- は lightlike であり、 v は spacelike である。また、これらのベクトルは $\mathbb{R}^{2,1}$ の通常の計量について直行している。

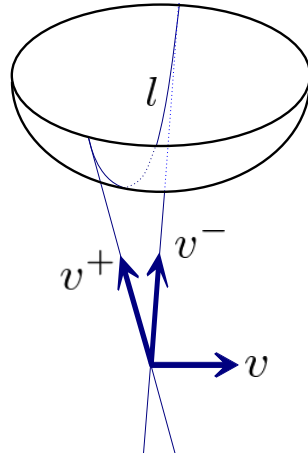
まず命題 3.1 より、 v^+, v^- は $\partial^\infty \mathbb{H}^2$ 上の2点に対応しているから、 \mathbb{H}^2 上の測地線 l を定義する。次に g は \mathbb{H}^2 を保ち、 $g(v) = v$ であるから、 g の作用によって l は固定される。

ここで、 u を spacelike なベクトルとしたとき、 $g(u)$ もまた spacelike である。以上から、 g は \mathbb{H}^2 上で、 u に対応する測地線を $g(u)$ に対応する測地線へと移す。

\mathbb{H}^2 を上半平面モデルで見ると、 l は虚軸に対応し、 g は

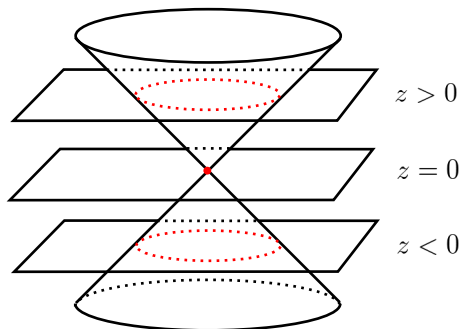
$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \in PSL(2; \mathbb{R})$$

の作用に対応する。

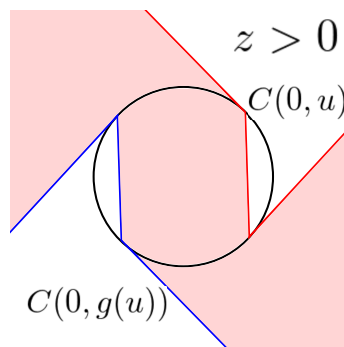


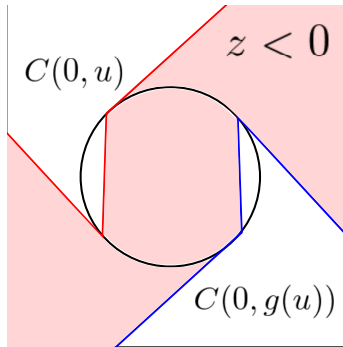
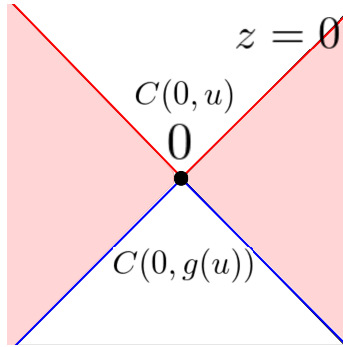
したがって u に対応する測地線が l と横断的に交わるとしたとき, $g(u)$ に対応する測地線は u に対応する測地線と交わらない. また, g は計量を保つから, stem と wing も保つ. 以上から, $G = \langle g \rangle$ の基本領域は $C(0, u), C(0, g(u))$ に囲まれた領域となる.

視覚的に捉えよう. 次の図における, 3つの平面による断面を考察すると理解しやすい.



このそれぞれの断面において2つの crooked plane に囲まれた領域は, 次の図におけるピンク色の領域である. ただし, 赤線で $C(0, u)$ を, 青線で $C(0, g(u))$ を記述した.





では次に $u \neq 0$ の場合, すなわち affine 変換の場合について調べよう. 実は, 次の定理が成立している.

Theorem 6.1. ([6], Theorem3.5) $G = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$ を $\text{Isom}(\mathbb{E}^{2,1})^0$ の双曲的離散部分群とする. また, C_1^\pm, \dots, C_n^\pm を $2n$ 個の crooked plane で, 任意の i, j に対して $C_i^\pm \cap C_j^\pm = \emptyset$ かつ $\gamma(C_i^-) = C_i^+$ になるようなものとする. Δ をこれらの crooked plane で囲まれた単連結領域としたとき, G の基本領域は Δ となる.

これは定理 5.4 の crooked plane における類似である.

したがって, $C^- \cap C^+ = \emptyset$ となるような 2 つの crooked plane の作り方を調べれば, 基本領域を調べることに繋がる. そのためにいくつか道具を定義する.

まず **crooked half space** を定義しよう. crooked plane は $\mathbb{E}^{2,1}$ を二分割する. そのうち一方の半空間を crooked half space と定義するのだが, その決定には次の道具を用いる.

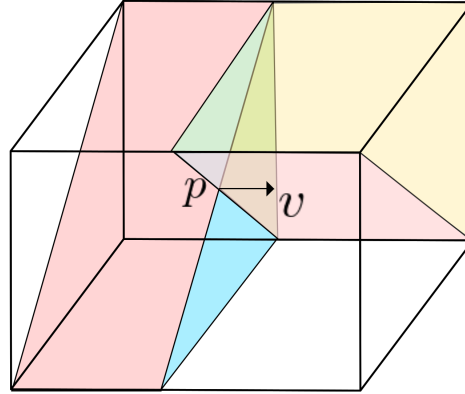
Definition 6.2. ([3], Definition3.16) $v \in \mathbb{R}^{2,1}$ を spacelike なベクトル, $p \in \mathbb{E}^{2,1}$ とする. このとき, **stem quadrant** $Q(p, v)$ とは,

$$Q(p, v) = \{p + av^- - bv^+ \in \mathbb{E}^{2,1} ; a, b \geq 0\}$$

で定義される三角形領域である.

Definition 6.3. ([3], Definition3.17) $C(p, v)$ の補集合であり, $Q(p, v)$ を含む方を **crooked half space** といい, $H(p, v)$ で表わす.

次の図において $Q(p, v)$ は緑色の領域で, $H(p, v)$ は薄黄色色の領域である.



Crooked half space もまた, spine と vertex から決定する. これより二つの disjoint crooked plane で, crooked half space も disjoint であるようなものを決定するためにいくつか道具を定義する.

Definition 6.4. ([3], Definition3.18) 2つの spacelike なベクトル $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{2,1}$ が **consistently oriented** であるとは, ある点 $p \in \mathbb{E}^{2,1}$ で

$$\overline{H(p, v_1)} \cap \overline{H(p, v_2)} = \{p\}$$

を満たすことである.

この定義は p の取り方によらないから, $p = 0$ として問題ない. 以降特に断りが無い限りは $p = 0$ とする.

Example 6.5.

$$v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は consistently oriented なベクトルの組である.

実は, consistently oriented な2つのベクトルの stem quadrant によって, 2つの crooked plane をどのように動かせば disjoint になるかが決定する.

Definition 6.6. ([3], Definition3.19) v_1, v_2 を consistently oriented で spacelike なベクトルの組とする．まず，2つの stem quadrant から作られる四角錐型の領域

$$\begin{aligned} P(v_1, v_2) &= \text{int}\{z_1 - z_2 \in \mathbb{R}^{2,1} ; z_1 \in Q(0, v_1), z_2 \in Q(0, v_2)\} \\ &= \{a_1 v_1^- - b_1 v_1^+ - a_2 v_2^- + b_2 v_2^+ ; a_i, b_i > 0 \quad (i = 1, 2)\} \end{aligned}$$

を stem quadrant pyramid と定義する．また， v_1, v_2 に対する allowable pair の集合を

$$AP(v_1, v_2) = \{(z_1, z_2) \in Q(0, v_1) \times Q(0, v_2) ; z_1 - z_2 \in P(v_1, v_2)\}$$

と定義する．

ここで次の定理を使うことで disjoint な crooked plane を作ることができる．

Theorem 6.7. ([6], Theorem1.42) v_1, v_2 を consistently oriented で spacelike なベクトルの組とする． $p \in \mathbb{E}^{2,1}$, z_1, z_2 を $p + z_i \in Q(p, v_i)$ ($i = 1, 2$) なるベクトルとする．このとき， $C(p + z_i, v_i) \subset \overline{H(p, v_i)}$ である．また， $(z_1, z_2) \in AP(v_1, v_2)$ であるとき， $C(p + z_1, v_1) \cap C(p + z_2, v_2) = \emptyset$ ．

これは，vertex で重なっている2つの crooked plane を上手くほどくと disjoint にできるというイメージである．

Example 6.8. 双曲的な affine 変換からなる巡回群 $G = \langle \gamma \rangle < \text{Isom}(\mathbb{E}^{2,1})^0$ の基本領域を具体的に考えてみよう．具体的に，

$$\gamma \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする．linear part の固有値は $\frac{1}{2}, 1, 2$ である．このとき固有値 1 に対する固有ベクトルは

$$s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であり，

$$s^\perp = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

である．

$$v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = -L(\gamma)(v_1) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

とする。ただし、 $L: \text{Isom}(\mathbb{E}^{2,1})^0 \rightarrow SO(2,1)^0$ は affine 変換の linear part への射影である。実は v_1, v_2 は consistently oriented なベクトルの組となっている。

次に、 $AP(v_1, v_2)$ を調べよう。 v_1^\perp を調べることによって、

$$v_1^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{35} \\ 6 \end{pmatrix}, v_1^- = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{35} \\ 6 \end{pmatrix}$$

がわかり、 v_2^\perp を調べることによって、

$$v_2^+ = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5} \\ 3 \end{pmatrix}, v_2^- = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{5} \\ 3 \end{pmatrix}$$

がわかり。よって、 $AP(v_1, v_2)$ を調べることができた。次に、 $(z_1, z_2) \in AP(v_1, v_2)$ を

$$z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、 $\gamma(z_1) = z_2$ であり、かつ定理から $C(z_1, v_1) \cap C(z_2, v_2) = \emptyset$ である。したがって γ の作用により $C(z_1, v_1)$ は disjoint な crooked plane $C(z_2, v_2)$ へと移る。

7 Ein³ における crooked plane

次に Ein³ における crooked plane として crooked surface という概念を導入する。まずは incident でない、すなわち同じ photon 上にない 2 点 p_0, p_∞ をとり、その後 $L(p_0) \cap L(p_\infty)$ で定義される spacelike circle から異なる 2 点をとってくる。この 4 点を stem configuration あるいは torus data という。この 4 点から上手く stem と wing を定義することができる。これを crooked surface といい、Minkowski crooked plane の Einstein 宇宙における一般化となっている。すなわち、Minkowski crooked plane を Einstein 宇宙に埋め込んで閉包をとったものは crooked surface となっている。

まずは Minkowski crooked plane を Einstein 宇宙へと埋め込んで閉包をとって得られる最も基本的な crooked surface を通して、その性質をつかんでいく。

筆者は [1],[2],[10] を通して crooked surface を学習した。この節は主に上記論文を参考に執筆されている。

7.1 最も簡単な例

Minkowski crooked plane $C(p, v) \subset \mathbb{E}^{2,1}$ を Ein^3 に埋め込み, その閉包を取るこ
とから考えていこう. これを $\overline{C(p, v)}$ と表す. この $\overline{C(p, v)}$ について, 次の定理の
証明を通して見ていこう.

Theorem 7.1. ([1], Theorem 8.3.1) $\overline{C(p, v)} \subset \text{Ein}^3$ は位相多様体であり, Klein の
壺に同相である. また, $\overline{C(p, v)}$ の $\widehat{\text{Ein}^3}$ への持ち上げは, $\overline{C(p, v)}$ の二重被覆であ
り, トーラスに同相である.

Proof. $\text{Isom}(\mathbb{E}^{2,1})$ が crooked plane の集合に推移的に作用することから, 1 つの
crooked plane を考えれば十分であった. よって C は先ほどの節で定義した crooked
plane とする. すなわち,

$$p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

としておく. $\mathbb{E}^{2,1} \rightarrow \mathfrak{N}^{3,2}$ の埋め込みを以前のチャプターで用いたもので定める.
すなわち,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}^{2,1} & \longrightarrow & \mathfrak{N}^{3,2} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ x^2 + y^2 - z^2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

とする. ここで

$$p_0 := \iota(p) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, p_\infty := I_{\mathcal{S}}(p_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

としておく.

それでは, C の各部分の閉包がどのようなになっているかを考えよう.

1. Stem $S(p, v)$

stem の内部から考える. これはすなわち, $p \in \mathbb{E}^{2,1}$ を通り v と直交する time-

like な測地線上の点の全体である.

$$\begin{aligned} \text{int } S(p, v) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}; y^2 - z^2 < 0 \right\} \\ &\hookrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \\ y^2 - z^2 \\ 1 \end{bmatrix}; y^2 - z^2 < 0 \right\} \subset \text{Ein}^3 \end{aligned}$$

である. ここで,

$$\begin{cases} y = r \sinh \theta \\ z = r \cosh \theta \end{cases}$$

と置換を行う.

すると, 上の集合は

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ r \cosh \theta \\ r \sinh \theta \\ -r^2 \\ 1 \end{bmatrix}; r \neq 0 \right\} \subset \text{Ein}^3$$

となる. この集合を Ein^3 で閉包をとろう.

まずは r, θ に関する極限を考える. すると, 斉次座標で

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ r \cosh \theta \\ r \sinh \theta \\ -r^2 \\ 1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 0 \\ r \cosh \theta \\ r \sinh \theta \\ -r^2 \\ 1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 0 \\ r \cosh \theta \\ r \sinh \theta \\ -r^2 \\ 1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\theta \rightarrow -\infty} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで,

$$p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とする。これはそれぞれ ideal point である。

また境界には, $i = 1, 2$ に対して p_0, p_i と p_∞, p_i を通る photon も現れ, この photon は一意的に決定する。

まず, p_0, p_1 通る photon は l^+ を埋め込んで閉包をとったもので, p_0, p_2 を通る photon は l^- を埋め込んで閉包をとったものである。ただし, l^+, l^- は $S(p, v) \subset \mathbb{E}^{2,1}$ の境界に現れる lightlike な直線である。実際,

$$l^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -s \\ s \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\hookrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -s \\ s \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; s \in \mathbb{R} \right\} \subset \text{Ein}^3$$

であり, これは $s = 0$ のとき p_0 に対応する。また $s \rightarrow \pm\infty$ を考えると, その極限は p_1 である。 l^- についても同様であるから, 省略する。ここで

$$\phi_1 := \overline{\iota(l^+)} = \iota(l^+) \cup \{p_1\},$$

$$\phi_2 := \overline{\iota(l^-)} = \iota(l^-) \cup \{p_2\}$$

としておく。

次に, p_∞, p_1 を通る photon は l^+ を埋め込んで閉包をとったものの inversion による像で, p_∞, p_2 を通る photon は l^- を埋め込んで閉包をとったものの inversion による像である。実際,

$$\iota(l^+) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -s \\ s \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; s \in \mathbb{R} \right\} \subset \text{Ein}^3$$

であり, これは $s = 0$ のとき p_∞ に対応する. また $s \rightarrow \pm\infty$ を考えると, その極限は p_1 である. したがって, l^- についても同様であるから, 省略する. ここで,

$$\begin{aligned}\psi_1 &:= \overline{I_{\mathcal{I}}\iota(l^+)} = I_{\mathcal{I}}\iota(l^+) \cup \{p_1\}, \\ \psi_2 &:= \overline{I_{\mathcal{I}}\iota(l^-)} = I_{\mathcal{I}}\iota(l^-) \cup \{p_2\}\end{aligned}$$

としておく.

したがって,

$$\overline{\iota(S(p, v))} = \iota(S(p, v)) \cup \psi_1 \cup \psi_2 \subset \text{Ein}^3$$

である.

各 i に対して, ψ_i と ϕ_i は inversion $I_{\mathcal{I}}$ で移りあう.

2. Wing $W^+(l^+)$, $W^+(l^-)$

$W^+(l^+)$ について, $W^+(l^+) \cup l^+$ を埋め込む. この方が考えやすいためである.

$$W^+(l^+) \cup l^+ = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \end{pmatrix}; 0 \leq x \right\} \mapsto \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \\ x^2 \\ 1 \end{pmatrix}; 0 \leq x \right\}$$

Ein^3 における閉包をとろう. これもまずは stem の場合と同様に極限を考えればよい. $\iota(l^+)$ の極限は p_1 である. 次に, y を固定して x に関する極限を考えると, 極限は p_∞ である. したがって, 境界には p_∞, p_1 を通る photon ψ_1 も現れる. 以上から,

$$\overline{\iota(W^+(l^+))} = \iota(W^+(l^+)) \cup \phi_1 \cup \psi_1 \subset \text{Ein}^3$$

である.

同様にして,

$$W^+(l^-) \cup l^- = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix}; x < 0 \right\} \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \\ x^2 \\ 1 \end{pmatrix}; x \leq 0 \right\}$$

である. $\iota(l^-)$ の極限は p_2 であり, y を固定した x に関する極限は p_∞ であるから, 境界には p_∞, p_2 を通る photon ψ_2 も現れる. 以上から,

$$\overline{\iota(W^+(l^-))} = \iota(W^+(l^-)) \cup \phi_2 \cup \psi_2 \subset \text{Ein}^3$$

である.

以上から, crooked surface \overline{C} は次のように定義されると分かる.

$$\overline{C} = \iota(C(p, v)) \cup \psi_1 \cup \psi_2$$

したがって,

$$\overline{C} \setminus C = \psi_1 \cup \psi_2$$

である.

つまり, \overline{C} は次のような部品に分解することができる.

1. 4つの点 vertex p_0 , improper point p_∞ , ideal point p_1, p_2 .
2. 8つの線分 $\phi_i \setminus \{p_0, p_i\}$, $\psi_i \setminus \{p_\infty, p_i\}$ ($i = 1, 2$).
3. $W^+(l^+)$, $W^+(l^-)$ の内部.
4. $S(p, v)$ の内部.

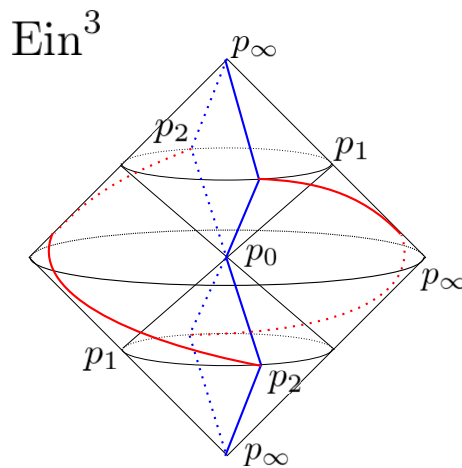
また, 元の crooked plane は

$$\{p_0\} \cup (\phi_1 \setminus \{p_1\}) \cup (\phi_2 \setminus \{p_2\}) \cup \text{int}(W_1) \cup \text{int}(W_2) \cup \text{int}(S(p, v))$$

とも表すことができる.

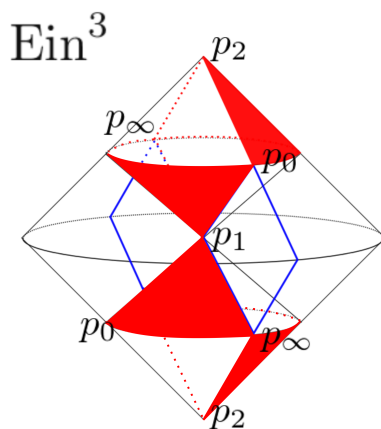
crooked surface \overline{C} は図を描くと, 次のようになっている.

1. p_0 を中心に見た図



ただし, p_∞ を中心に見ても同様の図が描ける.

2. p_1 を中心に見た図



ただし, p_2 を中心に見ても同様の図が描ける.

図から, \bar{C} にうまく座標系を張れることは明らかであるが, 次のページからは厳密な証明を行う. 興味がなければ読み飛ばしてもよい.

まず C は \mathbb{R}^2 に同相であるから, 明らかに位相多様体である. 丁寧に座標系を定めるならば, 次のようにやればよい.

C は次の図のように模式的に表すことができる.

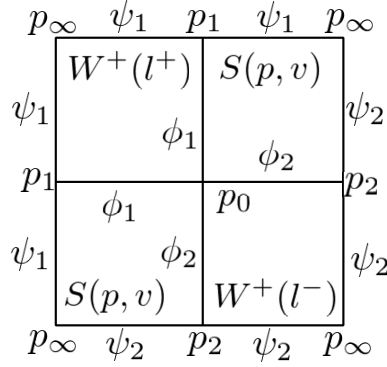
$W^+(l^+)$	$S(p, v)$
ϕ_1	ϕ_2
ϕ_1	p_0
ϕ_2	$W^+(l^-)$
$S(p, v)$	

どのように座標系が貼られるかを確認しておこう. $\text{int}(W^+(l^\pm))$ と $\text{int}(S)$ の各面には普通に \mathbb{R}^2 を貼ればよい. 次に, $\text{int}(\phi_i)$ においては, $S, W^+(l^\pm)$ のそれぞれの方向への半円が座標近傍となる. 最後に, p_0 においては, 4つの象限への $\frac{1}{4}$ サイズの円が座標近傍となる. よって, C 上に座標系を上手く定めることができた.

次に, \bar{C} が位相多様体であることを示そう. 同様に, \bar{C} における展開図は次のように表すことができる.

これは C 上で存在しなかった部分においてうまく座標近傍をとればよい.

まず, p_∞ と $\text{int}(\psi_i)$ ($i = 1, 2$) においては先ほど定めた座標近傍の inversion を考えればよい.



次には ideal point p_1, p_2 の周りの座標近傍を定める．まずは p_1 から考えよう． p_1 の周りの様子を調べるために

$$\begin{cases} t = y - z \\ w = y + z \end{cases}$$

と座標変換を行う．この座標変換のもとで， t, w 軸の方向ベクトルは lightlike なベクトルとなる．これは y 軸方向のベクトルは spacelike であり， z 軸方向のベクトルは timelike である．それらを $\pi/4$ 回転させることで lightlike にするというイメージである． $t \neq 0$ として，

$$\xi := \frac{x}{t}, \eta := \frac{y}{t}, \omega := \frac{w}{t}, \nu := \frac{u}{t}, \nu := \frac{v}{t}$$

と定めると，null cone は $\omega = -\xi^2 + \nu\nu$ で定義される．

まず， $(\xi, \nu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ は p_1, ϕ_1, ψ_1 を被覆する．実際， $(\xi, \nu, \nu) = (0, 0, 0)$ のとき， $x = w = v = u = 0$ であるから， $y = -z$ である．よって，斉次座標で p_1 に対応する．同様に， ϕ_1, ψ_1 はそれぞれ $\xi = \nu = 0, \xi = \nu = 0$ に対応している．

次に，この被覆は $S(p, v), W_1$ と交わる．実際， $S(p, v)$ は $\xi = 0, \omega \leq 0$ の場合であり， W_1 は $\xi \leq 0, \omega = 0$ に対応している．計算方法は先ほどと同様である．

W_1 上で $\xi^2 = \nu\nu \geq 0$ だから，この被覆の中で W_1 は $\nu > 0$ かつ $\nu > 0$ であるか， $\nu < 0$ かつ $\nu < 0$ の二つの成分に分かれる．よってこの (ν, ν) は p_1 の W_1 方向の座標近傍となっている．同様に， $S(p, v)$ においても， $\omega = \nu\nu \leq 0$ より，2つの成分に分かれ， (ν, ν) が p_1 の $S(p, v)$ 方向の座標近傍となっている以上で p_1 の周りの座標近傍が構成できた．

p_2 の周りを考えるときは， $w \neq 0$ を考えればよい．以上から \bar{C} の周りの座標近傍が定義できたから， \bar{C} は位相多様体である．

(読み飛ばした人はここから)

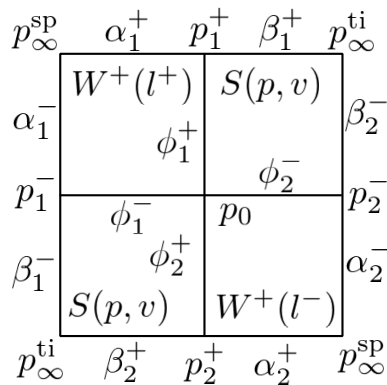
次に \bar{C} が Klein の壺に同相であることを示そう． \bar{C} は4つの点と8つの線分と4つの面から成る閉曲面である．よってその Euler 数は， $\chi(\bar{C}) = 4 - 8 + 4 = 0$ であるから， \bar{C} は Klein の壺かトーラスに同相である．ではこの \bar{C} が向き付け可能でないことを示そう．

$W^+(l^+)$	$S(p, v)$
ψ_1	ϕ_1
p_1	ψ_1
$S(p, v)$	$W^+(l^+)$

W_1 上の lightlike な直線 $\phi_1 \setminus p_1$ を考える．その直線を W_1 上の lightlike な直線であって， $\phi_1 \setminus p_1$ と交わらないような直線 l へと平行移動する．その閉包を考えると， \bar{l} と ϕ_1 は p_1 で1度だけ交叉する．よって， ϕ_1 の自己交点数は1であり，これは ϕ_1 の周りに Möbius の帯に同相な近傍が取れることを意味しているから， \bar{C} は向き付け可能でない．したがって， \bar{C} は Klein の壺に同相である．

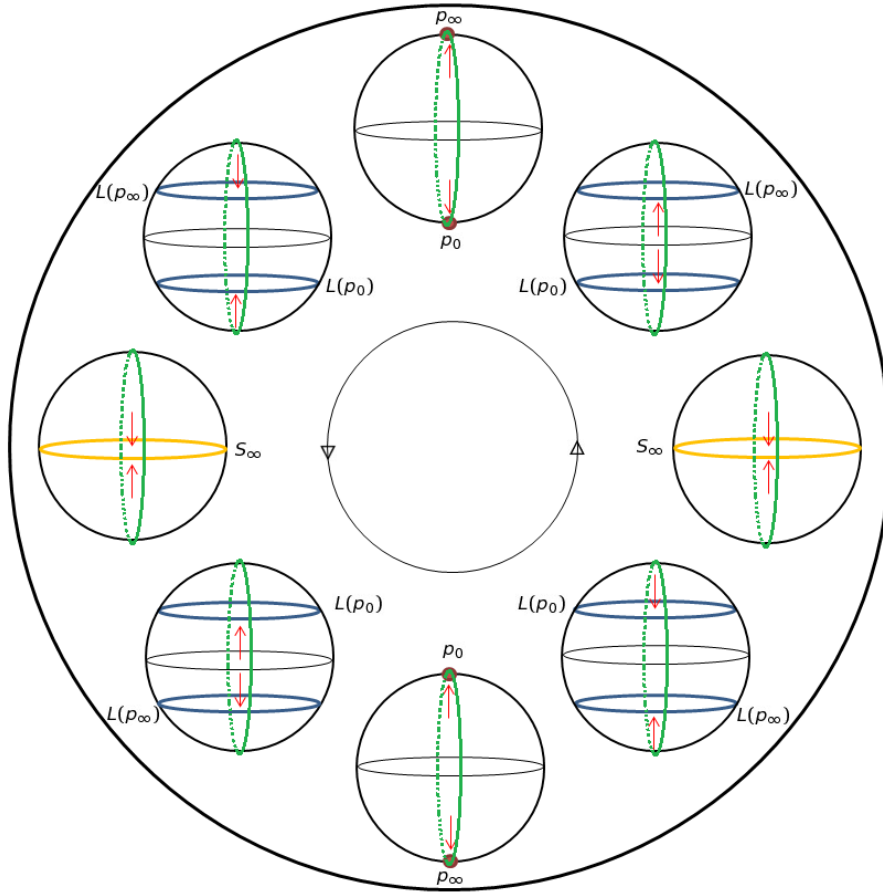
では次に $\widehat{\text{Ein}}^3$ を考えよう． $C \in \mathbb{E}^{2,1}$ を片方の Minkowski patch に埋め込んで，その閉包を考えよう． $\bar{C} \subset \widehat{\text{Ein}}^3$ は次のように分解される．

1. 7つの点 $p_0, p_\infty^{\text{sp}}, p_\infty^{\text{ti}}, p_1^\pm, p_2^\pm$.
2. 12つの線分 $\phi_i^\pm, \alpha_i^\pm, \beta_i^\pm$ ($i = 1, 2$).
3. 2つの wing の閉包.
4. 2つの stem の成分.



これらを antipodal map を用いてもう1つの patch へと移してやれば，元の $\bar{C} \subset \widehat{\text{Ein}}^3$ と合わせて $\bar{C} \subset \widehat{\text{Ein}}^3$ の二重被覆への持ち上げが完成する．最後に， $\widehat{\text{Ein}}^3$ において crooked surface の持ち上げは次のページの図の緑線のようにになっている．

したがって， \bar{C} の $\widehat{\text{Ein}}^3$ への持ち上げはトーラスに同相である． \square



Remark 2. \bar{C} が Klein の壺に同相であることは $\widehat{\text{Ein}}^3$ における crooked plane の貼り合わせを直接計算することによっても証明可能である．その際は antipodal map を用いてそれぞれの photon がどのような向きで貼り合わされるかを調べればよい．

7.2 Torus data

この節の内容は [2], §3.5 を参考に執筆した．

より一般に crooked surface は Ein^3 にうまい 4 点を取ってくることによって定義できる．Incident でない 2 点 $p_0, p_\infty \in \text{Ein}^3$ に対し， $L(p_0) \cap L(p_\infty)$ は spacelike circle となっている．この spacelike circle から異なる二点 p_1, p_2 を取る．こうして定まる 4 点を **torus data** または **stem configuration** といい

$$\mathcal{D} = \{p_0, p_\infty; p_1, p_2\}$$

で表す．

では stem configuration から crooked surface を実際に作ってみよう．まずは stem を定義する．

$$\kappa: \text{Ein}^3 \setminus L(p_\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$$

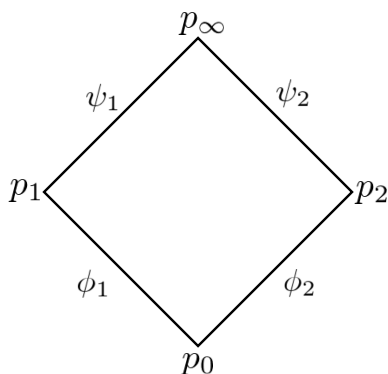
を Ein^3 からうまく Minkowski patch を作りだす conformal な写像とする。そして、

$$T(p_0) = \{q \in \text{Ein}^3 \setminus L(p_\infty) ; \kappa(q) - \kappa(p_0) \text{ が timelike}\}$$

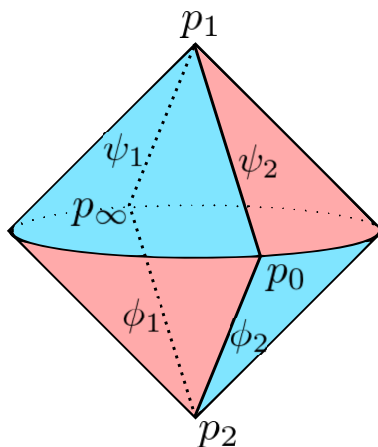
を、 p_0 を錐とするような affine lightcone の中身に対応する Ein^3 の点とする。 $\{p_0, p_\infty\}$ の対称性から、 $T(p_0) = T(p_\infty)$ であり、これを $T(\mathcal{D})$ で表すとする。

次に、 $\text{Ein}^2(\mathcal{D})$ を 4 点 p_0, p_∞, p_1, p_2 を通る Einstein hypersphere とする。 Stem は $S(\mathcal{D}) = \text{Ein}^2(\mathcal{D}) \cap T(\mathcal{D})$ として定義できる。

次に、 wing について考えよう。各点どうしを繋ぐ photon を次の図のように定義する。



$p_0, p_\infty \in L(p_1) \cap L(p_2)$ であり、 $i = 1, 2$ に対して $L(p_i)$ は ϕ_i, ψ_i によって 2 つの half cone に分割される。この分割によって、4 つの half cone が現れる。ここから wing として 2 つの half cone を、その閉包が p_0, p_∞ 以外で交わらないように選ぶ。



選んだ half cone を κ を用いて Minkowski patch に移してやると、これは確かに wing となっている。

Example 7.2. 上記の構成方法から crooked surface を構成してみる。

$$p_0 = [0 : 0 : 0 : 0 : 1]$$

$$p_\infty = [0 : 0 : 0 : 1 : 0]$$

とすると, $L(p_0) \cap L(p_\infty)$ は ideal circle となっている. 実際,

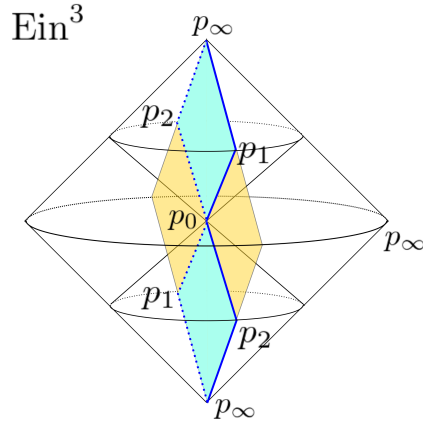
$$L(p_0) \cap L(p_\infty) = \{[0 : \cos \theta : \sin \theta : 0 : 0] \in \text{Ein}^3 ; \theta \in \mathbb{R}\}$$

である. ここで,

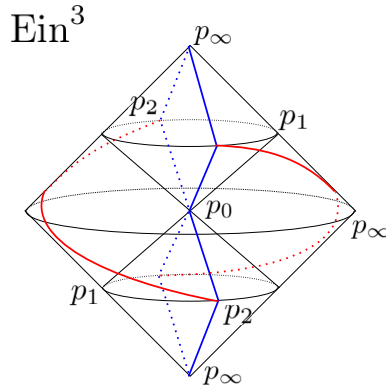
$$p_1 = [0 : 1 : 1 : 0 : 0]$$

$$p_2 = [0 : 1 : -1 : 0 : 0]$$

とすると, $T(\mathcal{D}), \text{Ein}^2(\mathcal{D})$ とそこから定まる stem は次の図のようになる. ただし, 色のついた領域は p_0, p_∞, p_1, p_2 を通る $\text{Ein}(\mathcal{D})$ であり, $T(\mathcal{D})$ との交わりは水色の領域である.



また wing についても f_1, p_1, p_2 を含む平面および f_2, p_1, p_2 を含む平面を考えればよい. positively oriented ならば, 先ほど定義した crooked surface のようになる.



8 AdS crooked plane

この節では $\text{AdS}^3 \cong PSL(2; \mathbb{R})$ やその Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R}) \cong \mathbb{E}^{2,1}$ を考察し, AdS-crooked plane について確認していく. この節は主に [5],[10] を参考に執筆した.

まず、定義から与えよう。

Definition 8.1. ([10], §2.4.3) g を AdS^3 上の点とし, $\mathfrak{s} \in T_g \text{AdS}^3$ を spacelike なベクトルとする. このとき, **AdS-crooked plane** $\mathbf{C}(g, \mathfrak{s})$ とは, $T_g \text{AdS}^3 \cong \mathbb{E}^{2,1}$ における Minkowski crooked plane $C(0_g, \mathfrak{s})$ を $PSL(2; \mathbb{R})$ の指数写像で移した集合である. すなわち,

$$\mathbf{C}(g, \mathfrak{s}) = \exp(C(0_g, \mathfrak{s}))$$

である.

しかしこの定義だけでは AdS-crooked plane の具体的な形が見えにくいので, $\text{AdS}^3 \cong PSL(2; \mathbb{R})$ における測地線や全測地的な平面の考察を通して, 理解していくことにする.

まずは $\text{AdS}^3 \cong PSL(2; \mathbb{R})$ が Lorentz 対称空間であることを示そう. ただし, Lorentz 対称空間とは, Lorentz 多様体 X で, 各点 $p \in X$ に対して等長写像 ι で, その微分写像が $d\iota_p = -\text{id}$ となるものが存在しているようなものであった. この ι_p を $p \in X$ における symmetry と言う.

Lemma 8.2. ([10], §2.1.3) $\text{AdS}^3 \cong PSL(2; \mathbb{R})$ は Lorentz 対称空間である.

Proof. $\text{AdS}^3 \cong PSL(2; \mathbb{R})$ の単位元 e における symmetry は, 群の inversion である. すなわち,

$$\begin{aligned} \iota_e: PSL(2; \mathbb{R}) &\longrightarrow PSL(2; \mathbb{R}) \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

である. ι_e は $T_e(\text{AdS}^3) \cong \mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ 上で $-\text{id}$ であることを示そう. $\xi \in \mathfrak{sl}(2; \mathbb{R}), t \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\iota_e \exp(th) = \exp(-th)$$

である. これを $t = 0$ で微分して,

$$\frac{d}{dt} \exp(-th)|_{t=0} = -h$$

であるので, $d\iota_e h = -h$ となる. また, 任意の $g \in \text{AdS}^3$ においても ι_e が等長写像となっていることは実際に微分写像を計算することで容易に示すことができる. \square

一般に $g \in PSL(2; \mathbb{R})$ における symmetry は

$$\iota_g: x \mapsto g \iota_e(g^{-1}x) = gx^{-1}g$$

と表すことができる.

では指数写像から作られる測地線や全測地的な平面の様子を観察しよう. 具体的には, spacelike, timelike, null の3つの種類の測地線と timelike, null な2つの種類の平面を順番に考察していく.

まず, AdS^3 の測地線は $PSL(2; \mathbb{R})$ の 1 係数部分群の左剰余類または右剰余類である. すなわち, $g \in PSL(2; \mathbb{R})$ を通る任意の測地線は $\xi \in \mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ に対し,

$$g \exp(t\xi) \text{ または } \exp(t\xi)g$$

で表すことができる. したがって, まずは Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R}) \cong T_e(\text{AdS}^3)$ について紹介し, 議論を展開していく.

8.1 $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$

この節の内容は [10], §2.2.1 を参考に執筆した.

まずは $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R}) \cong T_e(\text{AdS}^3) \cong \mathbb{R}^{2,1}$ について述べよう. 次の対応が存在している.

$$\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2,1}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ \frac{b+c}{2} \\ \frac{b-c}{2} \end{pmatrix}$$

この対応による $\mathbb{R}^{2,1}$ 上の quadric form は $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ においてどう書けるかを考えよう. 以前, $\mathbb{R}^{2,2} \leftrightarrow M(2; \mathbb{R})$ の対応を作ったとき, $\mathbb{R}^{2,2}$ の quadric form は, $M(2; \mathbb{R})$ において, 対応する元を A としたとき $-\det A$ であったことを思い出そう. すると, e における接空間においても quadric form は同様に入るから,

$$\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$A \longmapsto -\det A = \frac{1}{2} \text{tr}(A^2)$$

と対応する. $\mathbb{R}^{2,1}$ に対応する $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ の計量を $\langle A, B \rangle$ と書くとする.

また, $\mathbb{R}^{2,1}$ の標準基底に対応する $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ の基底は次の 3 つ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Example 8.3. ([10], §2.3.1) まず e を通る timelike な測地線全体を求めよう. 最も簡単な場合として, timelike なベクトル

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$$

から作られる測地線を考えて,

$$\exp \left(t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

である。 e を通る測地線は $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ の 1 係数変換群として記述されるから、 e を通る測地線どうしは e のイソトロピー群 H による作用で移り合う。ただし、

$$H = \{(g, g) \in G^0 ; g \in PSL(2; \mathbb{R})\}$$

である。

よって、 e を通る timelike な測地線全体の集合は、

$$\left\{ h \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} h^{-1} ; t \in \mathbb{R}, h \in PSL(2; \mathbb{R}) \right\}$$

である。 より一般に、 $g \in \text{AdS}^3$ を通る timelike な測地線全体は、

$$\left\{ gh \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} h^{-1} ; t \in \mathbb{R}, h \in PSL(2; \mathbb{R}) \right\}$$

で記述される。

8.2 全測地的な平面

$g \in \text{AdS}^3$ における接空間 $T_g \text{AdS}^3$ の 2 次元部分空間の指数写像による像は AdS^3 において全測地的な部分多様体となっている。 その 2 次元部分空間が timelike, null の場合についてそれぞれ考察を行う。

部分空間について考察を行う前に、 AdS^3 に \mathbb{H}^2 を埋め込もう。 これは全測地的で spacelike な曲面となっている。 ([10], §2.3.1)

$PSL(2; \mathbb{R})$ における involution を考えよう。 ただし、 involution とは $g^2 = e$ となるような $PSL(2; \mathbb{R})$ の元であり、 トレースが 0 になるようなものとして特徴づけられる。 したがって $PSL(2; \mathbb{R})$ の involution の集合 Inv は

$$h \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} h^{-1}$$

の $t \equiv 0, \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ のときの集合によって与えられる。

つまり、

$$\text{Inv} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, h \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} h^{-1} ; h \in H \right\}$$

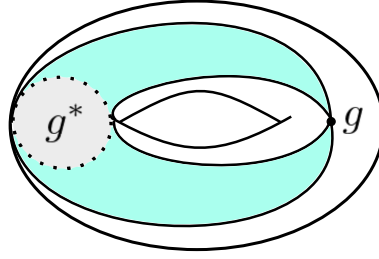
$\widehat{\text{AdS}^3} \cong SL(2; \mathbb{R})$ においては、 $t \equiv 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi}$ である。 このとき $g \in \text{AdS}^3$ に対し、 g^* を

$$g^* := g \text{Inv} = \text{Inv} g$$

で定義する。 すると、 これは \mathbb{H}^2 の等長的な埋め込みになっている。

青い部分は g を通る timelike な測地線全体である。

AdS^3

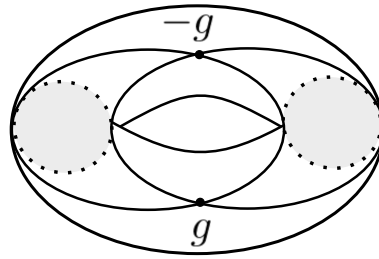


Remark 3. $SL(2; \mathbb{R}) \subset M(2; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2,2}$ と考えて,

$$g^* := (g^\perp \cap SL(2; \mathbb{R})) / \{\pm I\}$$

と定義することもできる.

$\widehat{\text{AdS}}^3$



Example 8.4. $g = e$ の場合を考えよう. このとき, \mathbb{H}^2 は

$$e^* = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} ; a^2 + bc = 0 \right\}$$

である. これを次のように埋め込むと, 等長的な埋め込みとなっている.

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^2 &\hookrightarrow PSL(2; \mathbb{R}) \\ x + iy &\mapsto \pm \frac{1}{y} \begin{pmatrix} x & -(x^2 + y^2) \\ 1 & -x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

それでは, $T_g \text{AdS}^3$ の 2次元部分空間で timelike, null なものの指数写像による像を考えよう.

1. ([10], §2.3.2)

$T_g \text{AdS}^3$ の (1, 1) 型部分空間の指数写像による像を **timelike plane** という. $PSL(2; \mathbb{R}) \times PSL(2; \mathbb{R})$ は $g \in \text{AdS}^3$ と $\mathfrak{s} \subset T_g(\text{AdS}^3)$ の組 (g, \mathfrak{s}) に推移的に作用する. したがって,

$$g = e, \mathfrak{s} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & s \\ t & 0 \end{pmatrix} ; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

としてよい。このとき、 $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ の指数写像による $SL(2; \mathbb{R})$ での像を計算すると、

$$\mathfrak{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} ; a^2 - bc = 1 \right\}$$

である。これは

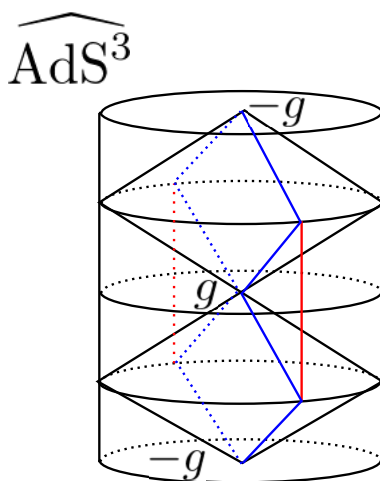
$$\begin{cases} b = x + y \\ c = x - y \end{cases}$$

と座標変換することで、

$$\mathfrak{S} \leftrightarrow \{(a, x, y); a^2 - x^2 + y^2 = 1\}$$

となり、これは $\widehat{\text{AdS}}^2$ と等長であるから、 $\{\pm I\}$ で割ることによって、 AdS^3 に AdS^2 が入っていることが分かる。

実際に図を書いてみると下の図のようになる。ただしこれは $\widehat{\text{AdS}}^3$ で描かれたものであり、 AdS^3 に移すには、上から $1/4, 3/4$ の部分で空間を切り、 π 回転ひねって貼り合わせればよい。



2. ([10], §2.3.3)

$T_g(\text{AdS}^3)$ の退化した 2 次元部分空間の指数写像による像を **null plane** という。Null plane の具体的な形について考えよう。

Example 8.5. 形を理解する上でのよいモデルに $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ の Borel 部分代数 \mathfrak{b} がある。具体的には

$$\mathfrak{b}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

あるいは

$$\mathfrak{b}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

がある。それぞれ計量を計算してみると α^2 となることから、確かに $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ は退化した平面となっている。 \mathfrak{b}_1 の指数写像による像は、

$$\exp(\mathfrak{b}_1) = \left\{ \begin{pmatrix} e^\alpha & \frac{\beta}{\alpha} \sinh(\alpha) \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R}^\times, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

である。 \mathfrak{b}_2 に対しても同様にして計算が可能である。

さて、 l を AdS^3 の null な測地線とする。このとき、 l に対して、ある null plane $P(l)$ が一意的に定まることを示そう。

任意の $g \in l$ に対して、 $T_g l \subset T_g \text{AdS}^3$ であるから、 $T_g l^\perp \subset T_g \text{AdS}^3$ は退化した二次元部分空間である。したがって、 $P(g, l) = \exp_g(T_g l^\perp)$ と表せる。

次に、この $P(g, l)$ は $g \in l$ の取り方によらず一意に定まることを示す。そのためには transvection という道具を使う。以下に定義を述べよう。

Definition 8.6. ([12], Definition8.29) M を対称空間、 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ を測地線とする。 γ に沿った t の transvection とは、 M 上の等長写像の 1 係数変換群 $\Phi_\gamma(t)$ であって、次の 2 つの条件を満たすものである。

- (a) $\Phi_\gamma(t): \gamma(s) \mapsto \gamma(s+t)$
- (b) $(d\Phi_\gamma(t))_{\gamma(s)}: T_{\gamma(s)}M \rightarrow T_{\gamma(s+t)}M$ は γ に沿った接ベクトルの平行移動を与える。

簡単に言えば、測地線に沿って接空間を移動させるような写像だと考えればよい。 transvection について、次の性質が成立している。

Lemma 8.7. ([12], Lemma8.30) γ を対称空間 M における測地線とし、 ζ_s を $\gamma(s)$ における M の symmetry とする。このとき、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、 $\zeta_{t/2}\zeta_0$ は γ に沿った t の transvection である。

この補題を用いると、 AdS^3 の測地線 $\exp(t\xi)$ に沿った transvection を以下で与えることができる。

$$\begin{aligned} \Phi_\gamma(t): \text{AdS}^3 &\longrightarrow \text{AdS}^3 \\ x &\mapsto \exp\left(\frac{t}{2}\xi\right)x \exp\left(\frac{t}{2}\xi\right) \end{aligned}$$

では、この $P(g, l)$ は $g \in l$ の取り方によらず一意に定まることを示そう。

Timelike の場合と同様, Borel 部分代数の場合で示せば十分である.

$$\exp(\mathfrak{b}_1) \subset PSL(2; \mathbb{R})$$

であるから, $-e$ 成分もまとめて考えて, null plane は

$$P(e, l) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R} \right\}$$

と表すことができる. ただし, この null plane を決定する測地線 l は

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である.

この測地線に沿った $s \in \mathbb{R}$ の transvection は

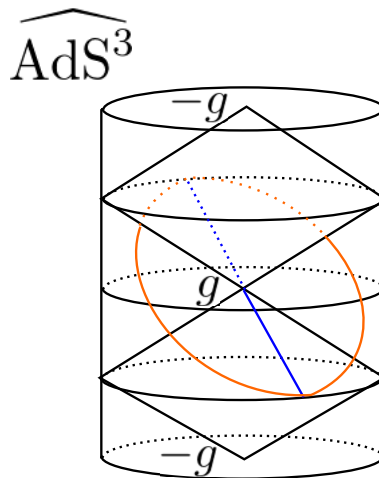
$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \frac{s}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & \frac{s}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である. したがって, null plane 上の点に対し,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{s}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{s}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b + (\frac{a+a^{-1}}{2})t \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

であり, 右辺もまた $P(e, l)$ 上の点である. したがって, transvection によって平面を移動させても null plane は変化しないから, 測地線上のどの点を取っても null plane は一意的に定まる.

実際に図を書いてみると下の図のようになる.



8.3 AdS-crooked plane の具体的構成

この節の内容は [10], §2.4 による.

それでは, $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R}) \cong \mathbb{E}^{2,1}$ の Minkowski crooked plane の指数写像による像の形を具体的に調べよう.

AdS^3 の点を g , $T_g \text{AdS}^3$ の spacelike なベクトルを \mathfrak{s} とする. このとき, \mathfrak{s}^\perp は timelike な二次元平面であるから, $\exp \mathfrak{s}^\perp$ は全測地的な timelike plane である. ここで **Stem** $S(g, \mathfrak{s})$ を $\exp \mathfrak{s}^\perp$ の spacelike でない測地線全体で定義する. $S(g, \mathfrak{s})$ で g を通る 2 本の null な測地線を **hinges**, timelike な測地線を **particle** という. Hinges をそれぞれ h_1, h_2 と表しておく. それぞれの測地線から null plane は一意的に定まる. ここから **wing** $W_i := W(h_i)$ を選ぼう. 構成方法としては Minkowski crooked plane の話を AdS^3 の場合で考えるだけである.

$P(h_i) \setminus h_i$ は 2 つの半空間によって構成されている. ここから一方を wing として選ぼう. まず AdS^3 は向き付け可能だから $T_g \text{AdS}^3$ 上の体積形式 \det が定まる. また, 時間的向き $\text{Cone}(x)$ を決めておく. ただし, x は timelike なベクトルとする. ここで u を h_i の接ベクトルで, $\text{Cone}(x)$ の閉包に含まれるものとし, v を u とは一次独立で $\text{Cone}(x)$ に含まれるベクトルとする. このとき,

$$\begin{aligned} W(h_i)^+ &:= \exp_g(\{w \in T_g P(l) ; \det(u, v, w) > 0\}), \\ W(h_i)^- &:= \exp_g(\{w \in T_g P(l) ; \det(u, v, w) < 0\}) \end{aligned}$$

によって wing を決定する.

つまり, 先ほどの例

$$P(l) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R} \right\}$$

だと, $a > 1, a < 1$ の空間がそれぞれ wing W^+, W^- に対応する.

以降, 特に断りがなければ $W(h_i) := W(h_i)^+$ とする.

したがって, AdS-crooked plane $\mathbf{C}(g, \mathfrak{s})$ は, 次のように定義される.

$$\mathbf{C}(g, \mathfrak{s}) = S(g, \mathfrak{s}) \cup W(h_1) \cup W(h_2)$$

そして, その **spine** σ は,

$$\sigma = \exp_g(\{t\mathfrak{s} ; t \in \mathbb{R}\})$$

と定義できる.

またこの定義から, AdS-crooked plane は $T_g \text{AdS}^3 \cong \mathbb{E}^{2,1}$ の Minkowski crooked plane $C(0_g, \mathfrak{s})$ の指数写像による像となっていることが分かる. すなわち,

$$\mathbf{C}(g, \mathfrak{s}) = \exp(C(0_g, \mathfrak{s}))$$

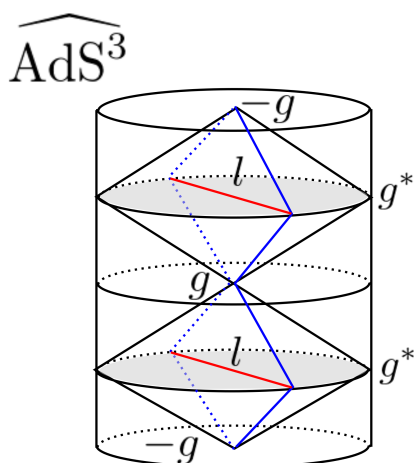
である.

また G_0 は (g, \mathfrak{s}) に推移的に作用するから, 全ての AdS-crooked plane は向きを保つ等長写像の作用で推移的に移りあう.

8.4 AdS-crooked plane の諸性質

先ほどは (g, \mathfrak{s}) の組から AdS-crooked plane を構成した. しかし, l を g^* 上の測地線としたとき, (g, l) から AdS-crooked plane が決定する. ([10], §2.4.1)

実際, l に対して, g を含むようなある timelike plane はただ一つ定まる. そして timelike plane はある spacelike な $T_g \text{AdS}^3$ のベクトルをスカラー倍を除いて一意に定める. よって, そのベクトルをうまく取れば AdS-crooked plane を定義することができる.



次に [5] における AdS-crooked plane $\mathbf{C}(e, l) := C(l)$ の定義を紹介しよう. これは, $PSL(2; \mathbb{R})$ の元のトレースによる分類の中で特定の性質をもつものを stem や wing とする定義である. 特に気にならなければ次の節まで飛ばしてもよい.

まず, e を通る timelike な測地線上の任意の点は, $t \in \mathbb{R}, h \in PSL(2; \mathbb{R})$ を用いて

$$h \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} h^{-1}$$

で表すことができた. これはいずれも楕円的な元である. 次に, e を通る lightlike な測地線上の点も同様に

$$h \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h^{-1}$$

と表すことができ, これはいずれも放物的な元である. また, e を通る spacelike な測地線上の点もまた

$$h \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} h^{-1}$$

と表すことができ、これは双曲的な元である。すなわち、次のような対応が存在している。

$$\begin{aligned} \{PSL(2; \mathbb{R}) \text{ の楕円的な元} \} &\longleftrightarrow \{\text{AdS}^3 \text{ の timelike で } e \text{ を通る測地線上の点} \}, \\ \{PSL(2; \mathbb{R}) \text{ の放物的な元} \} &\longleftrightarrow \{\text{AdS}^3 \text{ の lightlike で } e \text{ を通る測地線上の点} \}, \\ \{PSL(2; \mathbb{R}) \text{ の双曲的な元} \} &\longleftrightarrow \{\text{AdS}^3 \text{ の spacelike で } e \text{ を通る測地線上の点} \} \end{aligned}$$

では定義を見ていこう。

1. Stem $S(l)$ とは、 $PSL(2; \mathbb{R})$ の楕円的な元であって、その共役作用が l 上に固定点を持つようなもの全体である。 $S(l)$ の境界は放物的な元であって、 l の端点 $[v^+], [v^-]$ を固定するようなものである。
2. Wing $W(v^+), W(v^-)$ とは、双曲的な元 $h \in PSL(2; \mathbb{R})$ であり、その吸引不動点がそれぞれ $[v^+], [v^-]$ であるようなものである。ただし、 $[v^+]$ が吸引不動点であるとは $\lim_{n \rightarrow \infty} h^n(x) = [v^+]$ となることである。

Example 8.8. 最も簡単な例で確認してみよう。まず、次の埋め込みを思い出しておく。

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^2 &\hookrightarrow e^* \subset PSL(2; \mathbb{R}) \\ x + iy &\mapsto \pm \frac{1}{y} \begin{pmatrix} x & -(x^2 + y^2) \\ 1 & -x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

l を虚軸 $z = e^t i$ の埋め込み、すなわち

$$e^t i \mapsto l(t) = \begin{pmatrix} 0 & -e^t \\ e^{-t} & 0 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、

$$l(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

に対し、楕円的な元で $l(0)$ を固定するものを考える。任意の楕円的な元は

$$E = h \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} h^{-1}$$

と表すことができる。したがって

$$E l(0) E^{-1} = l(0)$$

を考えると $h = e$ がわかる。したがって $l(0)$ を固定するような元の全体は

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$$

であり、これはこれまで考えてきた timelike な測地線で自明なものに対応しており、これは $l(0)$ を通る。

以上から同様に考えていくと、各 t に対して $l(t)$ を固定する楕円的な元は、 $l(t)$ を通る timelike な測地線上の点だとわかる。よって、stem が上手く定義できている。

次に wing を調べよう。一方の wing だけ調べれば十分である。まず l の端点を計算し、

$$[v^+] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。任意の双曲的な元は

$$H = h \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} h^{-1}$$

である。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H^n = [v^+]$$

となるとき、 $h = e, \lambda > 1$ であり、これは wing に一致する。

8.5 $\widehat{\text{AdS}}^3$ への持ち上げ

実は $\widehat{\text{AdS}}^3 \cong SL(2; \mathbb{R})$ は Ein^3 へ埋め込むことができる。後々に AdS-crooked plane を $\widehat{\text{AdS}}^3 \cong SL(2; \mathbb{R})$ へ持ち上げて Einstein 宇宙へ埋め込むことを考えたいから、ひとまず $SL(2; \mathbb{R})$ の性質について述べよう。

まず、 $PSL(2; \mathbb{R}) = SL(2; \mathbb{R}) / \{\pm e\}$ あるから、その被覆変換は

$$\hat{g} \mapsto -\hat{g}$$

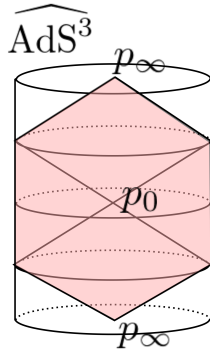
の変換を与える。

Proposition 8.9. ([10], §2.5) $\widehat{\text{AdS}}^3$ は測地的連結でないが、 AdS^3 は測地的連結である。

Proof. $\exp(\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R}))$ の $SL(2; \mathbb{R})$ における像は次のページの図のようになっている。よってこれは明らかに測地的連結でない。

しかし、 AdS^3 は上から $1/4$ の部分から $3/4$ の部分までであるので、測地的連結である。□

この命題の証明から、 $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ における Minkowski crooked plane の $SL(2; \mathbb{R})$ における指数写像の像は、被覆変換に対して不変でないことがわかる。そこで、次のようにして不変になるようにする。



AdS-crooked plane を C の二重被覆 $\widehat{\text{AdS}}^3 \rightarrow \text{AdS}^3$ による逆像を \widehat{C} とする。また, $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ の $SL(2; \mathbb{R})$ への指数写像を $\widehat{\exp}$ と書くとする, 明らかに

$$\begin{aligned} \widehat{C} &= \widehat{\exp}_{\hat{g}}(C) \cup -\widehat{\exp}_{\hat{g}}(C) \\ &= \widehat{\exp}_{\hat{g}}(C) \cup \widehat{\exp}_{-\hat{g}}(C) \end{aligned}$$

である。

9 AdS-crooked plane と crooked surface の対応

この節では埋め込み $\Psi: \widehat{\text{AdS}}^3 \hookrightarrow \text{Ein}^3$ を用いて AdS-crooked plane を Ein^3 へと埋め込む。この節は主に [10] を参考に執筆した。

AdS-crooked plane および crooked surface は crooked plane の拡張として別々に定義されたものであるが, AdS^3 の二重被覆 $\widehat{\text{AdS}}^3$ の Ein^3 への埋め込みを用いて AdS-crooked plane を埋め込んでやると, これは crooked surface となっている。また, 逆に involution に対して “適合した” crooked surface に対し, 対応する AdS-crooked plane が存在している。

まずは埋め込み $\Psi: \widehat{\text{AdS}}^3 \hookrightarrow \text{Ein}^3$ について見ていこう。

9.1 $\widehat{\text{AdS}}^3$ の Ein^3 への埋め込み

埋め込み $\Psi: \widehat{\text{AdS}}^3 \hookrightarrow \text{Ein}^3$ の具体的な形は次である。 ([10], §3.2)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto [a - d : b + c : b - c : a + d - 2 : a + d + 2]$$

Ψ を導出しよう。次の図式を参照にしながら議論を追うと分かりやすい。

$$\begin{array}{ccc}
 M(2; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2,2} & \hookrightarrow & \mathbb{R}^{3,2} \\
 \cup & & \cup \\
 SL(2; \mathbb{R}) \cong \widehat{\text{AdS}}^3 & \hookrightarrow & \mathfrak{N}^{3,2} \\
 & \searrow \Psi & \downarrow \\
 & & \text{Ein}^3
 \end{array}$$

まず、次の対応が存在していた。

$$M(2; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2,2} \\
 g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} \\ \frac{b+c}{2} \\ \frac{b-c}{2} \\ \frac{a+d}{2} \end{pmatrix}$$

ただしこの $\mathbb{R}^{2,2}$ は自然な計量を持つとする。次に $\mathbb{R}^{2,2}$ を自然な計量を持つ $\mathbb{R}^{3,2}$ へ次のように埋め込む。

$$\begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} \\ \frac{b+c}{2} \\ \frac{b-c}{2} \\ \frac{a+d}{2} \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} \\ \frac{b+c}{2} \\ \frac{b-c}{2} \\ \frac{a+d}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

すると $ad - bc = 1$ ，すなわち $g \in SL(2; \mathbb{R}) \cong \widehat{\text{AdS}}^3$ のとき，

$$\begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} \\ \frac{b+c}{2} \\ \frac{b-c}{2} \\ \frac{a+d}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{N}^{3,2}$$

あとは計量が

$$I_3 \oplus -I_2 \longrightarrow I_2 \oplus -I_1 \oplus \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となるよう座標を調整したい。このとき、座標の最後の2つの成分を $\pi/4$ ひねることを考えてやればよい。つまり、

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} \\ \frac{b+c}{2} \\ \frac{b-c}{2} \\ \frac{a+d}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} \\ \frac{b+c}{2} \\ \frac{b-c}{2} \\ \frac{a+d}{2} - 1 \\ \frac{a+d}{2} + 1 \end{pmatrix}$$

とすると、この右辺は新しい計量における $\mathfrak{R}^{3,2}$ の元である。あとはこれを \mathbb{R}^\times で割って整理すると、

$$\left[\frac{a-d}{2} : \frac{b+c}{2} : \frac{b-c}{2} : \frac{a+d}{2} - 1 : \frac{a+d}{2} + 1 \right] = [a-d : b+c : b-c : a+d-2 : a+d+2]$$

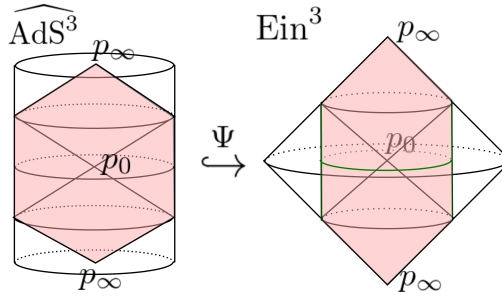
よって、埋め込み Ψ が構成できた。

この埋め込みによって、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\mapsto [0 : 0 : 0 : 0 : 1] \longleftrightarrow \text{origin } p_0, \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &\mapsto [0 : 0 : 0 : 1 : 0] \longleftrightarrow \text{improper point } p_\infty \end{aligned}$$

となる。

この埋め込みによって $\widehat{\text{AdS}}^3$ が Ein^3 に下の図のように埋め込まれている。



この緑の円筒は Lorentzian unit sphere \mathcal{S} を表しており、 $\widehat{\text{AdS}}^3 \cong SL(2; \mathbb{R})$ の赤い部分は Ein^3 の赤い部分に対応する。また $\widehat{\text{AdS}}^3$ で色が塗られていない部分は、 Ein^3 において \mathcal{S} の外側に上手く埋め込まれている。ただし、これらは後できちんと確認する。

AdS^3 における被覆変換 $-e: g \mapsto -g$ は、 Ein^3 における inversion $I_{\mathcal{S}}$ に対応する。ただし、 $I_{\mathcal{S}}$ とは、Lorentzina unit sphere

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^{2,1} ; x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

の Ein^3 への埋め込みに関する inversion であった。

Proposition 9.1. ([10], §3.2.1)

$$\Psi \circ (-e) = I_{\mathcal{S}} \circ \Psi$$

Proof. $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする.

$$\begin{aligned} \Psi(-g) &= [-a + d : -b - c : -b + c : -a - d - 2 : -a - d + 2] \\ &= [a - d : b + c : b - c : a + d + 2 : a + d - 2] \\ &= I_{\mathcal{S}}([a - d : b + c : b - c : a + d - 2 : a + d + 2]) \\ &= I_{\mathcal{S}} \circ \Psi(g) \end{aligned}$$

□

次に、この埋め込みに関する重要な命題を与える.

Proposition 9.2. ([10], §3.2.2)

$$\text{Ein}^3 \setminus \Psi(\widehat{\text{AdS}}^3) = \widehat{\iota(\mathcal{S})} = \text{Ein}^2$$

Proof. 先ほどの図からほぼ明らかである.

□

9.2 測地線の Ein^3 への埋め込み

この節の内容は [10], §3.3.1 を参考に執筆した. $\widehat{\text{AdS}}^3$ が Ein^3 へどのように埋め込まれているかを確認していこう.

1. e を通る timelike な測地線を考えよう.

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

は $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ の timelike なベクトル $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の $PSL(2; \mathbb{R})$ における 1 係数変換群である. これは $SL(2; \mathbb{R})$ へ持ち上げても形が変わらない. これを Ein^3 埋め込むと

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \xrightarrow{\Psi} [0 : 0 : \sin \theta : \cos \theta - 1 : \cos \theta + 1]$$

となる. $\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$ のとき,

$$[0 : 0 : 0 : 1 : 0] = p_{\infty}$$

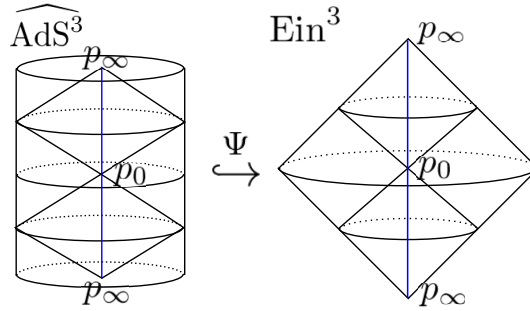
に対応し, $\theta \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$ のとき,

$$\left[0 : 0 : \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} : \frac{\cos \theta - 1}{\cos \theta + 1} : 1 \right] \leftrightarrow \left(0, 0, \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \right) \in \mathbb{E}^{2,1}$$

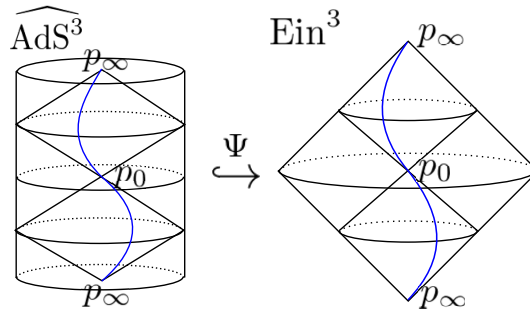
となる. $-\pi < \theta < \pi$ の範囲で

$$-\infty < \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} < \infty$$

であるから, $PSL(2; \mathbb{R})$ の timelike な測地線は, $\mathbb{E}^{2,1}$ における z 軸の埋め込みの閉包に対応している.



ここから一般に AdS^3 の e を通る timelike な測地線は次の図のように埋め込まれていると推測できる. 実際, 計算するとこのように埋め込まれていることが分かる.



2. e を通る lightlike な測地線を考えよう.

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

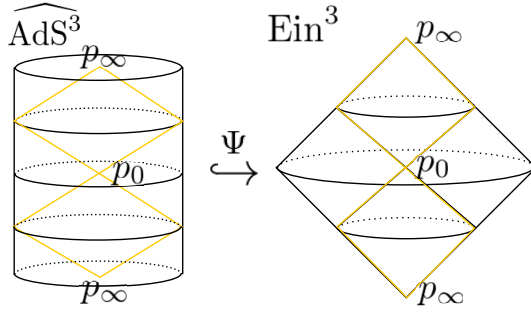
はそれぞれ $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ の lightlike なベクトル $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の $PSL(2; \mathbb{R})$ における 1 係数変換群である. これを $SL(2; \mathbb{R})$ へ持ち上げた,

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

の埋め込みをそれぞれ計算すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\Psi} \left[0 : \frac{t}{4} : \frac{t}{4} : 0 : 1 \right] \longleftrightarrow \left(0, \frac{t}{4}, \frac{t}{4} \right), \\ - \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\Psi} \left[0 : \frac{t}{4} : \frac{t}{4} : 1 : 0 \right] \longleftrightarrow I_{\mathcal{I}} \left(0, \frac{t}{4}, \frac{t}{4} \right), \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\Psi} \left[0 : \frac{t}{4} : -\frac{t}{4} : 0 : 1 \right] \longleftrightarrow \left(0, \frac{t}{4}, -\frac{t}{4} \right), \\ - \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\Psi} \left[0 : \frac{t}{4} : -\frac{t}{4} : 1 : 0 \right] \longleftrightarrow I_{\mathcal{I}} \left(0, \frac{t}{4}, -\frac{t}{4} \right) \end{aligned}$$

したがって、図にすると次のように対応する。



よって、 $SL(2; \mathbb{R})$ における2つの cone はそのまま Ein^3 へ埋め込まれると推測できる。

3. e を通る spacelike な測地線を考えよう。

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

は $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ の timelike なベクトル $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ の $PSL(2; \mathbb{R})$ における1係数変換群である。これを $SL(2; \mathbb{R})$ へ持ち上げた,

$$\pm \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

の埋め込みをそれぞれ計算する。まずは正の成分から埋め込もう。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} &\xrightarrow{\Psi} [e^t - e^{-t} : 0 : 0 : e^t + e^{-t} - 2 : e^t + e^{-t} + 2] \\ &= [\sinh t : 0 : 0 : \cosh t - 1 : \cosh t + 1] \\ &= \left[\frac{\sinh t}{\cosh t + 1} : 0 : 0 : \frac{\cosh t - 1}{\cosh t + 1} : 1 \right] \longleftrightarrow \left(\tanh \frac{t}{2}, 0, 0 \right) \end{aligned}$$

ただし,

$$\frac{\sinh t}{\cosh t + 1} = \tanh \frac{t}{2}$$

である.

ここで, $-\infty < t < \infty$ のとき

$$-1 < \frac{\sinh t}{\cosh t + 1} < 1$$

である. 次に負の成分を埋め込む. 同様の計算で,

$$-\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Psi} \left[\frac{\sinh t}{\cosh t - 1} : 0 : 0 : \frac{\cosh t + 1}{\cosh t - 1} : 1 \right]$$

であるから, $t \neq 0$ のとき,

$$\left[\frac{\sinh t}{\cosh t - 1} : 0 : 0 : \frac{\cosh t + 1}{\cosh t - 1} : 1 \right] \longleftrightarrow \left(\frac{1}{\tanh \frac{t}{2}}, 0, 0 \right)$$

であり, $t = 0$ のとき,

$$[0 : 0 : 0 : 1 : 0] \longleftrightarrow I_{\mathcal{S}}(0, 0, 0) \quad (t = 0)$$

ただしここで,

$$\frac{\sinh t}{\cosh t - 1} = \frac{1}{\tanh \frac{t}{2}}$$

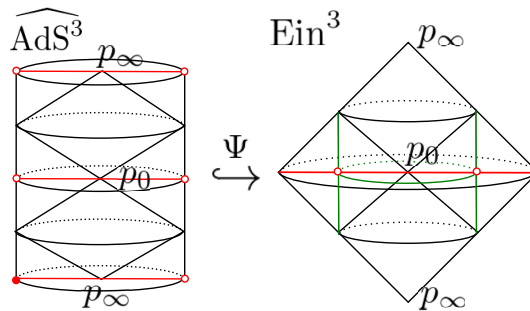
である. ここで, $-\infty < t < 0$ のとき

$$\frac{1}{\tanh \frac{t}{2}} < -1$$

であり, $0 < t < \infty$ のとき

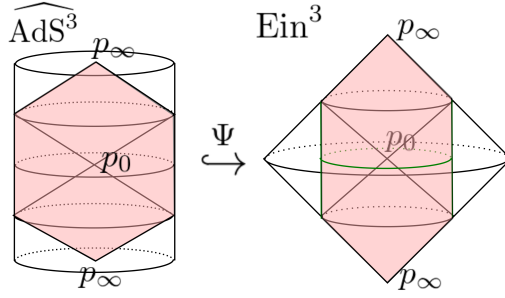
$$1 < \frac{1}{\tanh \frac{t}{2}}$$

である. したがって, 図にすると次のようになる.



ただし, 緑の円筒は Lorentzian unit sphere \mathcal{S} を表している.

以上から, $SL(2; \mathbb{R})$ は次の図のように Ein^3 へと埋め込まれていると考えられる. ただし, 図左の赤い部分は図右の赤い部分, すなわち \mathcal{S} の内側に対応し, それ以外の部分は \mathcal{S} の外側に対応する.



9.3 AdS-crooked plane の Ein³ への埋め込み

この節では $\Psi: \widehat{\text{AdS}}^3 \rightarrow \text{Ein}^3$ を用いて実際に AdS-crooked plane を Ein^3 へ埋め込む。そしてその埋め込みが crooked surface であることを示す。

まず $PSL(2; \mathbb{R})$ が (g, \mathfrak{s}) に推移的に作用するから、 $g \in \text{AdS}^3$ と $\mathfrak{s} \in T_g \text{AdS}^3$ の組 (g, \mathfrak{s}) は適当に取ってきてよかった。そこで [10] では具体的に簡単な AdS-crooked plane を設定し、その埋め込みが、ある Minkowski crooked plane の Ein^3 における閉包となっていることを確かめている。

しかし、本稿ではより一般に次を示そう。

Proposition 9.3. C を $\mathbb{E}^{2,1} \cong \mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ の Minkowski crooked plane とする。このとき、次の関係が成立している。

$$\Psi(\exp(C) \cup -\exp(C)) = \overline{\iota(C)}$$

Proof. まず、次の対応が存在している。

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{2,1} &\cong \mathfrak{sl}(2; \mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y-z \\ y+z & -x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この対応のもとで $\mathbb{E}^{2,1}$ の標準基底

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は、 $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ の基底でそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

に対応する。これによって、 $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ の任意の元は

$$\xi = \begin{pmatrix} x & y-z \\ y+z & -x \end{pmatrix}$$

と表せる. このとき, ξ の quadric form の値は $k := -\det \xi = x^2 + y^2 - z^2$ である. ξ が null か, timelike か, spacelike かで場合分けして考える.

1. null の場合, すなわち $k = 0$ のときを考える.

$$\exp \xi = e + \xi + \frac{k}{2!}e + \frac{k}{3!}\xi + \frac{k^2}{4!}e + \dots$$

であるから, $k = 0$ のとき,

$$\exp \xi = e + \xi = \begin{pmatrix} 1+x & y-z \\ y+z & 1-x \end{pmatrix}$$

である. これの $-e$ 倍も考えて Ein^3 へと埋め込むと,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1+x & y-z \\ y+z & 1-x \end{pmatrix} &\mapsto \left[\frac{1}{2}x : \frac{1}{2}y : \frac{1}{2}z : 0 : 1 \right] \\ &\leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}z \right) \in \mathbb{R}^{2,1}, \\ -\begin{pmatrix} 1+x & y-z \\ y+z & 1-x \end{pmatrix} &\mapsto \left[\frac{1}{2}x : \frac{1}{2}y : \frac{1}{2}z : 1 : 0 \right] \\ &\leftrightarrow I_{\mathcal{S}} \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}z \right) \in \mathbb{R}^{2,1} \end{aligned}$$

よって, $\mathbb{E}^{2,1}$ の原点を錐とする lightcone を AdS^3 へ埋め込むと, $\frac{1}{2}$ 倍の縮小になっている. すなわち lightlike な $v \in \mathbb{E}^{2,1}$ について

$$\Psi \circ \exp v = \iota \left(\frac{1}{2}v \right)$$

である.

2. timelike の場合, すなわち $k < 0$ の場合

$$\begin{aligned} \exp \xi &= e + \xi + \frac{k}{2!}e + \frac{k}{3!}\xi + \frac{k^2}{4!}e + \dots \\ &= \left(1 + \frac{k}{2!} + \frac{k^2}{4!} + \dots \right) e + \left(1 + \frac{k}{3!} + \frac{k^2}{5!} + \dots \right) \xi \end{aligned}$$

である. $-k = \theta^2$ とすると,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{k}{2!} + \frac{k^2}{4!} + \dots &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \\ &= \cos \theta, \\ 1 + \frac{k}{3!} + \frac{k^2}{5!} + \dots &= 1 - \frac{\theta^2}{3!} + \frac{\theta^4}{5!} - \dots \\ &= \frac{1}{\theta} \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) \\ &= \frac{1}{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\exp \xi &= \cos \theta e + \frac{1}{\theta} \sin \theta \xi \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta + \frac{1}{\theta} \sin \theta x & \frac{1}{\theta}(y-z) \\ \frac{1}{\theta}(y+z) & \cos \theta - \frac{1}{\theta} \sin \theta x \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である. これの $-e$ 倍も考えて Ein^3 へと埋め込もう. 同様の計算であるから, $+$ の成分のみ計算する.

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} \cos \theta + \frac{1}{\theta} \sin \theta x & \frac{1}{\theta}(y-z) \\ \frac{1}{\theta}(y+z) & \cos \theta - \frac{1}{\theta} \sin \theta x \end{pmatrix} \\ \mapsto &\left[\frac{2}{\theta} \sin \theta x : \frac{2}{\theta} \sin \theta y : \frac{2}{\theta} \sin \theta z : 2(\cos \theta - 1) : 2(\cos \theta + 1) \right]\end{aligned}$$

(1) $\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$ のとき, 埋め込みは

$$[0 : 0 : 0 : 1 : 0]$$

より, 無限遠点に対応する.

(2) $\theta \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$ のとき, 埋め込みは

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \frac{x}{\theta} : \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \frac{y}{\theta} : \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \frac{z}{\theta} : \frac{\cos \theta - 1}{\cos \theta + 1} : 1 \right] \\ &\longleftrightarrow \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \frac{x}{\theta} : \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \frac{y}{\theta} : \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \frac{z}{\theta} \right) \in \mathbb{E}^{2,1}\end{aligned}$$

となる.

以上から, $\mathbb{E}^{2,1}$ の spacelike 成分を AdS^3 を経由して Ein^3 へ埋め込むと, $\frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \frac{1}{\theta}$ 倍の拡大となっている. すなわち timelike な $v \in \mathbb{E}^{2,1}$ について

$$\Psi \circ \exp v = \iota \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \frac{1}{\theta} v \right)$$

である. ここで,

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \frac{1}{\theta} \neq \frac{1}{2}$$

である.

3. 最後に, spacelike の場合, すなわち $k > 0$ の場合

$$\begin{aligned}\exp \xi &= e + \xi + \frac{k}{2!} e + \frac{k}{3!} \xi + \frac{k^2}{4!} e + \cdots \\ &= \left(1 + \frac{k}{2!} + \frac{k^2}{4!} + \cdots \right) e + \left(1 + \frac{k}{3!} + \frac{k^2}{5!} + \cdots \right) \xi\end{aligned}$$

は先ほどと同様であるが、 $k = \phi^2$ とすると、

$$\begin{aligned}
1 + \frac{k}{2!} + \frac{k^2}{4!} + \cdots &= 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \cdots \\
&= \cosh \phi, \\
1 + \frac{k}{3!} + \frac{k^2}{5!} + \cdots &= 1 - \frac{\phi^2}{3!} + \frac{\phi^4}{5!} - \cdots \\
&= \frac{1}{\phi} \left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \cdots \right) \\
&= \frac{1}{\phi} \sinh \phi
\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\exp \xi &= \cosh \phi e + \frac{1}{\phi} \sinh \phi \xi \\
&= \begin{pmatrix} \cosh \phi + \frac{1}{\phi} \sinh \phi x & \frac{1}{\phi}(y-z) \\ \frac{1}{\phi}(y+z) & \cosh \phi - \frac{1}{\phi} \sinh \phi x \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である。これの $-e$ 倍も考えて Ein^3 へと埋め込もう。同様の計算であるから、 $+$ の成分のみ計算する。

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cosh \phi + \frac{1}{\phi} \sinh \phi x & \frac{1}{\phi}(y-z) \\ \frac{1}{\phi}(y+z) & \cosh \phi - \frac{1}{\phi} \sinh \phi x \end{pmatrix} \\
\mapsto &\left[\frac{2}{\phi} \sinh \phi x : \frac{2}{\phi} \sinh \phi y : \frac{2}{\phi} \sinh \phi z : 2(\cosh \phi - 1) : 2(\cosh \phi + 1) \right]
\end{aligned}$$

よって、その埋め込みは

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\sinh \phi}{\cosh \phi + 1} \frac{x}{\phi} : \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi + 1} \frac{y}{\phi} : \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi + 1} \frac{z}{\phi} : \frac{\cosh \phi - 1}{\cosh \phi + 1} : 1 \right] \\
&\longleftrightarrow \left(\frac{\sinh \phi}{\cosh \phi + 1} \frac{x}{\phi} : \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi + 1} \frac{y}{\phi} : \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi + 1} \frac{z}{\phi} \right) \in \mathbb{E}^{2,1}
\end{aligned}$$

となる。

以上から、 $\mathbb{E}^{2,1}$ の spacelike 成分を AdS^3 を経由して Ein^3 へ埋め込むと、 $\frac{\sinh \phi}{\cosh \phi + 1} \frac{1}{\phi}$ 倍の拡大となっている。すなわち spacelike な $v \in \mathbb{E}^{2,1}$ について

$$\Psi \circ \exp v = \iota \left(\frac{\sinh \phi}{\cosh \phi + 1} \frac{1}{\phi} v \right)$$

である。ここで、

$$0 < \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi + 1} \frac{1}{\phi} < \frac{1}{2}$$

である。

つまり、原点を vertex とする Minkowski crooked plane は AdS^3 を経由しても、直接 Ein^3 に埋め込んでも形が変わらない。すなわち、命題の主張が示された。□

9.4 Crooked surface に対応する AdS-crooked plane の構成

先ほどは AdS-crooked plane から crooked surface を作った。逆に crooked surface から AdS-crooked plane を作ることを考えよう。そのためには、crooked surface に involution に関するある条件を 1 つ仮定する必要がある、また埋め込まれた AdS-crooked plane はこの条件を満たしている。

Definition 9.4. ([10], §4.1.2) $\mathcal{D} = \{p_0, p_\infty; p_1, p_2\}$ を torus data とし、ここから作られる crooked surface を $\overline{C(\mathcal{D})}$ とする。このとき、 $\overline{C(\mathcal{D})}$ が $I_{\mathcal{D}}$ -adapted であるとは、次を満たすことである。

$$\begin{cases} I_{\mathcal{D}}(p_0) = p_\infty \\ I_{\mathcal{D}}(p_\infty) = p_0 \\ I_{\mathcal{D}}(p_i) = p_i \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$

この条件は $I_{\mathcal{D}}$ -invariant より強い。

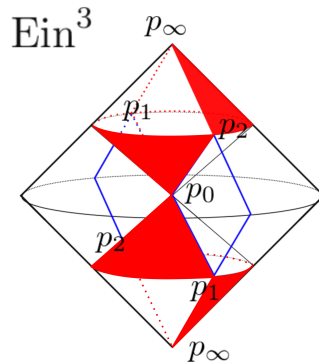
しかし、Minkowski crooked plane や AdS-crooked plane を Einstein 宇宙に埋め込んで作った crooked surface はいずれも $I_{\mathcal{D}}$ -adapted である。ではなぜこの条件が必要なのか、 $I_{\mathcal{D}}$ -adapted でないが $I_{\mathcal{D}}$ -invariant である具体例を作って調べてみる。

Example 9.5.

$$\begin{aligned} p_0 &= [0 : 1 : -1 : 0 : 0], \\ p_\infty &= [0 : 1 : 1 : 0 : 0], \\ p_1 &= [0 : 0 : 0 : 0 : 1], \\ p_2 &= [0 : 0 : 0 : 1 : 0], \end{aligned}$$

として、 $\mathcal{D} = \{p_0, p_\infty; p_1, p_2\}$ から作られる crooked surface を考えよう。これは $p_0, p_\infty \in S_\infty$ で、 p_1 は原点、 p_2 は無限遠点に対応している。

このとき、対応する crooked surface は次の図のようになっている。



ここから $L(p_\infty)$ を取り除くと Minkowski patch ができるが、これは crooked plane となっていない。つまり、 $I_{\mathcal{G}}$ -adapted でない crooked surface は crooked plane の埋め込みとして構成できない。

したがって、 $I_{\mathcal{G}}$ -adapted という条件は、crooked surface に対応する AdS-crooked plane の存在を保証している。つまり、crooked surface は $I_{\mathcal{G}}$ -adapted であれば、対応する AdS-crooked plane を作るができる。

では crooked surface から AdS-crooked plane を作る方法を与えよう。([10], §4.3)

$\mathcal{D} = \{p_0, p_\infty; p_1, p_2\}$ を torus data とし、ここから作られる crooked surface を $\overline{C(\mathcal{D})}$ とする。このとき、 $p_0, p_\infty \in \Psi(\widehat{\text{AdS}^3})$ であるから、 $\widehat{\text{AdS}^3}$ の対応する点を $\hat{p}_0, \hat{p}_\infty$ とする。このとき $\hat{p}_0 = e, \hat{p}_\infty = -e$ としてよい。実際、 $SL(2; \mathbb{R}) \times SL(2; \mathbb{R})$ は共役作用として $SL(2; \mathbb{R}) \cong \widehat{\text{AdS}^3}$ に推移的に作用する。したがって $\hat{p}_0 = e$ としてよい。そして $I_{\mathcal{G}}$ は $\widehat{\text{AdS}^3}$ で $-e$ 倍に対応するから、 $\hat{p}_\infty = -e$ である。したがって、 p_0, p_∞ はそれぞれ原点、無限遠点としてよい。

この調整によって、 $\hat{p}_1, \hat{p}_2 \in \partial^\infty e^*$ となるから、 p_1, p_2 は $L(p_0) \cap L(p_\infty)$ 上の、すなわち ideal circle 上の点としてよい。

つまり、等長写像を使って調整した後の $I_{\mathcal{G}}$ -adapted な crooked surface はある Minkowski crooked plane の埋め込みになっており、よって対応する AdS-crooked plane も存在する。

10 Crooked surface を用いた基本領域の構成

それでは、crooked surface を用いて Ein^3 の基本領域を構成する。基本的な流れは Minkowski 空間の場合の類似であるが、disjoint な Minkowski crooked plane を単に Ein^3 に埋め込むだけでは無限遠点で交わってしまい、disjoint とならない点に難しさがある。

よってこの節ではまず disjoint な crooked surface の作り方を与える。次に disjoint な2つの crooked surface を用いて基本領域を構成する。

この節は主に [2] を参考に執筆した。

10.1 Disjoint crooked surface

この部分の内容は [2], §4 による。まずは disjoint な crooked surface を作ろう。基本的な方針としては Minkowski crooked plane において disjoint crooked plane を作った方法を Ein^3 においてうまく適用する。

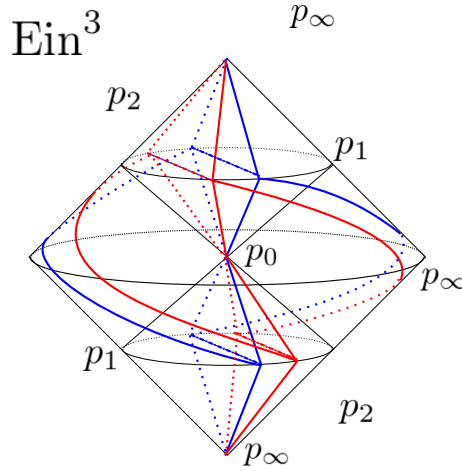
$u_1, u_2 \in \mathbb{R}^{2,1}$ を consistently oriented で spacelike なベクトルの組とする。すなわち、crooked plane $C(0, u_1), C(0, u_2)$ に対して、

$$C(0, u_1) \cap C(0, u_2) = \{0\}$$

が成立している．したがって，2つの crooked surface $\overline{C(0, u_1)}, \overline{C(0, u_2)}$ は p_0, p_∞ のちょうど2点で交わっている．また，それぞれの crooked surface の torus data を

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_1 &= \{p_0, p_\infty; f_1, f_2\}, \\ \mathcal{D}_2 &= \{p_0, p_\infty; g_1, g_2\}\end{aligned}$$

としよう．ただし， p_0, p_∞ は incident でない点であり， $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L(p_0) \cap L(p_\infty)$ である．次の図は p_0, p_∞ のみで交わる crooked surface の図である．



それぞれの crooked surface を $\overline{C(\mathcal{D}_1)}, \overline{C(\mathcal{D}_2)}$ とする．さて， $C(0, u_i)$ ($i = 1, 2$) の crooked half space を $H(0, u_i)$ ($i = 1, 2$) として，half space の Ein^3 における閉包を $\overline{H(\mathcal{D}_i)}$ ($i = 1, 2$) とする．

$\overline{C(\mathcal{D}_1)}, \overline{C(\mathcal{D}_2)}$ はそれぞれ Ein^3 を2分割し，かつ p_0, p_∞ でしか交わっていないから，

$$\overline{H(\mathcal{D}_1)} \cap \overline{H(\mathcal{D}_2)} = \{p_0, p_\infty\}$$

である．まずは， $\overline{C(\mathcal{D}_1)}, \overline{C(\mathcal{D}_2)}$ の交点 p_0 をずらすことを考える．

Lemma 10.1. ([2], Lemma4.1) $(z_1, z_2) \in AP(u_1, u_2)$ とすると，

$$\overline{C(z_i, u_i)} \subset \overline{H(\mathcal{D}_i)}$$

であり，2つの crooked surface $\overline{C(z_1, u_1)}, \overline{C(z_2, u_2)}$ は p_∞ のみで交わる．

Proof. 定理6.7より，

$$C(z_i, u_i) \subset H(0, u_i)$$

であり $C(z_1, u_1) \cap C(z_2, u_2) = \emptyset$ である．また，これらの包含関係は閉包を取っても変わらないから，

$$\overline{C(\mathcal{D}_i)} \subset \overline{H(\mathcal{D}_i)}$$

である． □

この作業によって p_0 における交点をずらすことができた。では次に p_∞ における交点をずらそう。involution $I_{\mathcal{I}}$ を使うと、 p_0, p_∞ を入れ替えることができ、また $L(p_0) \cap L(p_\infty)$ 上の点は固定された。これは torus data $\{p_0, p_\infty; *, *\}$ から定まる crooked surface を保つ。

さて、 $v \in \mathbb{R}^{2,1}$ に対し、 τ_v を $\mathbb{E}^{2,1}$ において v の平行移動を与える写像とする。乱暴であるが、この平行移動を与える写像が誘導する $\mathbb{R}^{3,2}$ の変換もまた τ_v と書く。実は、 $I_{\mathcal{I}}\tau_v I_{\mathcal{I}}$ は p_0 を固定する。したがって、補題 10.1 より、次の系が成立する。

Corollary 10.2. ([2], Corollary4.3) $(z_1, z_2) \in AP(u_1, u_2)$ とすると、

$$I_{\mathcal{I}}\tau_{z_i} I_{\mathcal{I}} \overline{C(0, u_i)} \subset \overline{H(\mathcal{D}_i)}$$

であり、これらの crooked surface は p_0 のみで交わる。

以上、補題 10.1 と系 10.2 を組み合わせると、次の定理ができる。

Theorem 10.3. ([2], Theorem4.4) $(z_1, z_2), (z'_1, z'_2) \in AP(u_1, u_2)$ とすると、

$$I_{\mathcal{I}}\tau_{z'_i} I_{\mathcal{I}} \overline{C(z_i, u_i)} \subset \overline{H(\mathcal{D}_i)}$$

であり、これらの crooked surface は disjoint である。

Proof. 補題 10.1 と系 10.2 はいずれも $\overline{H(\mathcal{D}_i)}$ を保ち、かつ crooked surface の交わりを除去している。□

したがって、disjoint な crooked surface を作ることができた。

10.2 Crooked Schottky domain

この部分の内容は主に [2], §5 による。では、crooked surface を用いて Ein^3 の基本領域を構成しよう。定理 5.4 の crooked surface による類似を考えていく。

Definition 10.4. ([2], Definition5.1) $SO(3, 2)$ の離散部分群 $\Gamma = \langle \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m \rangle$ が **crooked Schottky domain** を持つとは、 $2n$ 個の互いに disjoint な crooked surface $\overline{C_1^\pm}, \dots, \overline{C_n^\pm}$ と、それらが境界となっている $2n$ 個の disjoint な開領域 U_1^\pm, \dots, U_n^\pm で、各 i に対して

$$\eta_i(U_i^-) = \text{Ein}^3 \setminus \text{cl}(U_i^+)$$

を満たすものが存在していることである。

まずは議論を簡単にするため、 $n = 1$ 、すなわち Γ が巡回群の場合を考える。

$\gamma \in SO(2, 1)^0$ を双曲的な元とする。 γ は \mathbb{H}^2 に等長写像として作用し、 $\langle \gamma \rangle$ は \mathbb{H}^2 上に基本領域を持つ。この基本領域の境界は 2 つの disjoint な \mathbb{H}^2 の測地線であり、そこに対応する crooked plane の組 $C(0, u_1), C(0, u_2)$ が存在する。ここで、

u_1, u_2 は consistently oriented であり, $u_2 = -L(\gamma)(u_1)$ である. ここから disjoint な crooked surface を作ると, ある $(z_1, z_2), (z'_1, z'_2) \in AP(u_1, u_2)$ に対して,

$$\begin{aligned} U^- &= I_{\mathcal{J}\tau_{z'_1}} \overline{I_{\mathcal{J}}C(z_1, u_1)}, \\ U^+ &= I_{\mathcal{J}\tau_{z'_2}} \overline{I_{\mathcal{J}}C(z_2, u_2)} \end{aligned}$$

である. では次に, U^- を U^+ へ移すような $\eta \in SO(3, 2)$ を定めよう.

まず, γ に対し, $\tilde{\gamma} \in SO(3, 2)$ を次を満たすようなものとする.

1. $\iota(\mathbb{R}^{2,1})$ への作用は γ の $\mathbb{R}^{2,1}$ への作用と同じ.
2. p_∞ を固定し, したがって $L(p_\infty)$ も固定する.

次に,

$$\begin{aligned} \tau_1 &= I_{\mathcal{J}\tau_{z'_1}} I_{\mathcal{J}} \tau_{z_1}, \\ \tau_2 &= I_{\mathcal{J}\tau_{z'_2}} I_{\mathcal{J}} \tau_{z_2} \end{aligned}$$

とする. このとき,

$$\begin{aligned} \tau_1^{-1}(U^-) &= \overline{C(0, u_1)}, \\ \tau_2^{-1}(U^+) &= \overline{C(0, u_2)} \end{aligned}$$

であるから, $\tilde{\gamma}$ の作用によって,

$$\tilde{\gamma}\tau_1^{-1}(U^-) = \tau_2^{-1}(U^+)$$

であり, したがって

$$\tau_2 \tilde{\gamma} \tau_1^{-1}(U^-) = U^+$$

である. よって $\eta = \tau_2 \tilde{\gamma} \tau_1^{-1}$ とすると, これは crooked Schottky domain を持つ.

では, $\Gamma = \langle \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m \rangle$ を crooked Schottky domain を持つ $SO(3, 2)$ の離散部分群とし, 対応する $2n$ 個の閉領域を U_1^\pm, \dots, U_n^\pm とする. このとき, Γ は基本領域を持つことを示す.

まず, $\Gamma_i = \langle \eta_i \rangle$ ($i = 1, \dots, n$) を考える. このとき,

$$F_i = \text{Ein}^3 \setminus (U_i^- \cup U_i^+)$$

は $\langle \eta_i \rangle$ の基本領域となる.

ここで, 次の定理を事実として用いる.

Theorem 10.5. (Klein の組み合わせ定理, [11]) G_1, G_2 を $PSL(2; \mathbb{R})$ の元から成る離散群とし, $D_1, D_2 \subset \mathbb{H}^2$ をそれぞれ G_1, G_2 の基本領域とする. このとき, $(\mathbb{H}^2 \setminus D_1) \cap (\mathbb{H}^2 \setminus D_2) = \emptyset$ ならば, $G = \langle G_1, G_2 \rangle$ の基本領域は $D = D_1 \cap D_2$ となる.

各 η_i は $SO(2, 1)^0$ の双曲的な元を使って構成されたこの定理を適用することによって Γ は $\cap_{i=1}^n F_i$ を基本領域に持つことが分かる.

11 後書き

以上が私の学習のまとめである。私は本稿で anti-de Sitter 幾何学や Einstein 宇宙に関する論文で主要なものである [1],[2],[4],[6],[7],[9],[10] を中心にまとめなおした。[10] に関しては AdS^3 の Ein^3 への埋め込みについて、Goldman とは異なった証明で、幾何的イメージがより明確なものを与えることができた。複数の論文を参照し学習する手間を考えれば、本分野の研究に若干なりとも寄与できたのではないかと考える。

主要な論文で学習が及ばなかったのは [5] であり、この論文では AdS^3 の基本領域を構成する方法について述べられている。まず、これまで Ein^3 や $\mathbb{E}^{2,1}$ の基本領域を構成する上では crooked plane やその一般化が大きな力を発揮してきた。これは AdS^3 の基本領域を構成する上でも大きな力を発揮するが、上の二つとは少々違った結果も得られている。

Theorem 11.1. ([5],Theorem1.1) AdS^3 に固有不連続に作用する離散群で、AdS-crooked plane を基本領域の境界に持たないものが存在している。

これを示すのが [5] の目的である。Minkowski 空間や Einstein 宇宙において、基本領域を考えると必ず crooked plane や crooked surface が境界となっていた。これが anti-de Sitter 空間においては成立しないという定理である。

ただ [5] において、まずは Minkowski 空間の類似として AdS-crooked plane の disjoint 性を議論し、その後に AdS-crooked plane を境界に持つような基本領域の存在を示している。

[5] では、AdS-crooked plane は基本的に $e \in \text{AdS}^3$ と測地線 $l \subset e^* \cong \mathbb{H}^2$ の組 (e, l) によって定義しており、 $C(l)$ と記述されている。

私がつまづいたのは AdS-crooked plane の disjoint 性に関する次の定理である。

Theorem 11.2. ([5],Theorem3.1) l_1, l_2 を e^* の測地線とし、 $g_1, g_2 \in \text{AdS}^3$ とする。また、 d は \mathbb{H}^2 上の双曲距離とする。このとき、次は同値である。

1. AdS-crooked plane $g_1C(l_1)$ と $g_2C(l_2)$ は disjoint である。

2. ある実数 $K > 0$ で、任意の $x_1 \in l_1$ と $x_2 \in l_2$ に対して

$$d(g_1 \cdot x_1, g_2 \cdot x_2) - d(x_1, x_2) \geq K$$

となるものが存在する。

3. l_1 の任意の端点 ξ_1 と l_2 の任意の端点 ξ_2 に対して、 $\xi_1 \neq \xi_2$ であり、

$$d(g_1 \cdot \xi_1, g_2 \cdot \xi_2) - d(\xi_1, \xi_2) < 0$$

が成立する。

この定理の 2, 3 がどういった幾何的意味を持つのかまでは学習が及ばなかった。しかしこれは [5] に記載されている内容であるため、卒業後も勉強を続け、本稿をきちんと補っていきたい。

A Symplectic 幾何学と Einstein 宇宙

[1] を通して Ein^3 と 4次元 symplectic ベクトル空間の間には様々な対応があることを学習した. 本筋とは大きく関係しない内容ではあるが, 興味深い内容であるため, Appendix として掲載しておく.

A.1 Symplectic ベクトル空間を用いた Ein^3 の構成

この部分の内容は [1], §5.1 による.

V を \mathbb{R} 係数 4次元 symplectic ベクトル空間とし, その symplectic 形式を ω とする. ω に対し, symplectic 基底を e_1, e_2, e_3, e_4 とする. ただし, ω の上記基底に関する表現行列は以下とする.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち,

$$\omega = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*$$

と表せる. ただし e_i^* は e_i の双対基底である. 次に, V の体積要素を

$$\text{vol} = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$$

と定める. vol を保つ行列全体を $SL(V)$ とする. これは V の特殊線形群である. V から作られる 6次元ベクトル空間 $\wedge^2(V)$ を考える. $\wedge^2(V)$ 上の計量

$$\mathbb{B}: \wedge^2(V) \times \wedge^2(V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

を

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 = -\mathbb{B}(\alpha_1, \alpha_2) \text{vol} \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in \wedge^2(V))$$

で定義する. \mathbb{B} によって $\wedge^2(V)$ は (3, 3) 型ベクトル空間になっている. 実際, $\wedge^2(V)$ の基底として

$$\begin{aligned} \text{Spacelike} & : \frac{1}{2}(e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4), \frac{1}{2}(e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4), \frac{1}{2}(e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3), \\ \text{Timelike} & : \frac{1}{2}(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4), \frac{1}{2}(e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4), \frac{1}{2}(e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3) \end{aligned}$$

をとると, 直接計算可能である. ただし, また, \mathbb{B} についているマイナスの符号は後で Einstein 宇宙を作るための “おまじない” である.

次に、 $SL(V)$ の V への作用は $\bigwedge^2(V)$ への作用を誘導する。簡単な計算により、誘導された写像は \mathbb{B} を保つことが分かるから、この写像は $SO(3,3)$ に含まれる。したがって、

$$SL(4; \mathbb{R}) \longrightarrow SO(3,3)$$

という準同型写像が定まる。

では symplectic 形式 ω を用いて $(3,2)$ 型ベクトル空間を作る。

ω に対して \mathbb{B} に関する双対ベクトル $\omega^* \in \bigwedge^2(V)$ を次のように定めよう。

$$\omega(v_1, v_2) = \mathbb{B}(v_1 \wedge v_2, \omega^*)$$

\mathbb{B} の非退化性により、この ω^* は一意的に定まる。この ω^* の形は具体的に計算すると、

$$\omega^* = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$$

となり、 ω との双対性が確認できる。ここから $\omega^* \wedge \omega^* = 2\text{vol}$ が分かるから、 $\mathbb{B}(\omega^*, \omega^*) = -2 < 0$ 。したがって ω^* は timelike である。ここで

$$W_0 = (\omega^*)^\perp \subset \bigwedge^2(V)$$

とすると、これは $(3,2)$ 型ベクトル空間である。あとはこの null cone を射影することで Einstein 宇宙を作ることができる。

Symplectic 群 $Sp(4; \mathbb{R}) \subset SL(4; \mathbb{R})$ の V への作用は ω を保つので $\bigwedge^2(V)$ へ誘導された作用は ω^* を保つ。従って W_0 も保つ。すなわち、誘導された写像は $SO(3,2)$ に含まれる。したがって、

$$Sp(4; \mathbb{R}) \longrightarrow SO(3,2)$$

という準同型写像が定まる。

A.2 Lagrangian 平面と Einstein 宇宙

この部分の内容は [1], §5.2 による。

状況設定、記号は先ほどの節と同じものを用いる。

Proposition A.1. Einstein 宇宙の各点は、 V において Lagrangian 平面に対応する。

ただし Lagrangian 平面 P とは、 V の二次元部分空間であり、 ω が P 上で恒等的に 0 になるようなものである。

Proof. まず Einstein 宇宙の点から Lagrangian 平面を構成しよう。 $p \in \text{Ein}^3$ は W_0 において、lightlike なベクトル $a \in W_0$ に対応する。すなわち、

$$a \wedge a = \mathbb{B}(a, a)\text{vol} = 0$$

である。ここで簡単な計算によって、 $a \wedge a = 0$ であるような a はある $v_1, v_2 \in V$ を用いて $a = v_1 \wedge v_2$ と書けることがわかる。このとき

$$\mathbb{B}(a, \omega^*) = 0$$

であり、これは $\omega(v_1, v_2) = 0$ を表している。したがって、 $\{v_1, v_2\}$ で張られる平面は Lagrangian 平面である。

次に、Lagrangian 平面から Einstein 宇宙の点を構成する。Lagrangian 平面 P の $\{v_1, v_2\}$ とする。ここで $w = v_1 \wedge v_2$ で生成される直線を考えよう。簡単な計算によって、 w は v_1, v_2 の取り方によらないことがわかる。次に、 w は \mathbb{B} について lightlike なベクトルであり、 $w \in W_0$ 。実際、

$$-\mathbb{B}(w, w)\text{vol} = -w \wedge w = 0$$

であり、

$$\mathbb{B}(w, \omega^*) = \omega(v_1, v_2) = 0$$

である。したがって w は W_0 の lightlike な直線となるから、 Ein^3 の点に対応する。以上で対応を作ることができた。□

$q \in \text{Ein}^3$ に対して、対応する V の Lagrangian 平面を L_q と表すとする。

A.3 Pointed photon と complete flags

この部分の内容は [1], §5.2.1 による。

$(p, \phi) \in \text{Flag}^{2,1}$ から作られる包含関係は V でどうなっているだろうか。まず、 Ein^3 における包含関係は

$$p \in \phi \subset L(p)$$

である。これは W_0 において、

$$l_p \subset P_\phi \subset (P_\phi)^\perp \subset (l_p)^\perp \subset W_0$$

という包含関係 (complete flags) に対応している。ただし l_p は p に対応する lightlike な直線、 P_ϕ は ϕ に対応する平面である。更にこれは V において、

$$l_\phi \subset L_p \subset (l_\phi)^\perp \subset V$$

という包含関係に対応する。ただし、 $l_\phi = \bigcap_{p \in \phi} L_p$ で、これは P_ϕ に対応する V の直線であり、 $(l_\phi)^\perp$ は l_ϕ の symplectic 補空間である。すなわち、

$$(l_\phi)^\perp = \{v \in V; \text{任意の } w \in l_\phi \text{ に対し, } \omega(v, w) = 0\}$$

である。実際、上記のように定めた l_ϕ は V の直線になることを確認しよう。一般の例で確認するのは計算が煩雑であるから、 P_ϕ の基底が $e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3$ であるとき

を考えよう。このとき l_p の基底は、ある実数 θ を用いて $\cos \theta e_1 \wedge e_2 + \sin \theta e_1 \wedge e_3$ と表すことができる。したがって

$$\cos \theta e_1 \wedge e_2 + \sin \theta e_1 \wedge e_3 = e_1 \wedge (\cos \theta e_2 + \sin \theta e_3)$$

より、 L_p の基底は $e_1, \cos \theta e_2 + \sin \theta e_3$ である。 $p \in \phi$ の p を変化させることは θ の値を変化させることに対応しているから、 l_ϕ の基底は e_1 である。 よって確かめることができた。

A.4 歪 symplectic 自己同型写像と時間的向きを逆にする自己同型写像

この部分の内容は [1], §5.2.2 による。

異なる二つの Lagrangian 平面 L_p, L_q を考えよう。二つの平面は $\{0\}$ あるいは直線で交わる。

1. 交わりが直線であるとき、 $p, q \in \text{Ein}^3$ は同じ photon に含まれる。実際、これは前の節で l_ϕ を考えたときと同じ状況である。
2. 交わりが $\{0\}$ であるとき、すなわち $V = L_p \oplus L_q$ のとき、 p, q は同じ photon に含まれない。すなわち、spacelike circle $L(p) \cap L(q)$ が定義される。この状況で、 V の involution

$$\theta: I_{L_p} \oplus -I_{L_q}$$

を考える。

Lemma A.2. θ は歪 symplectic 写像である。すなわち、任意の $u_1, u_2 \in V$ に対し、

$$\omega(\theta(u_1), \theta(u_2)) = -\omega(u_1, u_2)$$

が成立。

Proof. まず

$$\mathbb{B}(\theta(u_1 \wedge u_2), \omega^*) = -\mathbb{B}(u_1 \wedge u_2, \omega^*)$$

を示す。

$$\begin{aligned} L_p &= \text{span}\{v_1, v_2\}, \\ L_q &= \text{span}\{w_1, w_2\} \end{aligned}$$

とすると、

$$\begin{aligned} u_1 \wedge u_2 &= c_1 v_1 \wedge v_2 + c_2 v_1 \wedge w_1 + c_3 v_1 \wedge w_2 \\ &+ c_4 v_2 \wedge w_1 + c_5 v_2 \wedge w_2 + c_6 w_1 \wedge w_2 \end{aligned}$$

と表せる。ただし c_i ($i = 1, \dots, 6$) $\in \mathbb{R}$ である。このとき,

$$\begin{aligned}\theta(u_1 \wedge u_2) &= c_1 v_1 \wedge v_2 - c_2 v_1 \wedge w_1 - c_3 v_1 \wedge w_2 \\ &\quad - c_4 v_2 \wedge w_1 - c_5 v_2 \wedge w_2 + c_6 w_1 \wedge w_2\end{aligned}$$

であるから, 線形性より,

$$\begin{aligned}\mathbb{B}(\theta(u_1 \wedge u_2), \omega^*) &= c_1 \mathbb{B}(\theta(v_1 \wedge v_2), \omega^*) - c_2 \mathbb{B}(\theta(v_1 \wedge w_1), \omega^*) \\ &\quad - c_3 \mathbb{B}(\theta(v_1 \wedge w_2), \omega^*) - c_4 \mathbb{B}(\theta(v_2 \wedge w_1), \omega^*) \\ &\quad - c_5 \mathbb{B}(\theta(v_2 \wedge w_2), \omega^*) + c_6 \mathbb{B}(\theta(w_1 \wedge w_2), \omega^*)\end{aligned}$$

しかし Lagrangian 性より,

$$\begin{aligned}\mathbb{B}(\theta(v_1 \wedge v_2), \omega^*) &= \omega(v_1, v_2) = 0, \\ \mathbb{B}(\theta(w_1 \wedge w_2), \omega^*) &= \omega(w_1, w_2) = 0\end{aligned}$$

である。したがって,

$$\mathbb{B}(\theta(u_1 \wedge u_2), \omega^*) = -\mathbb{B}(u_1 \wedge u_2, \omega^*)$$

の成立は示された。よって

$$\begin{aligned}\omega(\theta(u_1), \theta(u_2)) &= \mathbb{B}(\theta(u_1 \wedge u_2), \omega^*) \\ &= -\mathbb{B}(u_1 \wedge u_2, \omega^*) \\ &= -\omega(u_1, u_2)\end{aligned}$$

□

この θ は L_p, L_q を保つから, 誘導された $\theta: \Lambda^2(V) \rightarrow \Lambda^2(V)$ は p, q を保ち, 従って spacelike circle $L(p) \cap L(q)$ を保つ。

$\theta \notin Sp(4; \mathbb{R})$ であるが, θ は W_0 を保つ。この W_0 の基底として

$$\frac{1}{2}(v_1 \wedge v_2 - w_1 \wedge w_2), \frac{1}{2}(v_1 \wedge w_1 \pm v_2 \wedge w_2), \frac{1}{2}(v_1 \wedge w_2 \pm v_2 \wedge w_1)$$

をとり, θ のこの基底に関する表現行列を求めて, その timelike 成分の行列式を計算してみよう。するとこの θ は時間的向きを逆にする同型写像であることが分かる。

A.5 symplectic 自己同型写像と時間的向きを保つ自己同型写像

この部分の内容は [1], §5.23 による.

$P \subset V$ を symplectic 平面とする. すなわち, P は V の 2 次元 symplectic 部分空間である. このとき, symplectic 補空間

$$P^\perp = \{v \in V; \text{任意の } w \in P \text{ に対し, } \omega(v, w) = 0\}$$

もまた symplectic 平面となる. 先ほどの状況設定と同じ記号を用いて, V の symplectic basis を v_1, w_1, v_2, w_2 とし,

$$\begin{aligned} P &= \text{span}\{v_1, w_1\}, \\ P^\perp &= \text{span}\{v_2, w_2\} \end{aligned}$$

とする.

では 2 つの symplectic involution

$$\eta_\pm := \pm(I_P \oplus -I_{P^\perp})$$

を考えよう. この写像は明らかに symplectic であるから, W_0 を保つ. 実は η_\pm は W_0 においてある軸についての対称移動を与えている. これを確認しよう.

上の symplectic 基底に対して, $\omega^* = v_1 \wedge w_1 + v_2 \wedge w_2$ となる. したがって, 先ほどと同様に W_0 の基底を

$$\frac{1}{2}(v_1 \wedge v_2 - w_1 \wedge w_2), \frac{1}{2}(v_1 \wedge w_1 \pm v_2 \wedge w_2), \frac{1}{2}(v_1 \wedge w_2 \pm v_2 \wedge w_1)$$

ととる. このとき, η_\pm によって spacelike なベクトル

$$\nu_p := \frac{1}{2}(v_1 \wedge v_2 - w_1 \wedge w_2)$$

は保たれるが, それ以外のベクトル, すなわち $(\nu_p)^\perp \subset W_0$ の基底は全て -1 倍される. また, η_\pm によって, W_0 は

$$W_0 = \mathbb{R}\nu_p \oplus (\nu_p)^\perp \cong \mathbb{R}^{1,0} \oplus \mathbb{R}^{2,2}$$

と固有空間分解される. よって, η_\pm は時間的向きを保つ自己同型写像であり, この involution は Ein^3 の Einstein hypersphere $((\nu_p)^\perp \cap \mathfrak{N}(W_0))/\mathbb{R}^\times$ を保つ.

A.6 Positive compatible な複素構造と free involution

この部分の内容は [1], §5.4 による.

Ein^3 の全ての involution は V の involution から作られるわけではない. その中でも V の positive compatible な複素構造から生じる involution を見ていく.

Definition A.3. 自己同型写像 $J: V \rightarrow V$ であって, $J^2 = -I$ を満たすものを V 上の複素構造 (**complex structure**) という. \mathbb{R} 線形空間 V に対し, 組 (V, J) は複素ベクトル空間の構造を持つという.

また, symplectic ベクトル空間 (V, ω) に対し, 複素構造 J が

$$\omega(Ju, Jv) = \omega(u, v)$$

を満たすとき, J は V に **compatible** であるという. 更に, 任意の $v \in V$ ($v \neq 0$) に対し, $\omega(v, Jv) > 0$ を満たすとき, J は **positive** であるという.

(V, ω) 上の positive compatible な複素構造 J が存在しているとき, V 上の内積を $g(v, w) = \omega(v, Jw)$ で定義できる.

Remark 4. 実は ω, g, J のうち, 2つが存在したら残る1つも決定する. 詳しくは参考文献 [16] を参照.

$V = \mathbb{R}^4$ のとき, $M \in Sp(4; \mathbb{R})$ は複素構造 J に, $J \mapsto MJM^{-1}$ と作用する. このとき, J の stabilizer は $U(2; \mathbb{C})$ に共役である.

Proof. V 上の symplectic basis に対して ω を行列表示したとき,

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と表される. これは複素構造も定義する. さて, $M \in Sp(4; \mathbb{R})$ であることは ${}^t M J M = J$ が成立することであり, M が stabilizer の元であることは, $J M = M J$ が成立することである. したがって, ${}^t M M = I_4$ となり, これは $M \in O(4; \mathbb{R})$ を表している. すなわち $M \in O(4; \mathbb{R}) \cap Sp(4; \mathbb{R})$

この M を $U(2; \mathbb{C})$ として特徴づけたい. M を実 2×2 正方行列を用いて

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

と表すとする. $M J = J M$ より $B = -C, D = A$ である. ここで $X = A, Y = C$ と置き換えて,

$$M = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}$$

と表せ, これは $Z = X + \sqrt{-1}Y$ として複素 2×2 正方行列と特徴づけられる. ここで, ${}^t M M = I_4$ であることは ${}^t \bar{Z} Z = I_2$ と同値だから, このように特徴づけられた $Z \in U(2; \mathbb{C})$ である. \square

さて、 V 上の positive compatible な複素構造 J から作られる involution を見ていく。 J は V 上の involution ではないが、 $\Lambda^2(V)$ 上では $(\omega^*)^\perp$ を保つ involution となっている。

Proof. まず、 $J: \Lambda^2(V) \rightarrow \Lambda^2(V)$ は $(\omega^*)^\perp$ を保つことを示そう。 V 上の symplectic 基底 e_1, e_2, e_3, e_4 をうまくとって、この基底に関する ω, J の行列表示が

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

になるようにする。 W_0 の基底を以前のようにとると、 J の作用によって、 $\omega^* \mapsto \omega^*$ となる。したがって $(\omega^*)^\perp$ を保つ。また、それぞれの基底の行先を考えれば、 $J^2 = \text{id}$ も示すことができる。 \square

軽く証明を補足しておく。実は基底を具体的にとらなくても証明可能である。

J は (V, ω) に compatible であるから、 $\omega(v, w) = \omega(Jv, Jw)$ である。ここで、

$$\begin{aligned} \omega(v, w) &= \mathbb{B}(v \wedge w, \omega^*) = \mathbb{B}(Jv \wedge Jw, J\omega^*) \\ \omega(Jv, Jw) &= \mathbb{B}(Jv \wedge Jw, \omega^*) \end{aligned}$$

であるから、 \mathbb{B} の非退化性より、 $\omega^* = J\omega^*$ 。次に、 $\omega(v, w) = \omega(J^2v, J^2w)$ より、

$$\mathbb{B}(v \wedge w, \omega^*) = \mathbb{B}(J^2v \wedge J^2w, \omega^*)$$

であるから、再び \mathbb{B} の非退化性より、 $J^2 = \text{Id}$ 。

A.7 接触幾何との関わり (紹介)

W_0 の射影化によって Ein^3 が得られた。では、 V を射影化した $\mathbb{P}(V)$ と Ein^3 の間にも関係がないだろうか。先ほどまでの内容より、 photon ϕ に対して V の 1 次元部分空間 l_ϕ が対応した。したがって、 Pho^3 に対し、 V の 1 次元部分空間全体とみなせる $\mathbb{P}(V)$ が対応する。

実はこの $\mathbb{P}(V)$ には接触構造が入り、従って Pho^3 に接触構造を入れることができる。それなりの前提知識を要するため、詳細は控えるが [1], §5.5 を参考にされたい。

参考文献

- [1] T. Barbot, V. Charette, T. Drumm, W. Goldman, and K. Melnick. *Primer on the (2+1)-Einstein Universe*. in Recent Developments in PseudoRiemannian Geometry. Lectures in Mathematics and Physics, European Mathematical Society, 2008
- [2] V. Charette, D. Francoeur, R. Lareau-Dussault. *Fundamental domains in the Einstein universe*. Topology and its Applications 174, 62-80. 2014
- [3] V. Charette, T. Drumm. *Complete Lorentzian 3-manifolds*. Geometry, Groups and Dynamics 639 43. 2015
- [4] J. Danciger. *Geometric transitions from hyperbolic to AdS geometry*. Doctoral thesis, Stanford University, 2011
- [5] J. Danciger, F. Guèritaud, F. Kassel. *Fundamental domains for free groups acting on anti-de Sitter 3-space*. arXiv:1410.5804v1, 2014
- [6] T.Drumm. *Fundamental polyhedra for Margulis space-times*. opology 31.4: 677-683. 1992
- [7] T. Drumm, W. Goldman. *The geometry of crooked planes*. Topology 38, No. 2, 323-351. 1998
- [8] T.Drumm. *Lorentzian geometry*. In *Geometry, Topology and Dynamics of Character Varieties*. Lecture Notes Series, Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore: Volume 23, 247-281. 2012
- [9] C. Frances. *The conformal boundary of Margulis space-times*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 336, no. 9, 751-756. 2003
- [10] W.Goldman. *Crooked surfaces and anti-de Sitter geometry*. Geometriae Dedicata 175.1 159-187. 2015
- [11] F. Klein. *Neue Beiträge zur Riemann'sehen Functionentheorie*. Math. Ann. 21, 141-218. 1883
- [12] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. ACADEMIC PRESS, 1983
- [13] R. Penrose. *Asymptotic Properties of Fields and Space-Times*. Phys. Rev. Lett. 10, 66, 1963

- [14] 小林 俊行. 非リーマン等質空間の不連続群について.
<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~toshi/texpdf/rons-discont.pdf>
- [15] 深谷 賢治. 双曲幾何. 岩波書店, 1996
- [16] 本間 泰史. シンプレクティック幾何入門. http://www.f.waseda.jp/homma_yasushi/homma2/download/symplectic-intro.pdf