東北大学

大学院情報科学研究科

修士論文

Jacobi, Stieltjes, Gauss 連分数の解析的性質について

著者: 黒崎　涼太

指導教員: 須川　敏幸　教授

情報基礎科学専攻

平成 28 年 2 月 10 日

概要

複素解析学において，連分数という分野は古くから研究対象とされてきたが，初めて連分数を解析学の立場から研究を行う先駆けとなったのが，1894 年に T. J. Stieltjes によって書かれた論文 [St94a] “Recherches sur les fractions continues”である．Stieltjes は，積分

$$\int_0^\infty \frac{f(u)du}{z+u}, \quad f(u)>0, \quad z\in\mathbb{C}$$

と連分数

$$\cfrac{1}{z+\cfrac{a_1}{1+\cfrac{a_2}{z+\cfrac{a_3}{1+\ddots,}}}} \qquad a_p>0 \tag{a}$$

の関連性と収束性について研究をし，この理論を整備するべく，元来の積分概念を拡張し，Vitali の定理を解析函数列にまで発展させた．連分数 (a) は **Stieltjes 連分数**と呼ばれ，

$$\cfrac{1}{z+b_1-\cfrac{p_1}{z+b_2-\cfrac{p_2}{z+b_3-\cfrac{p_3}{z+b_4-\ddots,}}}} \qquad b_k(a_k),\ p_k(a_k)>0 \tag{b}$$

と変形できるが，これについて 1903 年に E. B. Van Vleck [Vl03] が Stieltjes の理論を発展させ，積分の範囲を実軸全体にまで拡張した．そして Stieltjes の連分数理論を完全に拡張したのが，1920 年の Hamburger [Ha20] である．他にも多くの数学者によって連分数の理論は研究されてきたが，1990 年代になると，Pringsheim [Pr98] と Vleck [Vl01a] によって，連分数

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{c_1}{1+\cfrac{c_2}{1+\ddots,}}} \qquad c_p\in\mathbb{C}, \tag{c}$$

および，

$$\cfrac{1}{b_1+\cfrac{1}{b_2+\cfrac{1}{b_3+\ddots,}}} \qquad b_p\in\mathbb{C} \tag{d}$$

の収束性が調べられた．連分数 (c) に関して Pringsheim は，ある列 $g_{p-1}\in[0,1]$, $(p=1,2,3,\ldots)$ があって，$|c_p|\le(1-g_{p-1})g_p$ となれば収束することを発見した．Vleck は同様の結論が $g_0=0$ かつ級数 $1+\sum g_1g_2\cdots g_p/(1-g_1)(1-g_2)\cdots(1-g_p)$ が発散するときに得られることを示した．こうした議論は他の連分数の収束性を調べるための基礎となるもので本論文の第 1 章で述べることにする．また連分数理論を扱うための準備とともに，収束を理解するために必要な概念も同様に第 1 章で説明する．そして章の後半部分では，以後，特に第 2 章で扱う連分数の収束性に関して重要になる**基本不等式**について説明をする．

本論文の主要な連分数の 1 つである **Jacobi** 連分数

$$\cfrac{1}{z_1+b_1-\cfrac{a_1^2}{z_2+b_2-\cfrac{a_2^2}{z_3+b_3-\ddots,}}} \qquad z_p\in\mathbb{C} \tag{e}$$

については，第 2 章の軸となる (連分数における) **正定値**というある種のクラスを導入することで，収束性に関する理論が導かれる．連分数の要素からなる実 2 次形式

$$\sum_{p=1}^{n}\Im(b_p+z_p)|x_p|^2-\sum_{p=1}^{n-1}\Im(a_p)(x_p\overline{x_{p+1}}+\overline{x_p}x_{p+1}),\quad x_n\in\mathbb{C},\quad n=1,2,3,\ldots$$

が $\Im(z_p)>0$ に関して非負値をとることを正定値と定義することで，Jacobi 連分数の近似値はある縮小円列 $\{K_p(z)\}$ 内に存在することが分かる．そして，この縮小円列 $\{K_p(z)\}$ における各円の半径 $r_p(z)$ の様子を調べることで，極限函数を解析できる．この議論の中に登場する数列 $\{(1-g_{p-1})g_p\}$ は**連鎖列**と呼ばれ，本論文の通じて重要な役割を担う数列である．

一方，連分数の理論において，収束性と並び広く研究されてきたこととしてローラン級数展開が挙げられる．第 3 章では，まず有理函数を Jacobi 連分数に展開するための必要十分条件と，数値計算に有効なアルゴリズムを示す．このとき，有理函数をローラン級数展開をすることで得られる係数 $\{c_p\}$ は**モーメント**と呼ばれる．このモーメント $\{c_p\}$ は第 4 章で述べる直交多項式と関係がある．第 4 章では，ローラン級数展開と連分数展開との関連づけを与える．その出発点として，直交多項式とモーメント $\{c_p\}$ とを結びつける形式的な積分

$$\int(k_0+k_1u+\cdots+k_nu^n)\,d\phi_c(u)=k_0c_0+k_1c_1+\cdots+k_nc_n,\quad k_n\in\mathbb{C}:\text{定数} \tag{f}$$

を導入し，さらに第 3 章で得られた結果を用いると，最終的に，ローラン級数展開と連分数の値が $2p$ $(p=1,2,3,\ldots)$ 次の近似値まで等しくなるという結論が得られる．そして，

Stieltjes [St89] による連分数展開をローラン級数展開にうつすための強力な Stieltjes の展開定理を紹介する．

第 5 章では，形式的積分 (f) を実際の積分に置き換えた作用を考える．この際，本論文では Stieltjes 積分を用いるが，扱う理論自体は Lebesgue 積分まで拡張できる．与えられた列 $\{c_p\}$ に対して，

$$\mu_p = \int_0^1 u^p d\mu(u), \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

を満たす函数 $\mu(u)$ を決定する問題を**モーメント問題**とよぶ．モーメント問題は考える積分区間によって何種類かに分かれるが，共通した概念として，モーメント問題の解となる函数 $\mu(u)$ が存在するか，解が一意的かどうかが議論の対象となる．そして，解の存在を議論する中で，モーメント問題における Stieltjes 積分が，これまで述べてきた Stieltjes 連分数や Jacobi 連分数表現を持つことが重要な条件として現れる．

Stieltjes 連分数や Jacobi 連分数の理論を基礎とし，第 6 章では，**Gauss 連分数**に関する解析的性質を調べる．Gauss 連分数は，$a,\ b \in \mathbb{C}$，$c \notin \{0, -1, -2, -3, \cdots\}$ として超幾何級数

$$F(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n \cdot n!} z^n, \quad |z| < 1$$

と隣接関係式を用いることで得られる商 $F(a, b+1, c+1; z)/F(a, b, c; z)$ より構成される連分数である [Ga76]．ただしここで，$(a)_n$ は Pochhammer 記号と呼ばれ，$(a)_0 := 1$，$(a)_{n+1} := (a)_n(a+n)$，$(n = 0, 1, 2, \dots)$ により定まる．Gauss 連分数は，超幾何級数を用いて構成されるため，初等函数やよく知られた形の積分などを連分数として記述できる．さらに，Gauss 連分数の部分分子は，パラメータ a, b, c にある条件を付けることで連鎖列としても表現できる．これにより，Gauss 連分数の収束に関する定理が導かれる．

最後に，本論文の結論としては，Jacobi 連分数や Gauss 連分数の収束性を述べた定理や，近似値が満たすべき不等式を用いることで，従来のべき級数展開や複素積分などでは導出できない類いの不等式を導けることを述べる．また，連分数はある種の自己相似性を持ち合わせている場合がある．このとき，その自己相似性により，導かれた不等式の精度をさらに高められることも紹介する．

目 次

記号と表記

本論文では，以下の記号と表記を用いることにする．

記号・表記	意味
$\mathbb{N}$	自然数全体からなる集合
$\mathbb{N}_0$	0 を含む自然数全体からなる集合
$\mathbb{R}$	実数全体からなる集合
$\mathbb{R}_{>0}$	正の実数全体からなる集合
$\mathbb{C}$	複素数全体からなる集合
$\widehat{\mathbb{C}}$	無限遠を含む複素数全体からなる集合
∂R	集合 R の境界
$\#R$	集合 R の要素数
R^c	集合 R の補集合
$A \subset B$	集合 B の部分集合 A
$A \cup B$	集合 A と集合 B の和集合
$A \cap B$	集合 A と集合 B の積集合
$A \backslash B$	集合 A と集合 B の差集合
$a \in A$	集合 A に含まれる要素 a
$\Re(z)$	複素数 z の実部
$\Im(z)$	複素数 z の虚部
$\bar{z}$	複素数 $z = x + iy$ の複素共役，i.e., $\bar{z} = x - iy$
$\theta = \arg(z)$	複素数 z の偏角
$r = \|z\|$	複素数 $z = x + iy$ の絶対値，i.e., $\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
$z = re^{i\theta}$	$r = \|z\|$，$\theta = \arg(z)$
$g \circ f(\omega)$	函数 f, g の合成函数，i.e., $g(f(\omega))$
$\max\{a, b\}$	数 a, b の最大値
$\min\{a, b\}$	数 a, b の最小値
$\deg f$	函数 f の次数

第1章　連分数の定義とその基礎的性質

連分数理論は，数論，解析学，確率論，力学などで用いられ，工学分野でいえば信号処理や電気回路にも登場する重要な道具の1つである．今では幅広い学問分野で扱われている連分数であるが，それ自体が最初に知られたのは1572年である．R. Bombelli が $\sqrt{13}$ の近似値として

$$3+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6}}$$

を与えた．この近似値自体はあくまで有限な繰り返しに関する連分数であるが，初めて無限に繰り返される連分数を考えたのが，Lord W. Brouncker である．彼は

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\ddots}}}$$

となることを示した．

そして現代に至るまで，数多くの数学者が連分数を研究してきたが，その中でも，解析学の見地から連分数を研究し始めたのが T. J. Stieltjes である．自身の論文 [St94a] において，連分数の収束性をある積分表示と関連づけた．この論文で扱われた連分数

$$\cfrac{1}{z+\cfrac{a_1}{1+\cfrac{a_2}{z+\cfrac{a_3}{1+\ddots}}}}, \qquad a_p>0,\ z\in\mathbb{C}$$

が Stieltjes 連分数である．Stieltjes 連分数以外にも，連分数自身の型から様々な種類の連分数が考えられる．その1つが Jacobi 連分数である．Jacobi 連分数は Stieltjes 連分数と似た性質を持ち合わせている．さらに，Jacobi 連分数と Stieltjes 連分数はある変数変換を施すことで互いに移り合えることが分かる．そしてもう1つが，Gauss 連分数である．Gauss 連分数は超幾何級数の商を用いて記述されるが，収束性や近似値に関する理論では，Jacobi 連分数と Stieltjes 連分数の理論に基づくことがしばしば見られる．そして，この Gauss 連分数は他の連分数と比べ，幅広い分野でも扱われることが多く，単葉函数論からも研究がなされている．

本論文は，上記で述べた 3 種の連分数を複素函数と捉えることで複素解析学の立場から収束性や積分表現，ローラン級数などとの関連を調べていく．また，いずれの連分数においても，根底となる概念は共通しているので，まずはそれらをこの章で述べることにする．

1.1 連分数の定義

連分数に関しては冒頭部分でわずかであるが紹介したが，ここで今一度，連分数の定義を行う．簡単な連分数の例を見ながら，解析学の立場から論ずるに必要な基礎的概念を述べる．

定義 1.1. **連分数**とは，次のような形を持つ分数である：

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots}} \tag{1.1}$$

ここで，$a_p \in \mathbb{C}, (p = 1, 2, 3, \dots), b_p \in \mathbb{C}, (p = 0, 1, 2, \dots)$．このとき，各 a_p, b_p を**連分数の要素**または**係数**といい，特にそれぞれを $\boldsymbol{p}$ **次の部分分子**，$\boldsymbol{p}$ **次の部分分母**という．さらに，a_p/b_p を $\boldsymbol{p}$ **次の部分商**という．また便宜的に，上記の連分数を

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots$$

と書くこともある．ここで 1 つ注意しておくことは，連分数が無限に続かない場合でも同様の表現を用いることとする．つまり，

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}}} = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n}$$

と表記するということである．

連分数の簡単な例を見てみよう．

例 1.2.

$$\tan\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1|}{|\zeta} + \frac{1|}{|3\zeta} + \frac{1|}{|5\zeta} + \cdots \quad \text{for} \quad |\zeta| > \frac{2}{\pi}.$$

この例で登場する連分数は 2 章，3 章で説明する Jacobi 連分数と呼ばれるものである．

連分数は，ある特定の部分商が無限回繰り返されて得られる分数であるが，途中でその繰り返しを打ち切ることで，近似値 (近似分数) が得られる．任意の連分数は，ω を変数として

$$t_0(\omega) := b_0 + \omega, \quad t_p(\omega) := \frac{a_p}{b_p + \omega}, \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

という変換であると考えられる．この変換を用いた

$$t_0 \circ t_1 \circ \cdots \circ t_p(0) = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_p|}{|b_p}$$

を **p 次の近似分数**とよぶ．また，後に紹介する基本漸化式を用いることで，任意の連分数は

$$t_0 \circ t_1 \circ \cdots \circ t_p(\omega) = \frac{A_{p-1}\omega + A_p}{B_{p-1}\omega + B_p}, \quad p = 0, 1, 2, \ldots$$

という変換としても表せることが知られている．ここで，各 A_p, B_p をそれぞれ **p 次の分子**，**p 次の分母**といい，次の**基本漸化式**により一意に定まる：

$$\begin{aligned} A_{-1} &= 1,\ B_{-1} = 0,\ A_0 = b_0,\ B_0 = 1; \\ A_{p+1} &= b_{p+1}A_p + a_{p+1}A_{p-1}, \\ B_{p+1} &= b_{p+1}B_p + a_{p+1}B_{p-1}, \quad p = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{1.2}$$

また，基本漸化式を行列表示すると，行列式は，

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_{n-1} & A_n \\ B_{n-1} & B_n \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A_{n-1} & b_nA_{n-1} + a_nA_{n-2} \\ B_{n-1} & b_nB_{n-1} + a_nB_{n-2} \end{vmatrix} \\ &= -a_n \begin{vmatrix} A_{n-2} & A_{n-1} \\ B_{n-2} & B_{n-1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となるので，これを繰り返すと，

$$A_{p-1}B_p - A_pB_{p-1} = (-1)^p a_0 a_1 \cdots a_p, \quad p = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.3}$$

という**行列式公式**が得られる (ただし，特に断らない限り $a_0 = 1$ とする)．これは，次に述べる連分数の収束を判定をする上で，重要になる公式である．

基本漸化式により得られた各 A_p, B_p から，近似分数列 $\{A_p/B_p\}_{p=0}^{\infty}$ を考えることができる．そうすると，連分数に関わる収束や発散，極限といった概念を導入できる．

定義 1.3. 連分数 (1.1) が**収束する**とは，高々有限個の p を除いて $B_p \neq 0$ で，

$$\lim_{p\to\infty} \frac{A_p}{B_p} \tag{1.4}$$

の値が存在し，かつ有限であることをいう．そうでない場合，連分数は**発散する**という．

つまり，行列式公式 (1.3) により，部分分子 $a_p \neq 0$, $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ であるような連分数においては，A_p と B_p が同時に 0 をとらないことが分かる．よって，式 (1.4) における有限な極限の存在が，分母 B_p が 0 をとらないことを保証している．

連分数の各要素 a_p, b_p は，1 つ，もしくはそれ以上のパラメータに依ることがあるが，それ自身が独立変数としてみなされることもある．このような場合は，広義一様収束の問題に関係してくる．

定義 1.4. 連分数 (1.1) が領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上で**広義一様収束する**とは，D 上で，連分数の各要素 a_p, b_p が 1 つもしくは，それ以上の変数からなる函数とするとき，D 内の任意の変数に対して，連分数 (1.1) が収束し，かつ，近似値列 $\{A_p/B_p\}$ が D 上で広義一様収束することである．

ここで，領域という言葉について述べておく．領域とは，複素平面 $\mathbb{C}$ 内の開部分集合で，かつ単連結な集合を指すものとする．

1.2 連分数と級数

ここでは，連分数と級数との関連を見ていくことにする．最初に，連分数の近似値と級数の表現に関わる定理を述べる．

定理 1.5. ([Eu48]) 連分数

$$\frac{1|}{|1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots \tag{1.5}$$

の部分分母 B_p が，$p = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $B_p \neq 0$ で，

$$\rho_p := -\frac{a_{p+1}B_{p-1}}{B_{p+1}}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.6}$$

とおくとき，連分数 (1.5) は，連分数

$$\frac{1|}{|1} - \frac{\rho_1|}{|1+\rho_1} - \frac{\rho_2|}{|1+\rho_2} - \cdots \tag{1.7}$$

と n 次近似分数が等しくなる．さらに，任意の ρ_p に対して，連分数 (1.7) の n 次分子は，無限級数

$$1 + \sum_{p=1}^{\infty} \rho_1\rho_2\cdots\rho_p \tag{1.8}$$

の最初の n 項までの和に等しく，n 次の分母は 1 になる．

証明. 無限級数の先頭から n 項までの和は

$$\begin{aligned}1 + \sum_{p=1}^{n-1}\left(\frac{A_{p+1}}{B_{p+1}} - \frac{A_p}{B_p}\right) &= 1 + \left(\frac{A_2}{B_2} - \frac{A_1}{B_1}\right) + \left(\frac{A_3}{B_3} - \frac{A_2}{B_2}\right) + \cdots + \left(\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}\right) \\ &= 1 - \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_n}{B_n}.\end{aligned}$$

ここで，連分数 (1.5) は，$t_0(\omega) = \omega$, $t_p(\omega) = \dfrac{a_p}{b_p + \omega}$, $(p = 1, 2, 3, \ldots)$, さらに，$a_1 = b_1 = 1$ という変換と見れるので，$A_1/B_1 = t_0 \circ t_1(0) = 1$．ゆえに，

$$1 + \sum_{p=1}^{n-1}\left(\frac{A_{p+1}}{B_{p+1}} - \frac{A_p}{B_p}\right) = \frac{A_n}{B_n}.$$

行列式公式 (1.3) より，この無限級数は，

$$1-\frac{a_2}{B_1B_2}+\frac{a_2a_3}{B_2B_3}-\frac{a_2a_3a_4}{B_3B_4}+\cdots$$

と表現できるので，変換 (1.6) を用いると，無限級数 (1.8) が得られる．今，変換 $s=s_p(\omega)=1+\rho_p\omega$ は，

$$s=s_p(\omega)=\frac{1|}{|1}-\frac{\rho_p|}{|\rho_p+\frac{1}{\omega}},\quad p=1,2,3,\ldots$$

と書いてもよい．これを n 回繰り返し適用し，$\omega=0$ とおくと，

$$\begin{aligned}s_1\circ s_2\circ\cdots s_n(0)&=1+\rho_1(1+\rho_2(1+\rho_3+\cdots\\&=1+\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_2\rho_3+\cdots+\rho_1\cdots\rho_{n-1}\\&=1+\sum_{p=1}^{n-1}\rho_1\rho_2\cdots\rho_p\end{aligned}$$

となり，無限級数 (1.8) の最初の n 項目までの和となり，さらに，

$$s_1\circ s_2\circ\cdots s_{n+1}(\omega)=\frac{1|}{|1}-\frac{\rho_1|}{|\rho_1+1}-\frac{\rho_2|}{|\rho_2}+\cdots+\frac{\rho_n|}{|\rho_n}+\frac{1|}{|1}-\frac{\rho_{n+1}|}{|\rho_{n+1}+\frac{1}{\omega}}.$$

また，連分数 (1.7) は，

$$\frac{1|}{|1}-\frac{\rho_1|}{|\rho_1+1}-\cdots-\frac{\rho_n|}{|\rho_n+1}.$$

ゆえに，$s_1\circ s_2\circ\cdots s_{n+1}(0)$ と連分数 (1.7) は等しくなる．よって，各 $n=1,2,3,\ldots$ に対して，連分数 (1.7) と連分数 (1.5) の n 次近似値が無限級数 (1.8) の最初の n 項目までの和と等しくなる．

最後に，連分数 (1.7) の n 次分母 $B_n=1$ を示す．簡単のため，連分数 (1.7) において，$a'_n:=-\rho_n,\ b'_n:=1+\rho_n,(n=1,2,3,\ldots)$ とすると，

$$t_0(\omega)=\frac{1}{1+\omega},\qquad t_n(\omega)=\frac{a'_n}{b'_n+\omega}$$

と書ける．このときの n 次の分子と分母をそれぞれ A'_n,B'_n とおくと，まず，$A'_0/B'_0=t_0(0)=1/1$ より，$B'_0=1$．$A'_1/B'_1=t_0\circ t_1(0)=\frac{1|}{|1}+\frac{a'_1|}{|b'_1}=b'_1/1$ より，$B'_1=1$．これらと基本漸化式 (1.2) より，$B'_2=b'_2B'_1+a'_2B'_0=b'_2+a'_2=1,\ldots,B'_n=b'_n+a'_n=1$ となる．また，無限級数 (1.8) の n 項目までの和が，連分数 (1.5) と連分数 (1.7) に等しいことと，$B_n=1,\ (n=0,1,2,\ldots)$ であることから，分子 A_n が無限級数 (1.8) の n 項目までの和となることはすぐにわかる． □

では，次に先ほど登場した ρ_p に関して，特徴的な公式を紹介する．これは，ρ_p の定義 (1.6) と，基本漸化式 (1.2) を用いることで帰納的に示すことができる：

系 1.6. ([Wa48]) p 次の部分分子 $b_p=1,\ (p=2,3,4,\ldots)$ とし，$\rho_0=0$ とするとき，

$$\rho_p=-\frac{a_{p+1}(1+\rho_{p-1})}{1+a_{p+1}(1+\rho_{p-1})},\quad p=1,2,3,\ldots \tag{1.9}$$

が成り立ち，また，$a_1 = 0$, $\rho_{-1} = \rho_0 = 0$ と定めれば,

$$\rho_p = -\frac{a_{p+1}}{1 + a_p + a_{p+1} + a_p\rho_{p-2}}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.10}$$

が成り立つ.

1.3 連分数の同値変換

連分数の議論において，ある連分数を**同値変換**と呼ばれる手法を用いて，別の形をした連分数に書き換えることで見通しがよくなることがある.

定義 1.7. 連分数 (1.1) における**同値変換による連分数**とは，ある数列 $\{c_p\}_{p=1}^{\infty}$ があって，任意の自然数 $p \in \mathbb{N}$ に対して $c_p \neq 0$ であり

$$b_0 + \frac{c_1 a_1|}{|c_1 b_1} + \frac{c_1 c_2 a_2|}{|c_2 b_2} + \frac{c_2 c_3 a_3|}{|c_3 b_3} + \cdots \tag{1.11}$$

と表現できる連分数と定める.

つまり，同値変換を行うためには，連分数 (1.11) が構成できるような数列 $\{c_p\}$ を見つけることになる．またこの定義より，任意の近似値が同値変換で不変であることが分かる．実際，A_p, B_p を連分数 (1.1) のそれぞれ p 次の分子と分母とすると，連分数 (1.11) における p 次の分子と分母はそれぞれ

$$c_1 c_2 \cdots c_p A_p, \quad c_1 c_2 \cdots c_p B_p$$

となることが基本漸化式 (1.2) を用いて，帰納的に確かめられる．逆に，ともに部分分子が全て 0 でない 2 つの連分数が共通の近似分数列を持つならば，同値変換により相互に連分数を書き換えることができる．実際，片方の連分数の p 次の分子と分母をそれぞれ A_p, B_p とおき，もう片方の連分数に対しても同様に A'_p, B'_p とおく (ただし，それぞれ A_p, B_p とは相違なるものとする)．各 $p = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，$C_p \neq 0$ で,

$$A'_p = C_p A_p, \quad B'_p = C_p B_p \tag{1.12}$$

であるようなものがあるとする．そこで，$A_{-1} = 1$, $B_{-1} = 0$, $A_0 = b_0$, $B_0 = 1$, $A_p = b_p A_{p-1} + a_p A_{p-2}$, $B_p = b_p B_{p-1} + a_p B_{p-2}$ とすると,

$$\begin{pmatrix} A_{p-1} & A_{p-2} \\ B_{p-1} & B_{p-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_p \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_p \\ B_p \end{pmatrix}$$

と書け，仮定より

$$\det \begin{pmatrix} A_{p-1} & A_{p-2} \\ B_{p-1} & B_{p-2} \end{pmatrix} = A_{p-1}B_{p-2} - A_{p-2}B_{p-1} \neq 0$$

が分かるので，行列 $\begin{pmatrix} A_{p-1} & A_{p-2} \\ B_{p-1} & B_{p-2} \end{pmatrix}$ は正則．ゆえに，逆行列が存在し

$$\begin{pmatrix} b_p \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{p-1} & A_{p-2} \\ B_{p-1} & B_{p-2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_p \\ B_p \end{pmatrix}.$$

同様にして，$A'_{-1} = 1,\ B'_{-1} = 0,\ A'_0 = b_0,\ B'_0 = 1,\ A'_p = b'_pA'_{p-1} + a'_pA'_{p-2},\ B'_p = b'_pB'_{p-1} + a'_pB'_{p-2}$ とすると，式 (1.12) から，

$$\begin{aligned} A_p = \frac{A'_p}{C_p} &= \frac{b'_pA'_p + a'_pA'_{p-2}}{C_p} \\ &= b'_p\frac{C_{p-1}}{C_p}A_{p-1} + a'_p\frac{C_{p-2}}{C_{p-1}}\frac{C_{p-1}}{C_p}A_{p-2}. \end{aligned}$$

ただしここでは，$C_{-1} = C_0 = 1$ とする．$c_p := \dfrac{C_p}{C_{p-1}}$ とおくと，

$$b'_p = c_pb_p, \quad a'_p = c_{p-1}c_pa_p.$$

ゆえに，同値変換により，2 つの連分数の p 次の近似分数が等しくなる．

よく用いる変換として，まず $b_p \neq 0,\ c_p := 1/b_p,\ (p = 1, 2, 3, \ldots)$ とおくと，連分数 (1.11) の任意の部分分母が 1 となる．同様にして，$a_p \neq 0, (p = 1, 2, 3, \ldots), c_o = 1$ とし，c_p を $c_{p-1}c_pa_p = 1$ を満たすように定めると，連分数 (1.11) の任意の部分分子が 1 となる．

1.4 連分数の偶数部分と奇数部分

連分数における**偶数部分**と**奇数部分**とは，与えられた連分数の近似分数列に対し，それぞれ偶数番目の近似値列，奇数番目の近似値列だと考える．簡単のため，連分数 (1.1) ではなく，

$$\frac{1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} + \frac{a_3|}{|1} + \cdots \tag{1.13}$$

で表現される連分数を考える．

定義 1.8. 連分数 (1.13) における**偶数部分**と**奇数部分**をそれぞれ次のように計算される：

$$\frac{1|}{|1 + a_2} - \frac{a_2a_3|}{|1 + a_3 + a_4} - \frac{a_4a_5|}{|1 + a_5 + a_6} - \cdots, \tag{1.14}$$

$$1 - \frac{a_2|}{|1 + a_2 + a_3} - \frac{a_3a_4|}{|1 + a_4 + a_5} - \frac{a_5a_6|}{|1 + a_6 + a_7} - \cdots. \tag{1.15}$$

実際に上記で定めた連分数がそれぞれ，偶数近似列，奇数近似列になっていることを確認しよう．まず偶数部分であるが，連分数 (1.13) を

$$t = t_1(\omega) = \omega, \quad t = t_p(\omega) = \frac{1}{1 + a_p\omega}, \quad p = 2, 3, 4, \ldots$$

という変換だと見ると，$t_1 \circ t_2 \circ \cdots \circ t_n(1) = A_n/B_n$ となる．また，$s_p(\omega) = t_{2p-1} \circ t_{2p}(\omega)$, $(p = 1, 2, 3, \dots)$ とすると，

$$s_1(\omega) = \frac{1}{1 + a_p}, \quad s_p(\omega) = 1 - \frac{a_{2p-1}}{1 + a_{2p-1} + a_{2p}\omega}, \quad p = 2, 3, 4, \dots.$$

さらに，$s_1 \circ s_2 \circ \cdots \circ s_p(1) = t_1 \circ t_2 \circ \cdots \circ t_{2p}(1) = A_{2p}/B_{2p}$ が分かるので，確かに偶数近似値になっている．また，奇数部分に関しても同様にして確かめることができる．

連分数の議論においては，同値変換と，ここで述べた偶数部分と奇数部分という概念が重要になってくる．

1.5 収束に関する基本的な定理

ここでは，これまで定義した連分数の収束と発散に関する問題を考えるが，今後必要になってくる最低限の主張だけを述べることにする．連分数において，収束や発散する条件を考えることは，連分数の要素 a_p, b_p が満たすべき条件を考えることになる．

部分分子 $a_p \neq 0$, $(p = 1, 2, 3, \dots)$ のとき，

$$b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \cdots \tag{1.16}$$

という，部分分子が全て 1 であるような連分数だけを考えることにする．また，部分分母 $b_p \neq 0$, $(p = 1, 2, 3, \dots)$ のとき，

$$b_0 + \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} + \frac{a_3|}{|1} + \cdots \tag{1.17}$$

という，部分分母が全て 1 であるような連分数を考えることにするが，ある自然数 $p \in \mathbb{N}$ があって部分分子 $a_p = 0$ となるような連分数に関して，次の定理が知られている：

定理 1.9. ([Wa48]) 連分数 (1.1) に対して，ある自然数 $m \geq 1$ が存在して，$a_m = 0$ $(m > 1)$, $a_n \neq 0$, $(n = 1, 2, 3, \dots, m-1)$ を満たすとする．このとき，連分数 (1.1) が収束するための必要十分条件は，ある自然数 k $(\leq n)$ があって，$n-1$ 次分母 $B_{n-1} \neq 0$ となることである．さらに，連分数 (1.1) が収束するとき，その値は A_{m-1}/B_{m-1} となる．

証明. 定義 1.3 より，定理に述べられているような自然数 k が存在することがいえれば十分である．逆にそのような自然数 k があるとする．基本漸化式 (1.2) より，$B_{m-1} \neq 0$．そうでないと，$B_m = B_{m+1} = \cdots = 0$ となってしまうからである．いま，

$$\begin{aligned} A_p B_{m-1} - A_{m-1} B_p &= (b_p A_{p-1} + a_p A_{p-2}) B_{m-1} - A_{m-1}(b_p B_{p-1} + a_p B_{p-2}) \\ &= b_p (A_{p-1} B_{m-1} - A_{m-1} B_{p-1}) + a_p (A_{p-2} B_{m-1} - A_{m-1} B_{p-2}) \end{aligned}$$

なので，p を $m, m+1, m+2, \dots$ と進め，$a_m = 0$ を使うと，

$$A_p B_{m-1} - A_{m-1} B_p = 0, \quad p \geq m - 1.$$

ゆえに，$p \geq m-1$ かつ $p \geq k-1$ ならば，$A_p/B_p = A_{m-1}/B_{m-1}$．なので，連分数は収束してその値は A_{m-1}/B_{m-1}． □

この定理より，部分分子が 0 となるよな連分数における収束を考えることは，極限操作とは関係ないが，自然数 $p > k$ において $B_p \neq 0$ となる系の下での代数的問題となる．

定理 1.10. ([Wa48]) 連分数 (1.16) は，部分分子 $b_{2p-1} = 0$, $(p = 1, 2, 3, \dots)$ であるならば，発散する．

証明. 基本漸化式 (1.2) より，$B_1 = b_1 = 0$, $B_3 = b_3B_2 + a_3B_1 = 0$, $B_5 = b_5B_4 + a_5B_4 = 0, \dots$ となることから従う． □

次では，(1.16) の形をした連分数を扱うことにする．連分数の収束・発散に関して b_0 を加えることで影響は受けないので，b_0 を省略することにする．

定理 1.11. ([Ko95]) 無限級数 $\sum b_p$ が絶対収束するならば，連分数

$$\frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \cdots \tag{1.18}$$

は発散する．さらに，各分子と分母列 $\{A_{2p}\}$, $\{A_{2p+1}\}$, $\{B_{2p}\}$, $\{B_{2p+1}\}$ に対して，ある極限 $F_0, F_1, G_0, G_1 (\neq \infty)$ がそれぞれ存在して，

$$F_1G_0 - F_0G_1 = 1 \tag{1.19}$$

を満たす．

証明. 基本漸化式 (1.2) において，$a_n = 1$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$ と見れば，

$$\begin{aligned}
A_{2p} &= b_{2p}A_{2p-1} + A_{2p-2} \\
&= b_{2p}A_{2p-1} + b_{2p-2}A_{2p-3} + A_{2p-4} \\
&= \cdots \\
&= b_{2p}A_{2p-1} + b_{2p-2}A_{2p-3} + \cdots + b_2A_1 \\
&= \sum_{r=1}^{p} b_{2r}A_{2r-1}.
\end{aligned}$$

さらに，仮定から，無限級数 $\sum |b_{2r}|$ は収束している．次に，偶数分子列 $\{A_{2p}\}$ が収束することを示す．いま，p に依らないある定数 $C > 0$ があって，$|A_{2p-1}| \leq C$ を満たすことを示せばよい．ここで，$M := \max\{|A_{-1}|, |A_0|\}$ とすると，

$$\begin{aligned}
|A_1| &= |b_1A_0 + A_{-1}| \leq |b_1| \cdot |A_0| + |A_{-1}| \leq M(1 + |b_1|), \\
|A_2| &= |b_2A_1 + A_0| \leq |b_2| \cdot |A_1| + |A_0| \leq M(1 + |b_1|)|b_2| + M \\
&\leq M(1 + |b_1|)(1 + |b_2|).
\end{aligned}$$

帰納法により，

$$|A_n| \leq M(1 + |b_1|)(1 + |b_2|) \cdots (1 + |b_n|)$$

が各 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して成り立つ．そこで，

$$C := M \prod_{p=1}^{\infty} (1 + |b_p|)$$

をとればよく，無限級数 $\sum |b_{2r}|$ が収束していることから，この無限乗積も収束する．その他の列 $\{A_{2p+1}\}$, $\{B_{2p}\}$, $\{B_{2p+1}\}$ も同様に示せる．また，行列式公式 (1.3) より，

$$A_{2p+1}B_{2p} - A_{2p}B_{2p+1} = 1$$

が分かり，これが任意の p で成り立つので，極限をとると，等式 (1.19) が求まる．したがって，それぞれの相違なる極限 F_0/G_0, F_1/G_1 の間で，連分数の近似値列が振動するので，連分数は発散する．もちろん，片方の極限が値として ∞ をとることもある． □

註 1.12. 連分数

$$\frac{1|}{|i} + \frac{1|}{|i} + \frac{1|}{|i} + \cdots \tag{1.20}$$

は発散する．これは帰納法により，$B_2 = B_5 = B_8 = \cdots = B_{3p-1} = \cdots = 0$ となることから従う．つまりここから，無限級数 $\sum |b_p|$ が発散することは，連分数 (1.18) が収束するための必要条件ではあったが，十分条件ではないことが分かる．

定理 1.11 を拡張した定理や，さらに要素 a_p, b_p に条件を付けることで収束・発散を判定できる定理が存在するが，詳しくは [Wa48, pp.29] に記述があるので参考にされたい．

1.6 基本不等式の第一解釈

ここでは，部分商が $a_p/1$ で表されているような連分数の収束条件を考える．部分分母が全て 0 でない連分数は，同値変換 $c_p = 1/b_p$ $(b_p \neq 0)$ を施すと，部分商を $a_p/1$ の形に変形できる．

定義 1.13. 連分数

$$\frac{1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} + \frac{a_3|}{1} + \cdots \tag{1.21}$$

が**基本不等式**を満たすとは，ある定数列 $r_n \geq 0$, $(n = 1, 2, \dots)$ があって，

$$r_p|1 + a_p + a_{p+1}| \geq r_p r_{p-2}|a_p| + |a_{p+1}|, \quad p = 1, 2, 3, \dots \tag{1.22}$$

を満たすことをいう．ただしここでは，$a_1 = r_0 = r_{-1} = 0$ とする．

基本不等式では，連分数の特に部分分子 a_p に関して注目をしている．連分数の収束においては，ここまででも述べたが，部分分子や部分分母に関して級数を作るアプローチが知られている．基本不等式を用いた同様のアプローチの基礎となるのが次の定理である：

定理 1.14. ([ScWa40]) 連分数 (1.21) が基本不等式 (1.22) を満たすとする．このとき，連分数 (1.21) の p 次の分母 $B_p \neq 0$, $(p = 0, 1, 2, \dots)$ とすると，

$$\rho_p = -\frac{a_{p+1}B_{p-1}}{B_{p+1}}$$

は不等式

$$|\rho_p| \leq r_p, \quad p = 1, 2, 3, \dots, \tag{1.23}$$

を満たす．

証明. 基本不等式 (1.22) より，各 $p=1,2,3,\ldots$ に対して，

$$r_1\,|1+a_2| \geq |a_2|, \quad r_2\,|1+a_2+a_3| \geq |a_3|.$$

したがって，$B_2=1+a_2\neq 0$, $B_3=1+a_2+a_3\neq 0$ であり，さらに，

$$|\rho_1| = \left|\frac{a_2}{1+a_2}\right| \leq r_1, \quad |\rho_2| = \left|\frac{a_3}{1+a_2+a_3}\right| \leq r_2.$$

帰納法から，各 $p=1,2,\ldots,k$ $(k\geq 2)$ に対して，$B_{p+1}\neq 0$, $|\rho_p|\leq r_p$ が成り立っているとする．このとき，$a_{k+2}=0$ と $a_{k+2}\neq 0$ とで場合分けが必要になる．
Case 1：$a_{k+2}=0$ のとき，基本漸化式 (1.2) より，$B_{k+2}=B_{k+1}+a_{k+2}B_k=B_{k+1}\neq 0$. さらに，

$$|\rho_{k+1}| \leq \left|\frac{a_{k+2}B_k}{B_{k+2}}\right| = 0 \leq r_{k+1}.$$

Case 2：$a_{k+2}\neq 0$ のとき，基本不等式 (1.22) から，$p=k+1$ のとき，$r_{k+1}|1+a_{k+1}+a_{k+2}| \geq r_{k+1}r_{k-1}|a_{k+1}|+|a_{k+2}|$. ここで，$r_{k+1}\geq 0$ で，$r_{k+1}=0$ とすると，$0\geq |a_{k+2}|$ となり，$a_{k+2}\neq 0$ に反する．ゆえに，$r_{k+2}>0$. さらに，基本漸化式 (1.2) から，$B_{k+2}=(1+a_k+a_{k+2})B_k-a_ka_{k+1}B_{k-2}$. 帰納法の仮定と，基本不等式 (1.22) より，

$$\begin{aligned}\left|\frac{B_{k+2}}{a_{k+2}B_k}\right| &= \left|\frac{1+a_{k+1}+a_{k+2}}{a_{k+2}} - \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}\cdot\frac{a_kB_{k-2}}{B_k}\right| \\ &\geq \left|\frac{1+a_{k+1}+a_{k+2}}{a_{k+2}}\right| - \left|\frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}\right| r_{k-1} \geq \frac{1}{r_{k+1}} > 0.\end{aligned}$$

ゆえに，$B_{k+2}\neq 0$, $|\rho_{k+1}|\leq r_{k+1}$. □

連分数 (1.21) が基本不等式 (1.22) を満たしていると，無限級数 $1+\sum r_1r_2\cdots r_p$ は級数

$$\sum_{p=1}^{\infty}\left|\frac{A_p}{B_p}-\frac{A_{p-1}}{B_{p-1}}\right| = 1+\sum_{p=1}^{\infty}\rho_1\rho_2\cdots\rho_p$$

の優級数となる．つまり，各 $p=1,2,3,\ldots$ に対して，

$$\left|\frac{A_p}{B_p}-\frac{A_{p-1}}{B_{p-1}}\right| = |\rho_1\rho_2\cdots\rho_p| \leq r_1r_2\cdots r_p \tag{1.24}$$

となる．この結果を，**基本不等式の第一解釈**とよぶことにする．さらに，定理 1.14 と定理 1.9 から次の定理が分かる：

定理 1.15. ([Wa48]) 連分数 (1.21) が基本不等式 (1.22) を満たし，さらに，ある自然数 $p\in\mathbb{N}$ があって，$a_p=0$ ならば，連分数 (1.21) は収束する．

1.7 Worpitzky の定理

部分分子または部分分母が複素数を値としてとるような連分数に関して，Worpitzky による定理が知られている [Wo65]．この定理を示すにあたり，連分数の自己相似性と固定点の分類により導かれる次の命題を用いることになる．

命題 1.16. ([Wa48]) $a \in \mathbb{C}$ とする．連分数

$$1 + \frac{a|}{|1} + \frac{a|}{|1} + \frac{a|}{|1} + \cdots \tag{1.25}$$

は $a = 1/4 - c$ $(c \in \mathbb{R}_{>0})$ を除いて収束し，極限値 v は次式で与えられる：

$$v = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{if} \quad \mathrm{a} = -\dfrac{1}{4}, \\ \max\left\{ \left| \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \right|, \left| \dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2} \right| \right\} & \text{if} \quad \mathrm{a} \neq -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

厳密な証明には連分数のやや込み入った知識と準備が必要になってしまうので，ここでは紹介のみとする．詳しい内容と証明は，[Wa48, pp.35] を参照されたい．

定理 1.17 (Worpitzky の定理)**.** 領域 $D \subset \mathbb{C}$ とし， 複素数 $z \in D$ に対して，部分分子 a_p は z の函数であるとする，すなわち，$a_{p+1} = a_{p+1}(z)$, $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ とする．さらに，条件

$$|a_{p+1}(z)| \leq \frac{1}{4}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.26}$$

を満たすとする．このとき，次が成り立つ：

(a) 連分数 (1.21) は D 上で広義一様収束する．

(b) 連分数の値と近似値は閉円板

$$\left| z - \frac{4}{3} \right| \leq \frac{2}{3} \tag{1.27}$$

に含まれる．

(c) (a) で現れる定数 $1/4$ が条件 (1.26) で最良の定数であり，領域 (1.27) が近似値の最良の領域となる．

証明. (a) について： 条件 (1.26) より，

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}|1 + a_2| &\geq \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \geq |a_2|, \\ \frac{2}{4}|1 + a_2 + a_3| &\geq \frac{2}{4}\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \geq |a_3|, \\ \frac{p}{p+2}|1 + a_p + a_{p+1}| &\geq \frac{p}{2(p+2)} = \frac{p(p-2)}{(p+2)p} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &\geq \frac{p}{p+2} \cdot \frac{p-2}{p}|a_p| + |a_{p+2}|, \quad p = 3, 4, 5, \ldots \end{aligned}$$

なので，各 $p = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，$r_p := p/(p+2)$ とおけば，基本不等式 (1.22) を満たす．さらに

$$
\begin{aligned}
1 + \sum_{p=1}^{\infty} r_1 r_2 \cdots r_p &= 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \cdots \cdot \frac{p}{p+2} \right) \\
&= 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{(p+1)(p+2)} \\
&= 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} \right) = 2.
\end{aligned}
$$

ゆえに，連分数 (1.21) は，各 $p = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，$|a_{p+1}| \leq 1/4$ で広義一様収束する．そして，$1 + \sum r_1 r_2 \cdots r_p = 2$ より，連分数の絶対値は 2 を超えることはない．また，ある自然数 $p \in \mathbb{N}$ があって，部分分子 $a_p = 0$ となる場合も同様である．

(b) について： いま，

$$
z = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} w} \tag{1.28}
$$

という形の連分数を考える．ここで，$w = \dfrac{x_1|}{|1} + \dfrac{a_3|}{|1} + \dfrac{a_4|}{|1} + \cdots$ であり，$|x_1| \leq 1$ である．ここから，$|w| \leq 2$ が直ちに分かる．連分数の任意の近似値は (1.28) の形をした連分数で表現できるので，

$$
|w| \leq 4 \left| \frac{z-1}{z} \right| \leq 2, \quad \text{もしくは,} \quad \left| z - \frac{4}{3} \right| \leq \frac{2}{3}
$$

と書ける．これは，$|w| \leq 2$ に関するメビウス変換 $z = \frac{1}{1+\frac{1}{4}w}$ だと考えると，$z(2) = 2/3$, $z(-2) = 2$, $z(2i) = 4/3 - 2i/3$ となることを用いることで，写った先の円領域 $\left| z - \frac{4}{3} \right| \leq \frac{2}{3}$ が定まる．

(c) について： 定数 $1/4$ が条件 (1.26) の最良の定数であることは，いま，自然数 $p \in \mathbb{N}$ に対して，$a_{p+1} = c$ $(c > 1/4)$, としたとき，命題 1.16 より，連分数は発散することから分かる．また，領域 (1.27) が最良の領域であることは，特別な連分数

$$
z = \frac{1|}{1|} + \frac{a_2|}{|1} - \frac{1/4|}{|1} - \frac{1/4|}{|1} - \cdots = \frac{1}{1 + 2a_2}
$$

の値が $|a_2| \leq 1/4$ のために，(1.27) で示される領域となることを示せば十分である．これは，(b) と同様に，$|w| \leq 1/4$ に関するメビウス変換 $z = 1/(1+2w)$ を考えれば，領域 (1.27) に写ることが分かる． □

(b) と (c) の結果は，Paydon と Wall [PaWa42] によって示された．さらに彼らは，より一般的に，$|a_{p+1}(z)| \leq t(1-t)$, $(1 < t \leq 1/2)$ のときに，連分数の値が不等式

$$
\left| z - \frac{1}{1-t^2} \right| \leq \frac{t}{1-t^2}
$$

を満たすことを示した．

定義 1.18. 領域 $D \subset \mathbb{C}$ が連分数 (1.21) の**収束集合**であるとは，任意の部分分子 $a_p \in D$, $(p = 2, 3, 4, \dots)$ に対して，連分数 (1.21) が収束することである．

この定義から，定理 1.17 は連分数 (1.21) が収束するために，原点を中心とした最大円近傍の一つが半径 1/4 の円だということを示している．また，収束集合で，円近傍でないさらに大きな近傍があるかどうかについては後に述べることにする．

1.8 部分商が $(1 - g_{p-1})g_p x_p/1$ である連分数の収束

定理 1.17 の連分数は，部分商 $(1 - g_{p-1})g_p x_p/1$ において，$g_n = 1/2$, $|x_p| \le 1$ とした例になる．次の定理で示す：

定理 1.19. ([Wa48]) 数列 $\{g_p\}_{p=1}^{\infty}$ は

$$0 \le g_p < 1, \quad p = 1, 2, 3, \dots, \tag{1.29}$$

または

$$0 < g_p \le 1, \quad p = 1, 2, 3, \dots \tag{1.30}$$

のいずれかを満たすものとする．このとき，以下が成り立つ：

(a) 連分数

$$\frac{g_1|}{|1} + \frac{(1 - g_1)g_2 x_2|}{|1} + \frac{(1 - g_2)g_3 x_3|}{|1} + \cdots \tag{1.31}$$

は $|x_p| \le 1$, $(p = 2, 3, 4, \dots)$ に対して広義一様収束する．

(b) 連分数の値と近似値は円領域

$$|z| \le 1 - \frac{1}{S} \tag{1.32}$$

に含まれる．ここで，

$$S = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{g_1 g_2 \cdots g_p}{(1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_p)} \tag{1.33}$$

であるが，無限大の値をとることも考慮する．そして，$x_p = 1, (p = 2, 3, 4, \dots)$ に対して連分数の値は $1 - 1/S$ となる．

(c) 連分数の値と近似値は閉円板

$$\left| z - \frac{1}{2 - g_1} \right| \le \frac{1 - g_1}{2 - g_1} \tag{1.34}$$

に含まれる．

証明. 以下で

$$\frac{g_1|}{|1} - \frac{(1 - g_1)g_2|}{|1} - \frac{(1 - g_2)g_3|}{|1} - \cdots \tag{1.35}$$

という形の連分数を考える．便宜的に，各 $p = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，$\theta_p := (1 - g_p)g_{p+1}$ とおく．また，P_n, Q_n をそれぞれ，連分数 (1.35) の n 次の分子と分母とおくと，基本漸化式 (1.2) より，各 $n = 2, 3, 4, \ldots$ に対して，次の漸化式を満たす：

$$\begin{aligned} &P_n = P_{n-1} - \theta_p P_{n-2}, \\ &Q_n = Q_{n-1} - \theta_p Q_{n-2}, \\ &P_0 = 0, \quad P_1 = g_1, \quad Q_0 = 1, \quad Q_1 = 1. \end{aligned} \tag{1.36}$$

さらに，このことより，

$$\begin{aligned} Q_n = &(1 - g_1)(1 - g_2)(1 - g_3) \cdots (1 - g_n) \\ &+ g_1(1 - g_2)(1 - g_3) \cdots (1 - g_n) \\ &+ g_1 g_2 (1 - g_3) \cdots (1 - g_n) + \cdots \\ &+ g_1 g_2 \cdots g_{n-1}(1 - g_n) + g_1 g_2 \cdots g_n, \\ P_n = &Q_n - (1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_n). \end{aligned} \tag{1.37}$$

これは，ともに帰納法により確かめられる．ゆえに，条件 (1.29), (1.30) のどちらを仮定しても，各 $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，$Q_n > 0$．いま，漸化式 (1.36) と基本漸化式 (1.2) から，

$$Q_{n+2} = (1 - \theta_{n+1} - \theta_{n+2})Q_n - \theta_n \theta_{n+1} Q_{n-2}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

なので，

$$r_p := \frac{\theta_{p+1} Q_{p-1}}{Q_{p+1}}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.38}$$

とおくと，

$$\theta_{p+1} = (1 - \theta_p - \theta_{p+1})r_p - r_p r_{p-2} \theta_p.$$

したがって，各 $p = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，$|a_{p+1}| \leq \theta_{p+1}$ なので，

$$\begin{aligned} r_p |1 + a_p + a_{p+1}| \geq r_p(1 - \theta_p - \theta_{p+1}) &= r_p r_{p-2} \theta_p + \theta_{p+1} \\ &\geq r_p r_{p-2} |a_p| + |a_{p+1}|, \end{aligned}$$
$$r_0 = r_{-1} = 0, \quad \theta_1 = a_1 = 0.$$

つまり，連分数 (1.31) は $|x_{p+1}| \leq 1$,（$p = 1, 2, 3, \ldots$）に対して基本不等式を満たす．(a) を示すために，無限級数

$$g_1 \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} r_1 r_2 \cdots r_p \right)$$

が収束することがいえれば十分であるが，これは，定理 1.5 の無限級数に定数 g_1 をかけたものであるので，収束する．また，連分数 (1.35) に対して定理 1.5 を再び使えば，

$$g_1 \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} r_1 r_2 \cdots r_p \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{P_n}{Q_n} = 1 - \frac{1}{S}$$

となる．ただし，S は (1.33) で与えられるものとする．また，この証明から (b) も示せたことになる．
(c) について：連分数の値と任意の近似値を

$$z = \frac{g_1}{1+(1-g_1)w}, \quad |w| \le 1,$$

とすると，これがメビウス変換であることから，円領域 (1.34) となることがわかる． □

この証明は Scott と Wall [ScWa40] に基づいてる．上の定理に関する別証明は，Paydon と Wall [PaWa42] によるものがある．さらに，定理 1.19 の特に (c) が，今回の結果で重要になってくる不等式となる．

定理 1.20. ([Vl01a]) 各 $p = 1, 2, 3, \dots,$ に対して，$0 \le g_p < 1$ とする．無限級数

$$S := 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{g_1 g_2 \cdots g_p}{(1-g_1)(1-g_2)\cdots(1-g_p)}$$

が収束しているならば，連分数

$$\frac{1|}{|1} + \frac{g_1 x_1|}{|1} + \frac{(1-g_1)g_2 x_2|}{|1} + \frac{(1-g_2)g_3 x_3|}{|1} + \cdots \tag{1.39}$$

は $|x_p| \le 1$, $(p = 1, 2, 3, \dots)$ に対して広義一様収束し，その絶対値は S に等しいかまたは小さく，さらに，$x_p = -1$, $(p = 1, 2, 3, \dots)$ に対して，連分数の値は S となる．

証明. まず，連分数 (1.39) は，連分数 (1.31) を x_1 倍し，1 を加え，逆数をとったものであることに注意する．いま，$S \neq \infty$ とすると，連分数 (1.31) について，自身の絶対値と任意の近似値は $1 - 1/S (< 1)$ を超えない．ゆえに，連分数 (1.39) が $|x_p| \le 1$, $(p = 1, 2, 3, \dots)$ に対し，広義一様収束することがわかる．これより，連分数 (1.39) は $S = \infty$ のとき，$x_p = -1$, $(p = 1, 2, 3, \dots)$ に対して発散する．しかし，いまは $S = \infty$ も許しているので，この定理は成り立つ． □

また，上記の定理で用いた S が発散する場合は次が成り立つ：

定理 1.21. ([PaWa42]) 各 $p = 1, 2, 3, \dots,$ に対して，$0 < g_p < 1$ で，無限級数 S が発散しているならば，連分数 (1.39) は，$|x_p| \le 1$, $(p = 1, 2, 3, \dots)$ に対して収束する．ただし，$x_p = -1$ となる少なくとも一つの自然数 $p \in \mathbb{N}$ に対して，$|x_p| \le 1$ とする．

証明. 対偶を示す：任意の自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して，$|x_k| \le 1$ とし，連分数 (1.39) が発散しているとする．連分数 (1.31) は，条件 (1.32) から，$|z_1| \le 1$ なる複素数 $z_1 \in \mathbb{C}$ に関して収束しているので，いま，連分数 (1.39) が発散していることから，$x_1 z_1 = -1$．同様にして，$|x_1| \le 1$ かつ $|z_1| \le 1$ ならば，$|x_1| = 1$ かつ $|z_1| = 1$ となる．しかし，領域 (1.34) より，$|z_1| = 1$ になるのは，$z_1 = 1$ のときのみである．さらに，$x_1 z_1 = -1$ より，$x_1 = -1$．いま，

$$z_1 = \frac{g_1}{1+(1-g_1)x_2 z_2}$$

とする．ここで，

$$z_2 = \frac{g_2|}{|1} + \frac{(1-g_2)g_3x_3|}{|1} + \frac{(1-g_3)g_4x_4|}{|1} + \cdots$$

である．$z_1 = 1$ なので，これは，$x_2 z_2 = -1$ であることを示している．前述の議論を繰り返すと，$z_2 = 1$, $x_2 = -1$ となる．あとは同様にして帰納的に示される． □

連分数 (1.31) の広義一様収束性と絶対値が 1 を超えないことから，$|x_1| \le r < 1$, $|x_p| \le 1$, $(p = 2, 3, 4, \dots)$ に対して，連分数 (1.31) が広義一様収束することが分かる．なので次の定理が分かる：

定理 1.22. ([Wa48]) 各 $p = 1, 2, 3, \dots$ に対して，$0 \le g_p < 1$ または，$0 < g_p \le 1$ とする．このとき，連分数 (1.39) は，$|x_1| \le r < 1$ なる任意の正数 r と，$|x_p| \le 1$, $(p = 2, 3, 4, \dots)$ に対して広義一様収束する．

1.9 基本不等式の第二解釈

定数 $k_1, k_2 \ge 0$ とし基本不等式 (1.21) を次のように書き換える：

$$\begin{aligned} r_1|1+a_2| &\ge (1+k_1)|a_2|, \\ r_1|1+a_2+a_3| &\ge (1+k_2)|a_3|, \\ r_p|1+a_p+a_{p+1}| &\ge r_p r_{p-2}|a_p| + |a_{p+1}|, \quad p = 3, 4, 5, \dots. \end{aligned} \tag{1.40}$$

定理 1.23. ([ScWa40]) 定数 $k_1, k_2 > 0$ として，連分数

$$\frac{1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} + \frac{a_3|}{|1} + \cdots \tag{1.41}$$

が基本不等式 (1.40) を満たすならば，この連分数の偶数部分と奇数部分はそれぞれ収束する．

証明. いま，ある自然数 $p \in \mathbb{N}$ があって，部分分子 $a_p = 0$ ならば，定理 1.15 から，連分数が収束するので，偶数部分も奇数部分も収束している．各 $p = 2, 3, 4, \dots$ に対して，部分分子 $a_p \ne 0$ を仮定すると，基本不等式 (1.40) から，$r_p > 0$, $|1+a_p+a_{p+1}| > 0$, $r_p|1+a_p+a_{p+1}| - |a_{p+1}| > 0$, $(p = 1, 2, 3, \dots)$．ただし，$a_1 = 0$．ここで，$k_1 > 0$ とし，

$$g_p := \frac{r_{2p+1}|1+a_{2p+1}+a_{2p+2}| - |a_{2p+2}|}{r_{2p+1}|1+a_{2p+1}+a_{2p+2}|}, \qquad p = 1, 2, 3, \dots$$

とおく．すると，$0 < g_p < 1$．また，基本不等式 (1.40) から，

$$\begin{aligned} g_1 = \frac{r_3|1+a_3+a_4| - |a_4|}{r_3|1+a_3+a_4|} &\ge \frac{r_1|a_3|}{|1+a_3+a_4|} \\ &\ge \frac{(1+k_1)|a_2 a_3|}{|(1+a_2)(1+a_3+a_4)|}\,; \end{aligned}$$

$$(1-g_{p-1})g_p \geq \frac{|a_{2p}a_{2p+1}|}{|(1+a_{2p-1}+a_{2p})(1+a_{2p+1}+a_{2p+2})|},$$
$$p = 2, 3, 4, \ldots$$

なので，

$$\frac{-a_{2p}a_{2p+1}}{(1+a_{2p-1}+a_{2p})(1+a_{2p+1}+a_{2p+2})} = (1-g_{p-1})g_p x_p,$$
$$p = 1, 2, 3, \ldots$$

となる．ここで，$g_0 = 0$, $|x_1| \leq 1/(1+k_1)$, $|x_p| \leq 1, (p = 2, 3, 4, \ldots)$．同値変換を連分数 (1.41) の偶数部分に施すと，

$$\frac{1}{1+a_2} \cdot \frac{1|}{|1} + \frac{g_1 x_1|}{|1} + \frac{(1-g_1)g_2 x_2|}{|1} + \cdots$$

という連分数になる．これは定理 1.22 から収束していることがわかる．$k_2 > 0$ において，奇数部分に関しての収束は，

$$g_p := \frac{r_{2p+2}|1+a_{2p+2}+a_{2p+3}| - |a_{2p+3}|}{r_{2p+2}|1+a_{2p+2}+a_{2p+3}|}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots$$

と取り直すことで，全く同じ手法で示すことができる． □

この定理で導かれる結果を，**基本不等式の第二解釈**とよぶことにする．この場合，第 1 解釈によって作られた連分数の優級数

$$1 + \sum r_1 r_2 \cdots r_p$$

が発散しても，連分数の収束を示すことができる．

定理 1.24. ([ScWa40]) 連分数 (1.41) が，定数 $k_1, k_2 > 0$ に対して，基本不等式 (1.40) を満たし，各 $p = 2, 3, 4, \ldots$ に対して，部分分子 $a_p \neq 0$ とする．部分分母 $b_1, b_2, \ldots$ は，

$$b_1 = 1, \quad a_{p+1} = \frac{1}{b_p b_{p+1}}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.42}$$

により定まるとする．このとき，連分数 (1.41) は，連分数

$$\frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \cdots \tag{1.43}$$

と同値である．さらに，B_p を連分数 (1.41) の p 次の分母，Q_p を連分数 (1.43) の p 次の分母とすると，

$$Q_p = b_1 b_2 \cdots b_p B_p \tag{1.44}$$

となる．すると以下の不等式が成り立つ：

$$\begin{aligned} r_1 r_3 \cdots r_{2p-1}|Q_{2p}| &\geq k\left(1 + r_1|b_2| + r_1^2 r_3|b_4| + \cdots + r_1^2 r_3^2 \cdots r_{2p-3}^2 r_{2p-1}|b_{2p}|\right), \\ r_2 r_4 \cdots r_{2p}|Q_{2p+1}| &\geq k\left(1 + r_2|b_3| + r_2^2 r_4|b_5| + \cdots + r_2^2 r_4^2 \cdots r_{2p-2}^2 r_{2p}|b_{2p+1}|\right), \end{aligned} \tag{1.45}$$
$$p = 1, 2, 3, \ldots, \quad k > 0 \text{ は定数.}$$

証明．基本不等式 (1.40) に条件 (1.42) を適用すると，

$$\begin{aligned} &r_1|1+b_1b_2| \geq 1+k_1, \quad r_2|b_1b_2b_3+b_1+b_3| \geq 1+k_2, \\ &r_p|b_{p-1}b_pb_{p+1}+b_{p-1}+b_{p+1}| \geq r_pr_{p-2}|b_{p+1}|+|b_{p+1}|, \quad p=3,4,5,\ldots \end{aligned} \tag{1.46}$$

となる．また，$Q_0=1$, $Q_1=b_1=1$, $Q_2=1+b_1b_2$, $Q_3=b_1b_2b_3+b_1+b_3$ から，上の 2 つの不等式は

$$|Q_2|-\frac{1}{r_1}|Q_0| \geq k|b_2|, \quad |Q_3|-\frac{1}{r_2}|Q_1| \geq k|b_3| \tag{1.47}$$

となる．ただし，

$$k := \min\left\{\frac{k_1}{r_1|b_2|},\ \frac{k_2}{r_2|b_3|},\ 1\right\}$$

とする．ゆえに，

$$r_1|Q_2| \geq k(1+r_1|b_2|), \quad r_2|Q_3| \geq k(1+r_2|b_3|). \tag{1.48}$$

そして，不等式 (1.46) と基本漸化式から，

$$\begin{aligned} |Q_{p+3}| &\geq |b_{p+1}b_{p+2}b_{p+3}+b_{p+1}+b_{p+3}| \cdot \left|\frac{Q_{p+1}}{b_{p+1}}\right| - \left|\frac{b_{p+3}}{b_{p+1}}\right| \cdot |Q_{p-1}| \\ &\geq \frac{r_{p+2}r_p|b_{p+3}|+|b_{p+1}|}{r_{p+2}} \cdot \left|\frac{Q_{p+1}}{b_{p+1}}\right| - \left|\frac{b_{p+3}}{b_{p+1}}\right| \cdot |Q_{p-1}| \end{aligned}$$

となるので，

$$|Q_{p+3}|-\frac{1}{r_{p+2}}|Q_{p+1}| \geq r_p\left|\frac{b_{p+3}}{b_{p+1}}\right|\left(|Q_{p+1}|-\frac{1}{r_p}|Q_{p-1}|\right).$$

各 $p=1,3,5,\ldots$ と各 $p=2,4,6,\ldots$ に対してそれぞれ，上の不等式と，不等式 (1.47) も使うと，

$$\begin{aligned} r_{2p-1}|Q_{2p}| &\geq |Q_{2p-2}|+r_1r_3\cdots r_{2p-1}k|b_{2p}|, \\ r_{2p}|Q_{2p+1}| &\geq |Q_{2p-1}|+r_2r_4\cdots r_{2p}k|b_{2p+1}| \end{aligned} \tag{1.49}$$

が従う．これらと，不等式 (1.48) により，不等式 (1.45) が示される． □

特に，

$$\begin{aligned} \left|\frac{A_{p+1}}{B_{p+1}}-\frac{A_p}{B_p}\right| &= \left|\frac{(-1)^{p+2}a_1a_2\cdots a_{p+1}}{B_pB_{p+1}}\right| \\ &= \left|(-1)^{p+2}\cdot\frac{1}{b_1b_2}\cdot\frac{1}{b_2b_3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{b_pb_{p+1}}\frac{1}{B_pB_{p+1}}\right| = \frac{1}{|Q_pQ_{p+1}|} \end{aligned}$$

であることと，これまでの 2 つの定理から，定理 1.24 の仮定を満たす連分数は，

$$\limsup|Q_pQ_{p+1}|=\infty \tag{1.50}$$

であれば収束することがわかる．

1.10 放物定理

いま，基本不等式 (1.40) が，各 $p = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，$r_p = 1$ で成り立っているとし，定数 $k_1, k_2 > 0$ とする，すなわち，

$$
\begin{gathered}
|1 + a_2| > |a_2|, \quad |1 + a_2 + a_3| > |a_3|, \\
|1 + a_p + a_{p+1}| \geq |a_p| + |a_{p+1}|, \quad p = 3, 4, \ldots.
\end{gathered} \tag{1.51}
$$

このとき，ある自然数 $p \in \mathbb{N}$ があって，部分分子 $a_p = 0$ とすると，連分数は収束していることが分かる (c.f. 定理 1.15)．また，定数 $m_1, m_2, \ldots > 0$ として，

$$
m_1 < 1, \quad m_p + m_{p+1} \leq 1, \quad p = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.52}
$$

とし，さらに

$$
|a_{p+1}| - \Re(a_{p+1}) \leq m_p, \quad p = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.53}
$$

が成り立っていれば，上記の条件が満たされる．実際，

$$
|1 + a_2| \geq 1 + \Re(a_2) \geq 1 + |a_2| - m_1 > |a_2|,
$$

$$
\begin{aligned}
|1 + a_p + a_{p+1}| &\geq 1 + \Re(a_p) + \Re(a_{p+1}) \\
&\geq 1 - m_{p-1} - m_p + |a_p| + |a_{p+1}| \\
&\geq |a_p| + |a_{p+1}|, \quad p = 2, 3, 4, \ldots.
\end{aligned}
$$

そこで，次の定理が分かる：

定理 1.25. ([Wa48]) $|a_{p+1}| - \Re(a_{p+1}) \leq m_p, (p = 1, 2, 3, \ldots)$ として，さらに $m_1 < 1$, $m_p + m_{p+1} \leq 1$, $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ とする．このとき，連分数

$$
\frac{1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} + \frac{a_3|}{|1} + \cdots \tag{1.54}
$$

が収束することと，以下のいずれかが成り立つことは同値である：

(a) ある自然数 $p \in \mathbb{N}$ があって，部分分子 $a_p = 0$,

(b) 各 $p = 2, 3, \ldots,$ に対して，部分分子 $a_p \neq 0$ で，さらに，

$$
b_1 = 1, \quad a_{p+1} = \frac{1}{b_p b_{p+1}}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots
$$

より定まる無限級数 $\sum |b_p|$ が発散する．

この定理において，$m_p = 1/2$, $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ とすれば，Worpitzky の定理の一般化になっていることが分かる．さらに，一般化された連分数の収束において重要になる以下の**放物定理** [ScWa40] が導かれる．

定理 1.26 (放物定理)**.** 実軸に関して対称な集合 $S \subset \mathbb{C}$ が，連分数 (1.54) の収束集合であるための必要十分条件は，$S \subset \{|z| - \Re(z) \leq 1/2\} =: A$ が有界な集合であることである．さらに，$a_1, a_2, \dots \in A$ であるとき，連分数 (1.52) が収束するための必要十分条件は，次のいずれかが成り立つことである：

(a) ある自然数 $p \in \mathbb{N}$ があって，部分分子 $a_p = 0$,
(b) 各 $p = 2, 3, \ldots,$ に対して，部分分子 $a_p \neq 0$ で，さらに，

$$b_1 = 1, \quad a_{p+1} = \frac{1}{b_p b_{p+1}}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots,$$

より定まる無限級数 $\sum |b_p|$ が発散する．

証明に必要になる命題を 1 つ用意しよう．

命題 1.27. ([Wa48]) $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ とし，$x, y \in \mathbb{R}$ とする．このとき，連分数

$$\frac{1|}{|1} + \frac{z|}{|1} + \frac{\bar{z}|}{|1} + \frac{z|}{|1} + \frac{\bar{z}|}{|1} + \cdots \tag{1.55}$$

が収束するための必要十分条件は，不等式

$$|z| - \Re(z) \leq \frac{1}{2}, \quad \text{i.e.,} \quad y^2 \leq x + \frac{1}{4}$$

を満たすことである．

証明. 十分性について： 任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$a_n \in A$ とすると，$a_n \neq 0$ である．また，このとき，

$$|b_1| = 1, \quad |b_2| = \frac{1}{|z|}, \quad |b_3| = \frac{|z|}{|\bar{z}|} = 1, \ldots$$

となるので，無限級数 $\sum |b_p|$ は発散する．なので，定理 1.25 において，$a_{2p} := z$, $a_{2p+1} := \bar{z}$, $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ とすれば，連分数は収束．
必要性について： 連分数 $\frac{1|}{|1} + \frac{z|}{|1} + \frac{\bar{z}|}{|1} + \cdots$ が収束しているとすると，

$$-z + \frac{z|}{|1} + \frac{\bar{z}|}{|1} + \frac{z|}{|1} + \cdots \tag{1.56}$$

も収束していなければならない．なぜなら，B_p を連分数 (1.56) の p 次の分母，B'_p を連分数 $\frac{z|}{|1} + \frac{\bar{z}|}{|1} + \frac{z|}{|1} + \cdots$ の p 次の分母とそれぞれおくと，基本漸化式から，$B_p = \overline{B'_p}$ となるので，この 2 つの連分数の収束と発散は同時に起きるからである．さらに，連分数 (1.56) の奇数部分を考えると，

$$\frac{|z|^2|}{|1} - \frac{2x|z|^2|}{|1} - \frac{2x|z|^2|}{|1} - \cdots \tag{1.57}$$

となるので，連分数の自己相似性を考えると，$u := \frac{|z|^2|}{|1} - \frac{2x|z|^2|}{|1} - \frac{2x|z|^2|}{|1} - \cdots$ とすると

$$u = \frac{|z|^2}{(1 + 2x) - u}$$

と書くことができる．これが実数解を持つには，判別式 $(1 + 2x)^2 - 4(x^2 + y^2) \geq 0$ が必要．ゆえに，$y^2 \leq x + 1/4$ がわかる． $\square$

では，定理 1.26（放物定理）を示す．

証明. この定理の最後の箇所は，定理 1.25 において，$m_p = 1/2, (p = 1, 2, 3, \ldots)$ としたケースに相当する．なので，条件の十分性は定理 1.25 の最後の部分にすでに含まれている．まず，収束集合は有界集合である．これは，実軸に関して対称な集合 $S \subset \mathbb{C}$ を非有界とすると，無限級数 $\sum |b_p|$ が収束するように，部分分子 $a_2, a_3, \cdots \in S$ がとれる．ゆえに，定理 1.11 から連分数は発散してしまうからである．また，$S \subset A$ であることは，いま，ある複素数 $z = a \in A^c$ があって，$a \in S$ とする．仮定より，S は実軸に関して対称な集合なので，$\bar{a} \in S$．しかし，$a_{2p} := a, a_{2p+1} := \bar{a}, (p = 1, 2, 3, \ldots)$ とすると，命題 1.27 から，連分数は発散． □

定理 1.17 では，連分数 (1.54) の値が，$|a_2|, |a_3|, \cdots \le 1/4$ なる部分分子 $a_1, a_2, \ldots$ に対して，不等式 $|z - 4/3| \le 2/3$ を満たすことを示した．円領域 $|z| \le 1/4$ を方物領域 $|z| - \Re(z) \le 1/2$ に取り替えた結果は次のようになる：

定理 1.28. ([Wa48]) 連分数 (1.54) の値と任意の近似値が，閉円板

$$|z - 1| \le 1, \quad z \ne 0 \tag{1.58}$$

を埋め尽くす．つまり，これより小さい領域はとれないということである．さらに，部分分子 $a_2, a_3, \ldots \in A$ で，定理 1.26 の条件 (a) または (b) が成り立つ値をとる．

証明. 漸化式 (1.9) から，

$$1 + \rho_p = \frac{1|}{|1} + \frac{a_{p+1}|}{|1} + \frac{a_p|}{|1} + \cdots + \frac{a_3|}{|1} + \frac{a_2|}{|1}$$

なので，不等式 (1.23) より，ここでは $r_p = 1, (p = 1, 2, 3, \ldots)$ なので，

$$|\rho_p| \le \left| \frac{1|}{|1} + \frac{a_{p+1}|}{|1} + \frac{a_p|}{|1} + \cdots + \frac{a_3|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} - 1 \right| \le 1.$$

このとき，部分分子 $a_2, a_3, \ldots$ は方物領域 $|z| - \Re(z) \le 1/2$ 上にある独立変数なので，a_n が全てこの方物領域の要素であれば，任意の連分数の近似値は，閉円板 (1.58) にある． □

この定理の証明は，主に Lane [La45] によるものである．別のアプローチとして，幾何的な観点による証明があるが，こちらは [ScWa41] を参照されたい．

第2章　正定値連分数

これまでは，連分数の収束について，$1+\sum \rho_1\rho_2\cdots\rho_p$ という元の連分数と同値な級数を作ることで考えてきた．ここでは，分母が0でないような連分数のある種のクラスを考えることでアプローチする．

2.1　正定値連分数の定義

ここでは連分数

$$\frac{1|}{|b_1+z_1} - \frac{a_1^2|}{|b_2+z_2} - \frac{a_2^2|}{|b_3+z_3} - \cdots \tag{2.1}$$

を考える．ただし，各要素 $a_p, b_p \in \mathbb{C}$：定数, $z_p \in \mathbb{C}, (p=1,2,3,\dots)$．特に断らない限り，$a_p$ ではなく a_p^2 と表記する．以下，$\beta_p := \Im(b_p)$, $y_p := \Im(z_p)$, $\alpha_p := \Im(a_p)$，さらに，$z := (z_1, z_2, z_3, \dots)$ とする．このとき，各変数 z_p を共通の変数 z に取り直してできる連分数を **Jacobi 連分数**という．この Jacobi 連分数については，後の章で詳しく述べることにする．

ここで，基本漸化式を思い出すと次の補題が直ちに従う：

補題 2.1. ([Wa48]) 連分数 (2.1) における p 次の分母 $B_p(z)$, $(p=1,2,3,\dots)$ は，z の函数として次の行列式で与えられる：

$$B_p(z) = \begin{vmatrix} b_1+z_1 & -a_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & b_2+z_2 & -a_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & b_3+z_3 & -a_3 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{p-2} & b_{p-1}+z_{p-1} & -a_{p-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_{p-1} & b_p+z_p \end{vmatrix}. \tag{2.2}$$

ここからは正定値連分数を定義するための準備をする．まず，行列式が $B_p(z)$ であるような変数 $x_p \in \mathbb{C}$ の同次線形方程式

$$\begin{aligned} (b_1+z_1)x_1 - a_1x_2 &= 0, \\ -a_1x_1 + (b_2+z_2)x_2 - a_2x_3 &= 0, \\ &\cdots \\ -a_{p-1}x_{p-1} + (b_p+z_p)x_p &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

を考える．共役複素数 $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_p}$ をかけて辺々足すと，

$$\sum_{r=1}^{p}(b_r + z_r)|x_r|^2 - \sum_{r=1}^{p-1} a_r(x_r\overline{x_{r+1}} + \overline{x_r}x_{r+1}) = 0. \tag{2.4}$$

ここで，$y_r > 0$, $(r = 1, 2, 3, \dots, p)$, $\sum_{r=1}^{p}|x_r|^2 > 0$ に対して，条件

$$\sum_{r=1}^{p}(\beta_r + y_r)|x_r|^2 - \sum_{r=1}^{p-1} \alpha_r(x_r\overline{x_{r+1}} + \overline{x_r}x_{r+1}) > 0 \tag{2.5}$$

を仮定する．上の同次線形方程式 (2.3) と (2.4) が $y_r > 0$ に対して成り立つための必要十分条件は，$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_p = 0$ なので，$y_r > 0$, $(r = 1, 2, 3, \dots, p)$ に対して行列式 $B_p(z) \neq 0$.

ここまでの議論と実 2 次形式とを関連づける補題を次で示す．このアイデアが正定値連分数の基礎となる．

補題 2.2. ([Wa48]) 任意の実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ に対して，不等式

$$\sum_{r=1}^{p}\beta_r\xi_r^2 - 2\sum_{r=1}^{p-1}\alpha_r\xi_r\xi_{r+1} \geq 0 \tag{2.6}$$

が成り立つことと条件 (2.5) が成り立つことは同値である．

証明. 十分性について： y_r を十分小さくとり，各変数 $\xi_r \in \mathbb{R}$ から直ちに分かる．
必要性について： $x_r := u_r + iv_r$, $(u_r, v_r \in \mathbb{R})$ とすると，条件 (2.5) の左辺は，

$$\left(\sum_{r=1}^{p}\beta_r u_r^2 - 2\sum_{r=1}^{p-1}\alpha_r u_r u_{r+1}\right) + \left(\sum_{r=1}^{p}\beta_r v_r^2 - 2\sum_{r=1}^{p-1}\alpha_r v_r v_{r+1}\right) + \sum_{r=1}^{p} y_r|x_r|^2 \geq \sum_{r=1}^{p} y_r|x_r|^2 \tag{2.7}$$

なので，$y_r \downarrow 0$ とすれば示される． □

これより，次の定義を導入することができる．

定義 2.3. 連分数 (16.1) が，各 $p = 1, 2, 3, \dots$ と任意の実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots \in \mathbb{R}$ に対して

$$\sum_{r=1}^{p}\beta_r\xi_r^2 - 2\sum_{r=1}^{p-1}\alpha_r\xi_r\xi_{r+1} \geq 0 \tag{2.8}$$

を満たすとき，**正定値 (連分数)** であるという．

本来，この定義であれば，半正定値とよぶべきであるが，連分数の理論においては，等号も含めて正定値とよぶ．

補題 2.2 より，次の定理が分かる：

定理 2.4. ([WaWe44a]) 連分数 (2.1) が正定値であれば，$y_r > 0$, $(r = 1, 2, 3, \dots)$ に対して，行列式 $B_p(z) \neq 0$.

次の定理は，Wetzel と Wall [WaWe44b] によって示された正定値連分数の係数 a_p, b_p に関するパラメータ表示を与える．

定理 2.5. ([WaWe44b]) 連分数 (2.1) が正定値であるための必要十分条件は，以下がともに満たされることである：

(i) $\beta_p \geq 0, \quad p = 1, 2, 3, \ldots,$

(ii) ある列 $\{g_p\}_{p=0}^{\infty}$ が存在して，$0 \leq g_p \leq 1$，$\alpha_{p+1}^2 = \beta_{p+1}\beta_{p+2}(1-g_p)g_{p+1}$.

証明. 必要性： $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_{n-1} = \xi_{n+1} = 0$, $\xi_n \neq 0$ とすると，条件 (2.6) から，$\beta_n \geq 0$. 次に，$\xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = \cdots = 0$ とすると，条件 (2.6) は，$\beta_1\xi_1^2 - 2\alpha_1\xi_1\xi_2 + \beta_2\xi_2^2 \geq 0$. このためには，$\alpha_1^2 \leq \beta_1\beta_2$ が必要である．つまり，

$$\alpha_1^2 = \beta_1\beta_2(1-g_0)g_1, \quad g_0 = 0, \quad 0 \leq g_1 \leq 1.$$

また，$\beta_1 = 0$ のとき，$g_1 = 0$ とする．$\xi_4 = \xi_5 = \cdots = 0$ のとき，条件 (2.6) は，

$$\left\{(\beta_1(1-g_0))^{1/2}\xi_1 - (\beta_2 g_1)^{1/2}\xi_2\right\}^2 + \beta_2(1-g_1)\xi_2^2 - 2\alpha_2\xi_2\xi_3 + \beta_3\xi_3^3 \geq 0$$

と書ける．$\beta_1 = 0$ のとき，$g_1 = 0$ なので，$\{(\beta_1(1-g_0))^{1/2}\xi_1 - (\beta_2 g_1)^{1/2}\xi_2\}^2 = 0$. $\beta_1 > 0$ とし，

$$\xi_1 := \frac{(\beta_2 g_1)^{1/2}\xi_2}{(\beta_1(1-g_0))^{1/2}}$$

とおくと，$\{(\beta_1(1-g_0))^{1/2}\xi_1 - (\beta_2 g_1)^{1/2}\xi_2\}^2 = 0$. ξ_2, ξ_3 は任意なので，

$$\alpha_2^2 \leq \beta_2\beta_3(1-g_1), \quad \text{もしくは,} \quad \alpha_2^2 = \beta_2\beta_3(1-g_1)g_2$$

と書ける．ここで，$0 \leq g_2 \leq 1$. 次に，$g_1 = 1$ もしくは $\beta_2 = 0$ のとき，$g_2 = 0$ とし，$\xi_5 = \xi_6 = \cdots = 0$ とすると，

$$\left\{(\beta_1(1-g_0))^{1/2}\xi_1 - (\beta_2 g_1)^{1/2}\xi_2\right\}^2 + \left\{(\beta_2(1-g_1))^{1/2}\xi_2 - (\beta_3 g_2)^{1/2}\xi_3\right\}^2 + \beta_3(1-g_2)\xi_3^2 - 2\alpha_3\xi_3\xi_4 + \beta_4\xi_4^2 \geq 0.$$

結果として，

$$\alpha_3^2 \leq \beta_3\beta_4(1-g_2), \quad \text{もしくは,} \quad \alpha_3^2 = \beta_3\beta_4(1-g_2)g_3$$

と書ける．ここで，$0 \leq g_3 \leq 1$ であり，$g_2 = 1$ もしくは，$\beta_3 = 0$ のとき，$g_3 = 0$. あとはこれを繰り返すことで示される．

十分性：

$$\sum_{r=1}^{p}\beta_r\xi_r^2 - 2\sum_{r=1}^{p}\alpha_r\xi_r\xi_{r+1} = g_0\beta_1\xi_1^2 + (1-g_{p-1})\beta_p\xi_p^2 + \sum_{r=1}^{p}\left\{(\beta_r(1-g_{r-1}))^{1/2} - (\beta_{r+1}g_r)^{1/2}\xi_{r+1}\right\}^2 \geq 0$$

より条件 (2.6) が分かる． □

この定理をさらに一般化するために，次の系を設ける：

系 2.6. ([Wa48]) 定理 2.5 において，$g_0 = 0$ とする．このとき，条件 (2.6) が成り立っているとすると，不等式

$$\sum_{r=1}^{p} \beta_r \xi_r^2 - 2\sum_{r=1}^{p-1} \alpha'_r \xi_r \xi_{r+1} \geq 0$$

が成り立つ．ただしここで，各 $r = 1, 2, 3, \dots, p-1$ に対して，$\xi_r \in \mathbb{R}$ かつ $|\alpha'_r| \leq |\alpha_r|$.

証明. これは，2 次形式

$$\sum_{r=1}^{p} \beta_r |\xi_r|^2 - 2\sum_{r=1}^{p-1} |\alpha_r||\xi_r||\xi_{r+1}| = g_0\beta_1|\xi_r|^2 + (1-g_{p-1})\beta_p|\xi_p|^2 + \sum_{r=1}^{p-1} \left\{ (\beta_r(1-g_{r-1}))^{1/2}|\xi_r| - (\beta_{r+1}g_r)^{1/2}|\xi_{r+1}| \right\}^2$$

が非負値であることからすぐに分かる． □

系 2.7. ([Wa48]) 定理 2.5 において，条件 (ii) を次のように変えても，連分数の正定値性は保たれる：ある列 $\{g_p\}$ が存在して，

$$0 \leq g_{n-1} \leq 1, \quad \alpha_n^2 \leq \beta_n\beta_{n+1}(1-g_{n-1})g_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots. \tag{2.9}$$

この系 2.7 を用いることで，条件 $|a_n^2| - \Re(a_n^2) = 2\alpha_n^2$ は，

$$0 \leq g_{n-1} \leq 1, \quad |a_n^2| - \Re(a_n^2) \leq 2\beta_n\beta_{n+1}(1-g_{n-1})g_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{2.10}$$

と書き換えることができる．このような，正定値に関する判別法を用いると，前章で扱った連分数に関しても，正定値連分数であるかどうか示せる．実際，各 $p = 1, 2, 3, \dots$ に関して $a_{p-1} =: c_p^2$ とおくと

$$\frac{1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} + \frac{a_3|}{|1} + \cdots = \frac{i|}{|i} - \frac{c_1^2|}{|i} - \frac{c_2^2|}{|i} - \cdots$$

と同値変換できる．右辺の連分数に注目すると，これは，$\beta_p = 1$, $(p = 1, 2, 3, \dots)$ とした場合になる．すると，条件 (2.10) は，

$$0 \leq g_{n-1} \leq 1, \quad |c_n^2| - \Re(c_n^2) \leq 2(1-g_{n-1})g_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{2.11}$$

となる．さらに，$g_n = 1/2$, $(p = 0, 1, 2, \dots)$ とすると，放物定理における条件 $|z| - \Re(z) \leq 1/2$ になる．また，$(1-g_0)g_1 < 1/2$, $(1-g_{n-1})g_n + (1-g_n)g_{n+1} < 1/2$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$ とすると，条件 (1.53) になる．

この節の議論を振り返ると，正定値連分数となるための同値条件を考える際に，列 $\{g_p\}$ が現れた．実際，次で述べる正定値連分数の収束に関してこの数列が重要になってくる．

2.2　縮小円列

第 1 章では，部分分母が全て 1 であるような連分数の近似値がある円領域の内部に存在することを見た．同様の議論が正定値連分数に関してもできる．ここでは，$\Im(z_1) > 0$, $\Im(z_r) \geq 0$, $(r = 2, 3, 4, \dots)$ を仮定する．まず次の補題を設ける：

補題 2.8. ([DeWa45]) いま，変換

$$t = t_p(w) = b_p + z_p - \frac{a_p^2}{w}, \quad p = 1, 2, 3, \dots \tag{2.12}$$

を考える．ここで，

$$\begin{aligned} &\beta_p = \Im(b_p) \geq 0, \quad \alpha_p^2 = \Im(a_p)^2 \leq \beta_p \beta_{p+1}(1 - g_{p-1}) g_p, \\ &0 \leq g_{p-1} \leq 1, \quad p = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{2.13}$$

である．このとき，$\Im(w) \geq \beta_{p+1} g_p$ ならば，$\Im(t) \geq \beta_p g_{p-1} + y_p$ である．ただし，$y_p = \Im(z_p)$, $(p = 1, 2, 3, \dots)$.

証明. 仮定より，$\Im(w) \geq \beta_{p+1} g_p$ なので，$y_p > 0$ に対して，

$$\Im(w) \geq \beta_{p+1} g_p \frac{\beta_p (1 - g_{p-1})}{\beta_p (1 - g_{p-1}) + y_p} \geq \frac{\alpha_p^2}{\beta_p (1 - g_{p-1}) + y_p}.$$

ここで，$|a_p^2| - \Re(a_p^2) = 2\alpha_p^2$ より，$\alpha_p^2 = \left\{ a_p^2 - \Im(i a_p^2) \right\} / 2$ を用いると，

$$\left| w + \frac{i a_p^2}{2\{\beta_p (1 - g_{p-1}) + y_p\}} \right| \geq \frac{|a_p^2|}{2\{\beta_p (1 - g_{p-1}) + y_p\}}.$$

さらに，

$$\left| \frac{w}{a_p^2} + \frac{i}{2\{\beta_p (1 - g_{p-1}) + y_p\}} \right| \geq \frac{1}{2\{\beta_p (1 - g_{p-1}) + y_p\}}.$$

ゆえに，

$$\beta_p + y_p - \Im\left(\frac{a_p^2}{w} \right) \geq \beta_p g_{p-1}, \quad もしくは, \quad \Im(t) \geq \beta_p g_{p-1}$$

と書ける．これが任意の y_p に対して成り立っているので，$y_p \downarrow 0$ とすれば，$\beta_p - \Im(a_p^2/w) \geq \beta_p g_{p-1}$．ゆえに，

$$\beta_p + y_p - \Im\left(\frac{a_p^2}{w} \right) \geq \beta_p g_{p-1} + y_p, \quad もしくは, \quad \Im(t) \geq \beta_p g_{p-1} + y_p.$$

□

次に，$t = t_0(w) = 1/w$ を，$\Im(w) \geq \beta_1 g_0 + y_1$, $y_1 > 0$ に対して行うと，

$$K_0(z)\colon \quad \left| t + \frac{i}{2(\beta_1 g_0 + y_1)} \right| \leq \frac{1}{2(\beta_1 g_0 + y_1)} \tag{2.14}$$

が分かる．ただしこのとき，$\beta_1 g_0+y_1>0$．次は，$\Im(w)\geq \beta_2 g_1$ で，$t=t_0(t_1(w))=1/\{b_1+z-(a_1^2/w)\}$ を考えると，直前の議論から，$\Im(w)\geq g_1\beta_2$ に対して，$\Im(t_1(w))\geq g_0\beta_1+y_1$ が分かるので，この領域 $(K_1(z)$ とよぶ$)$ は，$K_0(z)\supset K_1(z)$ となる．また，点 $w=\infty$ は $\Im(w)\geq \beta_2 g_1$ の境界上にあるので，$t_0(t_1(\infty))=A_1(z)/B_1(z)\in\partial K_1(z)$．さらに $a_1=0$ であれば，$K_1(z)=1/(b_1+z_1)=A_1(z)/B_1(z)$ という 1 点集合であることが分かる．いま，任意の自然数 $p\geq 1$ に対して，$K_p(z)$ を $\Im(w)\geq g_p\beta_{p+1}$ に対して

$$t=t_0\circ t_1\circ\cdots\circ t_p(w)=\frac{1|}{|b_1+z_1}-\frac{a_1^2|}{|b_2+z_2}-\cdots-\frac{a_{p-1}^2|}{|b_p+z_p-a_p^2/w},\tag{2.15}$$
$$\Im(z_r)\geq 0,\quad r=2,3,4,\ldots$$

という変換で写した領域とすると，$t_0\circ t_1\cdots t_p(\infty)=A_p(z)/B_p(z)\in\partial K_p(z)$ が分かる．さらに，最初に $a_p=0$ となるような自然数 $p\geq m$ に対しては，$K_p(z)=t=t_0\circ t_1\circ\cdots\circ t_m(\infty)$．最後に，変換 (2.14) から，

$$K_0(z)\supset K_1(z)\supset K_2(z)\supset\cdots\tag{2.16}$$

が分かり，任意の $t\in K_p(z)$ に対して次が成り立つ：

$$\Im(t)\leq 0,\quad |t|\leq\frac{1}{g_0\beta_1+y_1}\leq\frac{1}{g_0\beta_1}.\tag{2.17}$$

ただし，ここで，$g_0\beta_1+y_1>0$, $y_r\geq 0$, $(r=2,3,4,\ldots)$ である．特に連分数 (2.1) の近似値に対して，

$$\Im\left(\frac{A_p(z)}{B_p(z)}\right)\leq 0,\quad\left|\frac{A_p(z)}{B_p(z)}\right|\leq\frac{1}{g_0\beta_1+y_1}\leq\frac{1}{y_1},\tag{2.18}$$

ただし，ここで，$g_0\beta_1+y_1>0$, $g_r\geq 0$, $(r=2,3,4,\ldots)$ である．つまり，正定値連分数の近似値は全て，下半平面にあるということが分かる．さらに，任意の自然数 $p\geq 1$ に対して，$A_p(z)/B_p(z)\in K_0(z)$ である．

定理 2.9. ([DeWa45]) 条件 (2.13) において，$g_{p-1}\beta_p>0$, $(p=1,2,3,\ldots)$ とするとき，$\Im(z_r)\geq 0, (r=1,2,3,\ldots)$ に対して，行列式 $B_p(z)\neq 0$.

証明. まず，各 $p=1,2,3,\ldots$ に対して，$a_p\neq 0$ のときは，行列式公式より，$B_p\neq 0$．次に，ある自然数 $p\in\mathbb{N}$ があって，$a_p=0$ となるときは，行列式 (2.2) より，連分数の分母は

$$B_p(z)=(b_p+z_p)B_{p-1}(z)-a_p^2B_{p-2}(z)$$

で与えられるが，仮定より，考えている連分数は正定値連分数なので，条件 (2.18) より，$B_p\neq 0$ が分かる． □

さらに定理 1.9, 2.4, 2.9 から，次の定理が導ける：

定理 2.10. ([Wa48]) 連分数 (2.1) は正定値連分数であるとし，$\#\{p\in\mathbb{N}\colon a_p=0\}\geq 1$ とする．このとき，$\Im(z_r)>0$, $(r=1,2,3,\ldots)$ に対して，連分数 (2.1) は収束する．さらに，各 $p=1,2,3,\ldots$ に対して，$g_{p-1}\beta_p>0$ ならば，$\Im(z_r)\geq 0$, $(r=1,2,3,\ldots)$ に対して連分数 (2.1) は収束する．

以降は，特に断らない限り，各 $p=1,2,3,\ldots$ に対して，$a_p \neq 0$ とする．

ここから縮小円列の性質を調べる．$\Im(z_1)>0$, $\Im(z_r)\geq 0$, $(r=2,3,4\ldots)$ であるような任意の複素数 $z_r\in\mathbb{C}$ に関して次の 2 つの場合が考えられる．

Case 1(極限点となる場合):
各円 $K_p(z)$ における半径を $r_p(z)$ とする．$\lim_{p\to\infty} r_p(z)=0$ であれば，ある極限函数 $f(z)$ があって，$\lim_{p\to\infty} A_p(z)/B_p(z)=f(z)$ となる．

Case 2(極限円となる場合):
各円 $K_p(z)$ における半径を $r_p(z)$ とする．ある正定数 $c>0$ があって，$\lim_{p\to\infty} r_p(z)=c$ であれば，このときは，収束して極限を持つかどうかは不明である．

つまり，この 2 つの場合を調べるには，半径 $r_p(z)$ を調べればよいことになる．便宜上，

$$X_{p+1}:=\frac{A_p}{a_1a_2\cdots a_p},\quad Y_{p+1}:=\frac{B_p}{a_1a_2\cdots a_p},\quad p=1,2,3,\ldots \tag{2.19}$$

とする．ただし，$X_1=0, Y_1=1, X_0=-1, Y_0=0$．上の多項式は

$$\begin{aligned}&-a_pX_{p-1}+(b_p+z_p)X_p-a_pX_{p+1}=0,\\&-a_pY_{p-1}+(b_p+z_p)Y_p-a_pY_{p+1}=0,\quad p=1,2,3,\ldots\end{aligned} \tag{2.20}$$

を満たす．また，連分数 (2.1) の形に合わせるため，$a_0=1$ とする．行列式公式は

$$X_{p+1}Y_p-X_pY_{p+1}=\frac{1}{a_p},\quad p=1,2,3,\ldots \tag{2.21}$$

に変わる．いま，

$$0\leq g_p\leq 1,\quad \alpha_p^2=\beta_p\beta_{p+1}(1-g_{p-1})g_p,\quad p=1,2,3,\ldots \tag{2.22}$$

とする．変換 (2.15) の代わりに

$$t=t_0\circ t_1\circ\cdots\circ t_p(w)=\frac{A_p(z)w-a_p^2A_{p-1}(z)}{B_p(z)w-a_p^2B_{p-1}(z)}$$

と書くことにし，多項式 (2.19) を用いると，

$$t=\frac{X_{p+1}w-a_pX_p}{Y_{p+1}w-a_pY_p} \tag{2.23}$$

となる．上式において，$w=a_pY_p/Y_{p+1}$ とすると，$t=\infty$．したがって，円領域 $K_p(z)$ の中心点を C_p とすると，C_p と ∞ は対称点である．また，$w=a_pY_p/Y_{p+1}$ の $\Im(w)=g_p\beta_{p+1}$ に関する対称点は，

$$\frac{\overline{a_p}\overline{Y_{p-1}}}{\overline{Y_p}}+2ig_p\beta_{p+1} \tag{2.24}$$

であるので，

$$C_p=\frac{X_{p+1}\left(\dfrac{\overline{a_p}\overline{Y_{p-1}}}{\overline{Y_p}}+2ig_p\beta_{p+1}\right)-a_pX_p}{Y_{p+1}\left(\dfrac{\overline{a_p}\overline{Y_{p-1}}}{\overline{Y_p}}+2ig_p\beta_{p+1}\right)-a_pY_p}. \tag{2.25}$$

さらに，$t_0 \circ t_1 \circ \cdots \circ t_p(\infty) = A_p(z)/B_p(z) \in \partial K_p(z)$．ゆえに，

$$r_p(z) = \left| C_p - \frac{X_{p+1}}{Y_{p+1}} \right|.$$

式 (2.25) と式 (2.21) を使うと，

$$2r_p(z) = \frac{1}{\left| g_p\beta_{p+1}|Y_{p+1}| - \Im\big(a_p Y_p \overline{Y_{p+1}}\big) \right|}. \tag{2.26}$$

より扱いやすくするため，多項式 (2.20) において $\overline{Y_p}$ を両辺にかけると，

$$-a_{r-1}Y_{r-1}\overline{Y_r} + (b_r + z_r)|Y_r|^2 - a_r Y_{r+1}\overline{Y_r}, \quad r = 1, 2, 3, \ldots.$$

$Y_0 = 0$ に気をつけて，両辺の和をとれば，

$$\sum_{r=1}^{p}(b_r + z_r)|Y_r|^2 - \sum_{r=1}^{p} a_r \left(Y_{r+1}\overline{Y_r} + \overline{Y_{r+1}}Y_r\right) = -a_p\overline{Y_{p+1}}Y_p.$$

虚部をとると，

$$\Im(a_p\overline{Y_{p+1}}Y_p) = \sum_{r=1}^{p} \alpha_r \left(Y_{r+1}\overline{Y_r} + \overline{Y_{r+1}}Y_r\right) - \sum_{r=1}^{p}(\beta_r + y_r)|Y_r|^2. \tag{2.27}$$

ゆえに，

$$2r_p(z) = \frac{1}{\sum_{r=1}^{p+1}\beta_r|Y_r|^2 - \sum_{r=1}^{p}\alpha_r\left(Y_{r+1}\overline{Y_r} + \overline{Y_{r+1}}Y_r\right) + \sum_{r=1}^{p} y_r|Y_r|^2 - (1-g_p)\beta_{p+1}|Y_{p+1}|^2} \tag{2.28}$$

であり，さらに整理すると，

$$2r_p(z) = \frac{1}{g_0\beta_1 + \sum_{r=1}^{p}\left(y_r|Y_r|^2 + \left|(\beta_r(1-g_{r-1}))^{1/2}\,Y_r - (\beta_{r+1}g_r)^{1/2}Y_{r+1}\right|^2\right)}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots. \tag{2.29}$$

これは，連分数の正定値性を仮定したことで成り立っている．

2.3 正定値連分数と放物定理

正定値連分数に必要な条件の話題の中で，放物定理が，正定値連分数の特別なケースになっていることを述べた．そうなると，放物定理で与えられた収束条件をこれまで議論してきたことにそのまま機械的に使えるか，という疑問があがる．これに答えるために，円

領域 $K_p(z)$ の中心を $C_p(z)$ として，$C_p(z)$ が p 次の分子 $A_p(z)$, 分母 $B_p(z)$ を使って表現できることを示す．まず，縮小円列 (2.16) から，中心

$$C_p = \frac{\overline{a_p}^2 A_p \overline{B_{p-1}} - a_p^2 A_{p-1}\overline{B_p} + 2ig_p\beta_{p+1}A_p\overline{B_p}}{\overline{a_p}^2 B_p \overline{B_{p-1}} - a_p^2 B_{p-1}\overline{B_p} + 2ig_p\beta_{p+1}B_p\overline{B_p}}$$

と書ける．ゆえに，

$$\begin{aligned} r_p(z) &= \left| C_p - \frac{A_p}{B_p} \right| \\ &= \frac{|a_1a_2\cdots a_p|^2}{|B_p + ia_p^2 B_{p-1}|^2 - |a_p^2 B_{p-1}|^2 + (2g_p\beta_{p+1}-1)|B_p|^2}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

連分数 (2.1) において，$z_p := 0$, $b_p := i$, $(p = 1, 2, 3, \dots)$ とおくと，連分数 (2.1) は

$$\frac{1|}{|i} - \frac{a_1^2|}{|i} - \frac{a_2^2|}{|i} - \cdots \tag{2.31}$$

となる．さらに，基本漸化式から，$B_p + ia_p^2 B_{p-1} = -iB_{p+1}$ がわかる．また，$g_p := 1/2$, $(p = 1, 2, 3, \dots)$ とおくと，$\beta_p = 1$ であることにも気をつけて，

$$r_p = r_p(0) = \frac{|a_1a_2\cdots a_p|^2}{|B_{p+1}|^2 - |a_p^2 B_{p-1}|^2}.$$

いま，同値変換

$$c_1 = 1, \quad a_p^2 = \frac{1}{c_p c_{p+1}}, \quad Q_p = c_1c_2\cdots c_p B_p, \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

を考えると，半径

$$r_p = \frac{|c_{p+1}|}{|Q_{p+1}| - |Q_{p-1}|} \cdot \frac{1}{|Q_{p+1}| + |Q_{p-1}|}. \tag{2.32}$$

同時に，連分数 (2.31) は

$$\frac{1|}{|c_1 i} - \frac{1|}{|c_2 i} - \frac{1|}{|c_3 i} - \cdots \tag{2.33}$$

に変わる．さらに，分子と分母を $(-i)$ 倍すると，

$$\frac{-i|}{|c_1} + \frac{1|}{|c_2} + \frac{1|}{|c_3} + \cdots$$

となる．ただし，この同値変換は，各 $p = 1, 2, 3, \dots$ に対して，$a_p \neq 0$ のときのみ行える．また，$\#\{p \in \mathbb{N} : a_p = 0\} \geq 1$ であるときは，定理 2.10 より収束性が分かる．次に，無限級数 $\sum |c_p|$ が発散するとき，$\lim_{p\to\infty} r_p = 0$ を示す．つまり，無限級数 $\sum |c_p|$ が発散するときは，極限点となる場合に該当するので，連分数は収束する．実際，不等式

$$|a_p^2| - \Re(a_p^2) \leq \frac{1}{2}, \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

を満たすので，

$$|1+a_1^2| \geq \frac{1}{2} + |a_1^2|, \quad |1+a_p^2+a_{p+1}^2| \geq |a_p^2| + |a_{p+1}^2|, \quad p = 1, 2, 3, \ldots$$

もしくは，

$$|1+c_1c_2| \geq \frac{1}{2}|c_1c_2| + 1,$$
$$|c_pc_{p+1}c_{p+2} + c_{p+2} + c_p| \geq |c_{p+2}| + |c_p|, \quad p = 1, 2, 3, \ldots$$

となる．ゆえに，不等式 (1.47) より，

$$|Q_2| - |Q_0| \geq \frac{1}{2}|c_2|, \quad |Q_3| - |Q_1| \geq |c_3| \geq \frac{1}{2}|c_3|$$

もしくは，

$$|Q_2| \geq \frac{1}{2}(1+|c_2|), \quad |Q_3| \geq \frac{1}{2}(1+|c_3|) \tag{2.34}$$

となる．さらに，不等式 (1.49) から，

$$|Q_{2p}| \geq |Q_{2p-2}| + \frac{1}{2}|c_{2p}|, \quad |Q_{2p+1}| \geq |Q_{2p-1}| + \frac{1}{2}|c_{2p+1}|. \tag{2.35}$$

式 (2.32) に不等式 (2.34) と (2.35) を適用すると，

$$r_{2p-1} \leq \frac{1}{1+\sum_{r=1}^{p-1}|c_{2r}|}, \quad r_{2p} \leq \frac{1}{1+\sum_{r=1}^{p-1}|c_{2r+1}|} \tag{2.36}$$

という不等式が得られる．また，$\{K_p(z)\}$ が縮小円列であることから，$r_1 > r_2 > r_3 > \cdots$ となり，極限点となる場合に該当するので，$\lim_{p\to\infty} r_p(z) = 0$.

前節では，正定値連分数であれば，p 次以降の近似分数は，全て円領域 $K_p(z)$ の内部に含まれることを示した．先ほどの証明と組み合わせると，連分数の広義一様収束性の議論ができる．いま，$a^2 := (a_1^2, a_2^2, \ldots)$ とおき，さらに，領域 $D := \{|z| - \Re(z) \leq 1/2\}$ 上で

$$R_p = \begin{cases} \dfrac{1}{\sum_{r=1}^{p}|c_r|}, & a_1a_2\cdots a_p \neq 0, \\ 0, & \text{ある自然数 } k\ (\leq p-1) \text{ があって，} a_k = 0 \end{cases}$$

が 0 に広義一様収束するように a^2 選ぶ．このとき，ある有界集合 $G \subset D$ 上で連分数は広義一様収束する．まとめると次の定理が得られる：

定理 2.11. ([PaWa42]) 連分数

$$\frac{1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} + \frac{a_3|}{|1} + \cdots$$

は，任意の定数 $M > 0$ に対して，

$$|z| - \Re(z) \leq \frac{1}{2}, \quad |z| < M$$

で広義一様収束する．

2.4 連鎖列

連分数の理論において，$(1-g_p)g_{p+1}$ $(0 \leq g_p \leq 1,\ p = 0, 1, 2, \dots)$ という形をした数列はいたるところに現れる．例えば，前述の系 2.7 において，$\beta_p = 1, (p = 1, 2, 3, \dots)$ とすると，条件 (ii) は $\alpha_{p+1}^2 \leq (1-g_p)g_{p+1}$ と書き換えられる．また，$(1-g_p)g_{p+1}x_{p+1}/1$ $(x_{p+1} \in \mathbb{C})$ という形が繰り返される連分数に関しては，収束する条件が与えられることや，任意の近似値が複素平面内のある円領域の中に必ず存在することも述べた．さらには，連分数 (2.1) の各近似値はある複素平面内の縮小円列内に存在するが，この縮小円列の半径も g_p というパラメータを用いて記述できた．

定義 2.12. 数列 $\{a_p\}_{p=1}^{\infty}$ が**連鎖列**であるとは，各 $p = 0, 1, 2, \dots$ に対して，$0 \leq g_p \leq 1$ であるような列 $\{g_p\}_{p=0}^{\infty}$ が存在して，$a_{p+1} = (1-g_p)g_{p+1}$ と書けることをいう．このとき，$\{g_p\}$ を列 $\{a_p\}_{p=1}^{\infty}$ の**パラメータ**という．

例 2.13. 定数項列 $1/4, 1/4, 1/4, \cdots$ は，パラメータ $g_p = 1/2,\ (p = 0, 1, 2, \dots)$ の連鎖列である．

この例で登場した定数項列に関して以下の定理が知られている．

定理 2.14. ([Wa48]) 定数項列 $a, a, a, \cdots$ が連鎖列であるためには，不等式 $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$ を満たすことが必要十分である．

証明. 必要性について： 背理法により示す．各 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して，$0 \leq g_{n-1} \leq 1$ で，

$$(1-g_{n-1})g_n > \frac{1}{4} \tag{2.37}$$

とすると，相加相乗平均より，

$$\frac{(1-g_{n-1})+g_n}{2} \geq \sqrt{(1-g_{n-1})g_n} > \frac{1}{2}.$$

ゆえに，$g_n > g_{n-1}$，$(n = 1, 2, 3, \dots)$ でなければならない．また，$g_0 < g_1 < g_2 < \cdots < 1$ であることから，列 $\{g_n\}$ は単調増加であり，かつ上に有界なので，ある極限 g があって，$\lim_{n\to\infty} g_n = g$ となる．ゆえに，極限をとると

$$\frac{(1-g)+g}{2} \geq \sqrt{(1-g)\cdot g} \geq \frac{1}{2}.$$

したがって，$(1-g)g = 1/4$．ゆえに，$g = 1/2$．しかしこれは仮定に矛盾する．
十分性について： 各 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して，

$$g_n := \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$$

をとればよい． □

ここで，連鎖列のパラメータの取り方は一般に一意的ではないことに注意する．具体的には，例 2.13 においてパラメータとして

$$g'_p := \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p+1}\right), \quad p = 0, 1, 2, \ldots$$

と定めることもできる．一方で，任意の連鎖列には必ず最大・最小パラメータが存在する．

定理 2.15. ([WaWe44b, DeWa45]) 任意の連鎖列は，g_p を自身の勝手なパラメータとしたとき，$m_p \le g_p \le M_p$, $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ であるような最小・最大パラメータを必ずもつ．

証明. いま，数列 $\{a_p\}$ が勝手なパラメータ $\{g_p\}$ を使って，各 $p = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，$a_p = (1 - g_{p-1})g_p$ と書けているとする．各 $p = 1, 2, 3, \ldots$ に対して次で列 m_p を定める：

$$m_0 = 0, \quad m_{p+1} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad m_p = 1, \\ \dfrac{a_{p+1}}{1 - m_p} & \text{if} \quad m_p < 1. \end{cases} \tag{2.38}$$

まず，$m_0 = 0$ なので，$m_0 \le g_0$．帰納法により，k (≥ 1) のとき，$m_k \le g_k$ を仮定すると，$m_k = 1$ または，$m_k < 1$ で $a_{k+1} = 0$ となる場合の 2 通りを考える必要がある．まず，$m_k = 1$ であれば，$m_{k+1} = 0 \le g_{k+1}$ となる．次に，$m_k < 1$ で $a_{k+1} > 0$ であれば，m_p の定義 (2.38) と帰納法の仮定より，

$$m_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{1 - m_k} = \frac{(1 - g_k)g_{k+1}}{1 - m_k} \le \frac{(1 - g_k)g_{k+1}}{1 - g_k} = g_{k+1}.$$

ゆえに，各 $p = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，$m_p \le g_p$．さらに，m_p の定め方から，$m_p \ge 0$ であり，いま示したことから，$m_p \le 1$ である．また，$m_p < 1$ であれば，m_p の定義 (2.38) の両辺を $(1 - m_p)$ 倍して，$a_{p+1} = m_{p+1}(1 - m_p)$．$m_p = 1$ ならば，$1 = m_p \le g_p \le 1$ より，$g_p = 1$．したがって，$a_{p+1} = (1 - g_p)g_{p+1} = 0$．このとき，$(1 - m_p)m_{p+1} = a_{p+1}$．これで，最小パラメータの存在と，それが連鎖列のパラメータとなっていることが確かめられる．

次に，M_p を以下のような連分数で与える：

$$M_p = 1 - \frac{a_{p+1}|}{|1} - \frac{a_{p+2}|}{|1} - \frac{a_{p+3}|}{|1} - \cdots, \quad p = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.39}$$

決まり事として，ある自然数 $k \in \{p+1, p+2, \ldots\}$ で，$a_k = 0$ となるときは，最初に部分商が 0 となった時点で連分数が終わるとする．したがって，$a_{p+1} = 0$ であれば，$M_p = 1 \ge g_p$．$a_{p+2} = 0$ かつ $a_{p+1} > 0$ であるとき，$M_p = 1 - a_{p+1} = 1 - (1 - g_p)g_{p+1} \ge 0$．次に，$a_{p+1}$, a_{p+2}, $\ldots$, $a_{p+k} > 0$, $a_{p+k+1} = 0$, $(k > 0)$ となるとき，

$$M_p = 1 - (1 - g_p) \cdot \frac{g_{p+1}|}{|1} - \frac{(1 - g_{p+1})g_{p+2}|}{|1} - \cdots - \frac{(1 - g_{p+k-2})g_{p+k-1}|}{|1} - \frac{(1 - g_{p+k-1})g_{p+k}|}{|1}.$$

いま，$g_{p+k} = 1$ ならば，$M_p = g_p$．また，$g_{p+k} < 1$ ならば，定理 1.5 から，

$$M_p = 1 - (1 - g_p)\left(1 - \frac{1}{T_{p+1}^{p+k}(g)}\right) \tag{2.40}$$

と書ける．ただし，

$$T_{p+1}^{p+k}(g) := 1 + \sum_{r=p+1}^{p+k} \frac{g_{p+1}g_{p+2}\cdots g_r}{(1-g_{p+1})(1-g_{p+2})\cdots(1-g_r)}. \tag{2.41}$$

このとき，$M_p > m_p$．最後に，$a_{p+r} > 0$，$(r = 1, 2, 3, \dots)$ のとき，つまり，連分数が無限に続く場合である．式 (2.40) と同様であるが，

$$T_{p+1}^{\infty}(g) = 1 + \sum_{r=p+1}^{\infty} \frac{g_{p+1}g_{p+2}\cdots g_r}{(1-g_{p+1})(1-g_{p+2})\cdots(1-g_r)} \leq \infty. \tag{2.42}$$

となる．ゆえに，$M_p \geq m_p$．また，等号成立は，$T_{p+1}^{\infty}(g) = \infty$ となるときである．M_p の定め方と今の証明から，$0 \leq M_p \leq 1$，$(p = 0, 1, 2, \dots)$．最後に，$a_{p+1} = 0$ ならば，$M_p = 1$，$(1 - M_p)M_{p+1} = 0 = a_{p+1}$．$a_{p+1} > 0$ ならば，$(1 - g_p)g_{p+1} > 0$ より，$0 < g_{p+1} \leq M_p$ なので，連分数 (2.39) から，

$$M_p = 1 - \frac{a_{p+1}}{M_{p+1}}, \quad a_{p+1} = (1 - M_p)M_{p+1}.$$

□

さらに，これまでのことを整理すると，$a_p > 0$，$(p = 1, 2, 3, \dots)$ のとき，$M_p = g_p$ となるための必要十分条件は，

$$1 + \sum_{r=p+1}^{\infty} \frac{g_{p+1}g_{p+2}\cdots g_r}{(1-g_{p+1})(1-g_{p+2})\cdots(1-g_r)} = \infty. \tag{2.43}$$

である．特に，最小パラメータと最大パラメータが一致しているとき，すなわち，$m_p = M_p$，$(p = 0, 1, 2, \dots)$ のとき，次のことが分かる：

定理 2.16. ([Wa48]) 数列 $\{a_p\}_{p=1}^{\infty}$ は最小パラメータ m_p をもつ各項が正の連鎖列とする．このとき，最小パラメータと最大パラメータが一致する，すなわち，パラメータが一意に定まるためには，$T_0^{\infty}(m) = \infty$ が必要十分である．

次のパラメータの一意性に関する系は，m_p の定め方，特に $m_0 = 0$ から直ちに従う：

系 2.17. ([Wa48]) 各項が正である連鎖列のパラメータが一意に定まるためには，$M_0 = 0$ が必要十分である．

さらに，最大パラメータが全て正であることと，定理 2.9 から，次が導ける：

定理 2.18. ([Wa48]) 数列 $\{a_p\}_{p=1}^{\infty}$ を最小パラメータ m_p をもつ連鎖列とする．ただし，$0 \leq m_p < 1$，$(p = 0, 1, 2, \dots)$．このとき，$0 < M_p \leq 1$，$(p = 0, 1, 2, \dots)$ であることと，連分数

$$\frac{1|}{|1} - \frac{a_{p+1}|}{|1} - \frac{a_{p+2}|}{|1} - \cdots$$

が各 $p = 0, 1, 2, \dots$ に対して収束することは同値である．

この節の最初に述べた定数項列に関して定理 2.15 を適用してみる．各 $p = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，$a_p = a \in [1, 1/4]$ として考えてみる．この場合，最小パラメータ $\{m_p\}$ は，定義から，$m_0 = 0$, $m_1 = a$, $m_2 = a/(1-a), m_3 = \frac{a|}{|1} - \frac{a|}{|1} - \frac{a|}{|1}, \ldots$ となるので，

$$\frac{a|}{|1} - \frac{a|}{|1} - \frac{a|}{|1} - \cdots$$

という連分数の p 次の近似値として与えられる．したがって，

$$m_p = \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{\displaystyle\sum_{r=0}^{p} \left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{1-\sqrt{1+4a}} \right)^r} \right\}, \quad p = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.44}$$

となる．そして，最大パラメータは，

$$M_p = 1 - \frac{a|}{|1} - \frac{a|}{|1} - \cdots = \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}, \quad p = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.45}$$

となる．

最後に，与えられた列が連鎖列であるかどうか判定する条件として，級数の和を使う方法も有効であることを紹介する．

命題 2.19. ([Wa48]) 数列 $\{c_p\}_{p=1}^{\infty}$ を各項が非負である実数列とする．このとき，

$$\sum_{p=1}^{n} c_p < 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.46}$$

ならば数列 $\{c_p\}_{p=1}^{\infty}$ は連鎖列．

証明. これは帰納的に示すことができる．まず，各 $p = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，$c_p \geq 0$ であるので，条件 (2.46) より，$0 \leq \sum_{p=1}^{1} c_p = c_1 < 1$．そこで，$g_1 := c_1$ とおく．このとき，$g_1, g_2, \ldots, g_k$ が g_1 と同様の性質を満たす連鎖列のパラメータであるとする．

$$\begin{aligned}
c_{k+1} &< 1 - c_1 - c_2 - \cdots - c_k \\
&= 1 - g_1 - (1-g_1)g_2 - (1-g_2)g_3 - \cdots - (1-g_{k-1})g_k \\
&= (1-g_1)(1-g_2) - (1-g_2)g_3 - \cdots - (1-g_{k-1})g_k \\
&\leq (1-g_2) - (1-g_2)g_3 - \cdots - (1-g_{k-1})g_k \\
&= (1-g_2)(1-g_3) - (1-g_3)g_4 - \cdots - (1-g_{k-1})g_k \\
&\leq \cdots \\
&= (1-g_{k-2})(1-g_{k-1}) - (1-g_{k-1})g_k \\
&\leq (1-g_{k-1}) - (1-g_{k-1})g_k \\
&= (1-g_{k-1})(1-g_k) \leq (1-g_k).
\end{aligned}$$

したがって，$0 \leq g_{k+1} < 1$ であるような，g_{k+1} があって，$c_{k+1} = (1-g_k)g_{k+1}$ と書くことができる． □

命題 2.19 を使うと，例えば，$0 \leq r \leq 1/2$ であれば，幾何数列 $r, r^2, r^3, \ldots$ は連鎖列であることが分かる．

第3章　Jacobi連分数とStieltjes連分数

正定値連分数の定義の中で，Jacobi 連分数という連分数について簡単な紹介をした．ここでは，その Jacobi 連分数の性質と Jacobi 連分数と関係のある Stieltjes 連分数について調べる．

3.1　Stieltjes 連分数と Jacobi 連分数の基本的性質

Stieltjes 連分数と Jacobi 連分数は，それぞれにおける固有の性質ももちろん存在するが，互いによく似た性質も持ち合わせている．その中でも本論文では特に Jacobi 連分数に重きを置いて議論をする．Jacobi 連分数の簡単な性質は Stieltjes 連分数から見ることができる．

定義 3.1．Stieltjes 連分数とは以下の型をもつ連分数である：

$$\frac{1|}{|k_1 z}+\frac{1|}{|k_2}+\frac{1|}{|k_3 z}+\frac{1|}{|k_4}+\cdots. \tag{3.1}$$

ここで，$z \in \mathbb{C}$ とし，各 $p = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，$k_p \in \mathbb{R}_{>0}$ は定数.

連分数 (3.1) の偶数部分は

$$\frac{1/k_1|}{|c_1+z}-\frac{c_1 c_2|}{|c_2+c_3+z}-\frac{c_3 c_4|}{|c_3+c_4+z}-\cdots \tag{3.2}$$

と書くことができる．ただし，

$$c_p := \frac{1}{k_p k_{p+1}}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.3}$$

である．さらに，連分数 (3.1) の近似値は，

$$T_p(w) = \frac{1/k_1|}{|c_1+z}-\frac{c_1 c_2|}{|c_2+c_3+z}-\cdots-\frac{c_{2p-1}c_{2p}|}{|w} \tag{3.4}$$

となり，

$$T_p\left(z+c_{2p}+c_{2p+1}\right)=\frac{A_{2p+2}}{B_{2p+2}}, \quad T_p\left(z+c_{2p}\right)=\frac{A_{2p+1}}{B_{2p+1}}. \tag{3.5}$$

これより，連分数 (3.1) の近似値は，**実 Jacobi 連分数**とよばれる連分数になるが，諸性質は次の有界な Jacobi 連分数のあとに述べる．

そこでまずは，前章で扱った連分数

$$\frac{1|}{|b_1+z_1} - \frac{a_1^2|}{|b_2+z_2} - \frac{a_2^2|}{|b_3+z_3} - \cdots$$

において，$z := (z, z, z, \dots)$ とした以下の Jacobi 連分数を扱う：

$$\frac{1|}{|b_1+z} - \frac{a_1^2|}{|b_2+z} - \frac{a_2^2|}{|b_3+z} - \cdots. \tag{3.6}$$

定義 3.2. Jacobi 連分数 (3.6) が**有界**であるとは，ある定数 $M > 0$ が存在して，各 $p = 1, 2, 3, \dots$ に対して，

$$|a_p| \leq \frac{M}{3}, \quad |b_p| \leq \frac{M}{3} \tag{3.7}$$

を満たすことをいう．このとき，定数 M を Jacobi 連分数の**界**とよぶ．

条件 (3.7) は次のように定式化される：

定理 3.3. ([Wa48]) Jacobi 連分数 (3.6) が有界であるための必要十分条件は，ある定数 $N > 0$ があって，各 $n = 2, 3, 4, \dots$ に対して，

$$\left| \sum_{p=1}^{n} b_p u_p v_p - \sum_{p=1}^{n-1} a_p \left(u_p v_{p+1} + u_{p+1} v_p\right) \right| \leq N \cdot \sqrt{\sum_{p=1}^{n} |u_p|^2 \cdot \sum_{p=1}^{n} |v_p|^2} \tag{3.8}$$

が成り立つことである．ここで，$u_p, v_p \in \mathbb{C}$ である．

証明. 必要性：シュワルツの不等式を使って以下のように示せる：

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{p=1}^{n} b_p u_p v_p - \sum_{p=1}^{n-1} a_p \left(u_p v_{p+1} + u_{p+1} v_p\right) \right| \\
&\qquad\qquad \leq \left| \sum_{p=1}^{n} b_p u_p v_p \right| + \left| \sum_{p=1}^{n-1} a_p \left(u_p v_{p+1} + u_{p+1} v_p\right) \right| \\
&\qquad\qquad \leq \frac{M}{3} \cdot \sqrt{\sum_{p=1}^{n} |u_p|^2 \cdot \sum_{p=1}^{n} |v_p|^2} + \frac{2M}{3} \cdot \sqrt{\sum_{p=1}^{n} |u_p|^2 \cdot \sum_{p=1}^{n} |v_p|^2} \\
&\qquad\qquad = M \cdot \sqrt{\sum_{p=1}^{n} |u_p|^2 \cdot \sum_{p=1}^{n} |v_p|^2}.
\end{aligned}$$

ゆえに，$N := M$ をとればよい．
十分性：$r \neq p$ に対して，$u_p = v_p = 1$, $u_r = v_r = 0$ とすると，$|b_p| \leq N$．$r \neq p, s \neq p+1$ に対して，$u_p = v_{p+1} = 1$, $u_r = v_s = 0$ とすると，$|a_p| \leq N$．ゆえに，$M := 3N$ とすればよい． □

条件 (3.8) が成り立っているとき，**Jacobi 形式** $\sum b_p u_p v_p - \sum a_p (u_p v_{p+1} + u_{p+1} v_p)$ は**有界**であるという．また，有界性 (3.8) を満たす最小の正定数 N を，Jacobi 連分数の**ノルム**とよぶ．さらに，先ほどの定理の証明から，Jacobi 連分数のノルムは，自身の界を超えないことが分かる．

例 3.4. 連分数

$$\frac{1|}{|z} - \frac{1/4|}{|z} - \frac{1/4|}{|z} - \cdots$$

を考える．これは，$a_p = 1/2,\ b_p = 0$，$(p = 1, 2, 3, \ldots)$ の例である．なので，$|a_p| = 1/2 = M/3$ を解いて，界は $M = 3/2$．また，

$$\begin{aligned}\left|\sum_{p=1}^{n} b_p u_p v_p - \sum_{p=1}^{n-1} a_p (u_p v_{p+1} + u_{p+1} v_p)\right| &= \left|\sum_{p=1}^{n-1} a_p (u_p v_{p+1} + u_{p+1} v_p)\right| \\ &\leq \frac{2M}{3} \cdot \sqrt{\sum_{p=1}^{n} |u_p|^2 \cdot \sum_{p=1}^{n} |v_p|^2} \\ &= 1 \cdot \sqrt{\sum_{p=1}^{n} |u_p|^2 \cdot \sum_{p=1}^{n} |v_p|^2}\end{aligned}$$

となるので，ノルムは $N = 1$．

定理 3.5. ([Wa48]) 界 $M > 0$ をもつ任意の Jacobi 連分数は，領域 $|z| \geq M$ で広義一様収束する．

証明. 界 $M > 0$ をもつ Jacobi 連分数を

$$\frac{1|}{|b_1 + z} - \frac{a_1^2|}{|b_2 + z} - \frac{a_2^2|}{|b_3 + z} - \cdots$$

とすると，同値変換により，n 次の部分分子は

$$\frac{-a_{n-1}^2}{(b_{n-1} + z)(b_n + z)}$$

とできるので，

$$\begin{aligned}\left|\frac{-a_{n-1}^2}{(b_{n-1} + z)(b_n + z)}\right| &\leq \frac{|a_{n-1}|^2}{|b_{n-1} + z| \cdot |b_n + z|} \\ &\leq \frac{|a_{n-1}^2|}{(|b_{n-1}| - |z|) \cdot (|b_n| - |z|)} \\ &\leq \frac{M^2/9}{(M/3 - M) \cdot (M/3 - M)} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

ゆえに，定理 1.17(a) から，$|z| \geq M$ で広義一様収束する． □

Stieltjes 連分数の偶数部分を構成することで，実 Jacobi 連分数という連分数が得られる．今一度，定義をする．

定義 3.6. 連分数

$$\frac{1|}{|b_1+z}-\frac{a_1^2|}{|b_2+z}-\frac{a_2^2|}{|b_3+z}-\cdots,\quad z\in\mathbb{C}$$

が**実 Jacobi 連分数**であるとは，各 $p=1,2,3,\ldots$ に対して，$a_p,b_p\in\mathbb{R}$ であることをいう．

この定義から，任意の実 Jacobi 連分数は正定値連分数である．なぜならば，$\alpha_r=\Im(a_r)=0$, $\beta_r=\Im(b_r)=0$,（$r=1,2,3,\ldots$）より，2 次形式 $\sum_{r=1}^{p}\beta_r\xi_r^2-2\sum_{r=1}^{p-1}\alpha_r\xi_r\xi_{r+1}$ が 0 となるからである．実 Jacobi 連分数と有界 Jacobi 連分数から，連鎖列に関わる次の定理が示される：

定理 3.7. ([WaWe44b]) 任意の実有界 Jacobi 連分数

$$\frac{1|}{|z}-\frac{a_1^2|}{|z}-\frac{a_2^2|}{|z}-\cdots\tag{3.9}$$

が，ノルム $N\leq 1$ を持つための必要十分条件は，部分分子 $\{a_p^2\}$ が連鎖列となることである．

この定理を示す前に次の命題を設けるが，この命題の証明に関してはこれまで述べてきた収束性に関わる定理よりさらに複雑な議論を用いるので，ここでは省略することにする．詳しくは，[Wa48, p.115] を参考にされたい．

命題 3.8. ([Wa48]) ノルムが N である任意の実 Jacobi 連分数は，$I:=[-N,N]$ としたとき，$d(K,I)=\inf\{d(x,y):x\in K,y\in I\}>0$ となるような任意のコンパクト集合 K 上で広義一様収束する．ただし，ここで $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ に対して $d(z_1,z_2):=|z_1-z_2|$ とする．

では，定理 3.7 を示す．

証明. 必要性について： 不等式 (3.8) において，$x_p\in\mathbb{R}$, $b_p=0$,（$p=1,2,3,\ldots$）とすると，

$$\left|-2\sum_{p=1}^{n-1}a_px_px_{p+1}\right|\leq 1\cdot\sum_{p=1}^{n}x_p^2.$$

ゆえに，

$$-\sum_{p=1}^{n}x_p^2\leq -2\sum_{p=1}^{n-1}a_px_px_{p+1}\leq\sum_{p=1}^{n}x_p^2,\quad n=2,3,4,\ldots.\tag{3.10}$$

したがって，

$$\sum_{p=1}^{n}x_p^2-2\sum_{p=1}^{n-1}a_px_px_{p+1}\geq 0\tag{3.11}$$

より，部分分子 $\{a_p^2\}$ は連鎖列．
十分性について： 部分分子 $\{a_p^2\}$ を連鎖列とすると，不等式 (3.11) が成り立つ．次に，x_p を $(-1)^p x_p$ に置き換えて，

$$\sum_{p=1}^{n}(-1)^{2p}x_p^2 - 2\sum_{p=1}^{n-1}(-1)^{2p+1}a_p x_p x_{p+1} \geq 0.$$

ゆえに，

$$-2\sum_{p=1}^{n-1}a_p x_p x_{p+1} \leq \sum_{p=1}^{n}x_p^2.$$

□

同値変換により，連分数 (3.9) は，

$$\frac{1/z|}{|1} - \frac{a_1^2/z^2|}{|1} - \frac{a_2^2/z^2|}{|1} - \cdots$$

に変わるので，z 倍して，$z' := -1/z^2$ とおくと，

$$\frac{1|}{|1} + \frac{a_1^2 z'|}{|1} + \frac{a_2^2 z'|}{|1} + \cdots$$

となり，定義域は閉区間 $I_z = [-1, 1]$ から，閉区間 $I_{z'} = [-\infty, -1]$ と変わる．よって，これまでの議論をまとめると次の定理がわかる．

定理 3.9. ([Wa48]) 各 $p = 0, 1, 2, \dots$ に対して，$g_p \in [0, 1]$ とするとき，連分数

$$\frac{1|}{|1} + \frac{(1-g_0)g_1 z|}{|1} + \frac{(1-g_1)g_2 z|}{|1} + \cdots \tag{3.12}$$

は，$L := [-\infty, -1]$ としたとき，$d(K, L) = \inf\{d(x, y) : x \in K, y \in L\} > 0$ となるような任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{C}$ 上で広義一様収束する．

3.2 有理函数に対する Jacobi 連分数展開

ここでは，有理函数を Jacobi 連分数に展開することを考える．特に，数値計算に合うアルゴリズムに重きを置くことにする．ここで扱う理論は物理学の問題，例えば，電気回路などにも応用されている．

扱う Jacobi 連分数を表記を少し変え

$$\frac{1|}{|r_1 z + s_1} + \frac{1|}{|r_2 z + s_2} + \frac{1|}{|r_3 z + s_3} + \cdots \tag{3.13}$$

とする．ここで，各 $p = 1, 2, 3, \dots$ に対して，$r_p, s_p \in \mathbb{C}$ とし，かつ，$r_p \neq 0$ とする．$A_p(z), B_p(z)$ をそれぞれ p 次の分子と分母とすると，これらは $\deg A_p(z) = p-1$, $\deg B_p(z) = p$ であり，z の係数が r_p, s_p からなる多項式である．ここで，多項式函数

$$\begin{aligned} f_0 &:= f_0(z) = a_{00}z^n + a_{01}z^{n-1} + \cdots + a_{0n}, \\ f_1 &:= f_1(z) = a_{11}z^{n-1} + a_{12}z^{n-2} + \cdots + a_{1n} \end{aligned} \tag{3.14}$$

とおく．ただし，各 $p, q = 0, 1, 2, \ldots, n$ に対して，$a_{pq} \in \mathbb{C}$.

$$\frac{f_0}{f_1} = \frac{1|}{|r_1 z + s_1} + \frac{1|}{|r_2 z + s_2} + \cdots + \frac{1|}{|r_n z + s_n} \tag{3.15}$$

となるように $r_p (\neq 0), s_p$ を定める問題は，多項式函数 f_0, f_1 が漸化式

$$f_{p-1} = (r_p z + s_p) f_p + f_{p+1}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots, n, \quad f_{n+1} = 0, \quad f_n = c \neq 0 \tag{3.16}$$

を満たすような，$(n-p)$ 次の多項式 f_p を求めるものである $(p = 2, 3, \ldots, n-1)$．このとき，(3.15) のような連分数展開ができる多項式があれば，各 $p = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して，$r_p, s_p \in \mathbb{C}$ は一意的であることも分かる．つまり，多項式から構成される Jacobi 連分数は一意であるということである．実際，漸化式 (3.16) が成り立っているとし，$f_0 = f_0'$, $f_1 = f_1'$, $r_p', s_p' \in \mathbb{C}$ とし，

$$f_{p-1}' = (r_p' z + s_p') f_p' + f_{p+1}', \quad p = 1, 2, 3, \ldots n, \quad f_{n+1}' = 0, \quad f_n' = c \neq 0 : \text{定数}$$

と書けているとする．さらに，$\deg f_p' = n - p$ とする．$p = 1$ のとき，

$$0 = f_0 - f_0' = \left\{ (r_1 - r_1') z + (s_1 - s_1') \right\} f_1 + (f_2 - f_2').$$

$f_2 - f_2'$ の次数は高々$n-2$ で，$\deg f_1 = n - 1$ なので，$r_1 = r_1'$, $s_1 = s_1'$, $f_2 = f_2'$ が分かる．$p = 2$ として，同様の議論を繰り返すと，$r_2 = r_2'$, $s_2 = s_2'$, $f_3 = f_3'$ が分かる．同様にして $p \geq 3$ も帰納的に示される．

次に，部分分母における z の係数 r_p, s_p を求めるための漸化式を考える．漸化式 (3.16) から，直接，多項式を代入して計算すると，

$$\frac{a_{00} z^n + a_{01} z^{n-1} + \cdots + a_{0n}}{a_{11} z^{n-1} + a_{12} z^{n-2} + \cdots + a_{1n}} = r_1 z + \frac{b_{11} z^{n-1} + b_{12} z^{n-2} + \cdots + b_{1n}}{a_{11} z^{n-1} + a_{12} z^{n-2} + \cdots + a_{1n}},$$

$$r_1 = \frac{a_{00}}{a_{11}}, \quad b_{11} = a_{01} - r_1 a_{12}, \quad b_{12} = a_{02} - r_1 a_{13}, \quad \ldots, \quad b_{1n} = a_{0n},$$

$$\frac{b_{11} z^{n-1} + b_{12} z^{n-2} + \cdots + b_{1n}}{a_{11} z^{n-1} + a_{12} z^{n-2} + \cdots + a_{1n}} = s_1 + \frac{a_{22} z^{n-2} + a_{23} z^{n-3} + \cdots + a_{2n}}{a_{11} z^{n-1} + a_{12} z^{n-2} + \cdots + a_{1n}},$$

$$s_1 = \frac{b_{11}}{a_{11}}, \quad a_{22} = b_{12} - s_1 a_{12}, \quad a_{23} = b_{13} - s_1 a_{13}, \quad \ldots, \quad a_{2n} = b_{2n} - s_1 a_{1n}.$$

このプロセスにより，直接，r_1, s_1, f_2 を求めることができる．これを繰り返していくことで，各 r_p, s_p, f_{p+1} を計算できるが，これは係数 $a_{00}, a_{11}, \ldots, a_{pp}, \ldots \neq 0$ である限り続けられる．今の議論から，(3.15) の連分数展開が可能であることと，係数 $a_{00}, a_{11}, \ldots, a_{pp}, \ldots \neq 0$ であることは必要十分であることも分かる．

では，今の手法で得られる係数を以下のリストにまとめておく：

$$
\begin{array}{lllll}
 & a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & \dots, \\
 & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \dots, \\
r_1 = \dfrac{a_{00}}{a_{11}}, & b_{11} = a_{01} - r_1 a_{12}, & b_{12} = a_{02} - r_1 a_{13}, & b_{13} = a_{03} - r_1 a_{14}, & \dots, \\
s_1 = \dfrac{b_{11}}{a_{11}}, & a_{22} = b_{12} - s_1 a_{12}, & a_{23} = b_{13} - s_1 a_{13}, & a_{24} = b_{14} - r_1 a_{14}, & \dots, \\
r_2 = \dfrac{a_{11}}{a_{22}}, & b_{22} = a_{12} - r_2 a_{23}, & b_{23} = a_{13} - r_2 a_{24}, & b_{24} = a_{14} - r_2 a_{25}, & \dots, \\
s_2 = \dfrac{b_{22}}{a_{22}}, & a_{33} = b_{23} - s_2 a_{23}, & a_{34} = b_{24} - s_2 a_{24}, & a_{35} = b_{25} - r_2 a_{25}, & \dots, \\
r_3 = \dfrac{a_{22}}{a_{33}}, & b_{33} = a_{23} - r_3 a_{34}, & b_{34} = a_{24} - r_3 a_{35}, & b_{35} = a_{25} - r_3 a_{36}, & \dots, \\
 & & \dots, & & \\
 & & (a_{pq} = b_{pq} = 0 \quad \text{for} \quad q > n). & &
\end{array}
\tag{3.17}
$$

これが，r_p, s_p を求めるために欲しかった漸化式である．

例 3.10. 多項式函数

$$
f_0 = z^3 + (2+i)z^2 + (3+i)z + (2i+2), \quad f_1 = 2z^2 + iz + 2 \tag{3.18}
$$

に関して連分数展開を考える．このとき，先ほどのリストを使って実際に計算すると，

$$
\frac{f_1}{f_0} = \frac{1|}{|\frac{1}{2}z + 1 + \frac{i}{4}} + \frac{1|}{|\frac{8}{9}z - \frac{4i}{27}} + \frac{1|}{|\frac{81}{64}z + \frac{27i}{32}} \tag{3.19}
$$

という Jacobi 連分数展開を得ることができる．

3.3 多項式と行列式の関係性

ここでは，(3.15) の連分数展開可能な条件を考える．特に，多項式函数 f_0, f_1 の係数に関する行列に着目する．

定理 3.11. ([Fr46]) 多項式函数

$$
f_0 = a_{00}z^n + a_{01}z^{n-1} + \cdots + a_{0n}, \quad f_1 = a_{11}z^{n-1} + a_{12}z^{n-2} + \cdots + a_{1n}
$$

において，商 f_1/f_0 が連分数展開 (3.15) を持つことと，各 $p=1,2,3,\ldots$ に対して，次のリストより切り取ってできる行列式 D_p が 0 とならないことは必要十分である：

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & a_{15}, & a_{16}, & a_{17}, & a_{18}, & \ldots, \\
a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & a_{03}, & a_{04}, & a_{05}, & a_{06}, & a_{07}, & \ldots, \\
0, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & a_{15}, & a_{16}, & a_{17}, & \ldots, \\
0, & a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & a_{03}, & a_{04}, & a_{05}, & a_{06}, & \ldots, \\
0, & 0, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & a_{15}, & a_{16}, & \ldots, \\
0, & 0, & a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & a_{03}, & a_{04}, & a_{05}, & \ldots, \\
0, & 0, & 0, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & a_{15}, & \ldots, \\
0, & 0, & 0, & a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & a_{03}, & a_{04}, & \ldots, \\
 & & & \vdots & & \vdots & & \ddots &
\end{array} \tag{3.20}$$

$$(a_{0p} = a_{1p} = 0 \quad \text{for} \quad p > n);$$

$$D_0 = a_{00}, \quad D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ 0 & a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}, \ldots.$$

証明. まず，連分数展開 (3.15) を持つとすると，係数 $a_{00}, a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn} \neq 0$．ゆえに，行列式 $D_0 = a_{00} \neq 0$, $D_1 = a_{11} \neq 0$．以後，行列式 D_p が多項式函数 f_0, f_1 に依っていることを明示するために，$D_p(f_0, f_1) := D_p$ と表すことにする．ここで，行列式 (3.20) をラプラス展開することによって，

$$D_p(f_0, f_1) = (-1)^{p-1} a_{11}^2 D_{p-1}(f_1, f_2), \quad p = 2, 3, \ldots, n \tag{3.21}$$

が分かる．さらに，

$$\begin{aligned}
D_p(f_0, f_1) &= (-1)^{p-1} a_{11}^2 D_{p-1}(f_1, f_2), \\
D_{p-1}(f_1, f_2) &= (-1)^{p-2} a_{22}^2 D_{p-2}(f_2, f_3), \\
D_{p-2}(f_2, f_3) &= (-1)^{p-3} a_{33}^2 D_{p-3}(f_3, f_4), \\
&\cdots \\
D_2(f_{p-2}, f_{p-1}) &= (-1)^1 a_{p-1,p-1}^2 D_1(f_{p-1}, f_p)
\end{aligned}$$

と書き下せる．ここで，$D_1(f_{p-1}, f_p) = a_{pp}$ であることに気をつければ，

$$D_p(f_0, f_1) = (-1)^{\sum_{k=1}^{p-1} k} a_{11}^2 a_{22}^2 \cdots a_{p-1,p-1}^2 a_{pp} = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} a_{11}^2 a_{22}^2 \cdots a_{p-1,p-1}^2 a_{pp} \neq 0. \tag{3.22}$$

ゆえに，連分数展開 (3.15) をもつ．次に，任意の非負整数 $n \in \mathbb{N}_0$ に対して，$D_n \neq 0$ とすると，$D_0 \neq 0$, $D_1 \neq 0$ なので，$a_{00}, a_{11} \neq 0$ がまず分かる．これより，行列式 (3.22) において，$p = 2$ として，$D_2 = (-1)^{\frac{2-1}{2}} a_{11}^2 a_{22} \neq 0$. ゆえに，$a_{22} \neq 0$．これを繰り返すことで，$a_{nn} \neq 0$. $\square$

3.4 Jacobi 連分数と f_1/f_0 からなる級数との関係性

いま，連分数展開 (3.15) における以下の同値変換を考える：

$$a_0 = \frac{1}{r_1}, \quad a_p = -\frac{1}{r_p r_{p+1}}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots, n-1, \tag{3.23}$$

$$b_p = \frac{s_p}{r_p}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{3.24}$$

とすると，

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{a_0|}{|b_1 + z} - \frac{a_1|}{|b_2 + z} - \cdots - \frac{a_{n-1}|}{|b_n + z} \tag{3.25}$$

という連分数に書き変わる．リスト (3.17) より，

$$a_0 = \frac{a_{11}}{a_{00}}, \quad a_p = -\frac{a_{p+1,p+1}}{a_{p-1,p-1}}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots, n-1, \tag{3.26}$$

かつ，

$$b_p = \frac{b_{pp}}{a_{p-1,p-1}}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{3.27}$$

である．いま，$a_{00} = 1$ と仮定する．行列式 (3.22) と式 (3.26) から，

$$D_{p+1} = a_0 a_1 \cdots a_p D_p, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3.28}$$

そして，

$$a_0 = \frac{D_1}{D_0}, \quad a_p = \frac{D_{p-1} D_{p+1}}{D_p^2}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots, n-1 \tag{3.29}$$

が分かる．

連分数展開 (3.25) における Jacobi 連分数の p 次の近似値と f_1/f_0 の z のローラン級数との間にある関係を見ていく．まず最初に，

$$\frac{f_1}{f_0} := \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c_p}{z^{p+1}} \tag{3.30}$$

とおく．行列式公式 (1.3) から，

$$\frac{A_{p+1}(z)}{B_{p+1}(z)} - \frac{A_p(z)}{B_p(z)} = \frac{a_0 a_1 \cdots a_p}{B_{p+1}(z) B_p(z)}, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \tag{3.31}$$

ただし，A_p, B_p はそれぞれ，連分数 (3.25) の p 次の分子と分母であり，$\deg A_p = p - 1$, $\deg B_p = p$, $(p = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$．$\deg B_{p+1}(z) B_p(z) = 2p + 1$ であるので，上の式は，A_{p+1}/B_{p+1} と A_p/B_p の差が $1/z^{2p+1}$ の項から始まることを表している．言い換えると，

$$\frac{A_{p+1}}{B_{p+1}} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \cdots + \frac{c_{2p-1}}{z^{2p}} + \frac{c_{2p}^{(p)}}{z^{2p+1}} + \frac{c_{2p+1}^{(p)}}{z^{2p+2}} + \cdots, \quad p = 1, 2, 3, \ldots, n-1 \tag{3.32}$$

ということなので，$p(< n)$ 次の近似値は f_1/f_0 をローラン級数で表したものと，ちょうど $2p$ 次の項までで近似できるということである．

この多項式函数の商 f_1/f_0 とローラン級数展開との近似に関してさらに詳しく調べる．

定理 3.12. ([Gr14]) 各 $p=1,2,3,\dots,n$ に対して，$L_p>0$, $x_p\in\mathbb{R}$, $x_k\neq x_l$ $(k\neq l)$ とする．有理分数が

$$\frac{f_1}{f_0}=\sum_{p=1}^{n}\frac{L_p}{z-x_p} \tag{3.33}$$

の形式を持つための必要十分条件は，商 f_1/f_0 が各 $p=1,2,3,\dots,n$ に対して，$b_p\in\mathbb{R}$ かつ，$a_{p-1}>0$ であるような連分数展開 (3.25) を持つことである．

この定理を示す前に，2 次形式の性質について簡単に確認をしておく．

定義 3.13. 2 次形式

$$F(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n):=\sum_{p,q=1}^{n}a_{pq}\xi_p\xi_q,\quad (a_{pq}=a_{qp}) \tag{3.34}$$

とおき，任意の実変数 $\xi_1,\xi_2,\dots\in\mathbb{R}$ に対して，$\sum_{p=1}^{n}\xi_p^2>0$ かつ $F(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)>0$ であるとき，F は**正定値である**という．

また，2 次形式 F が正定値であるための必要十分条件は，任意の自然数 $n\in\mathbb{N}$ に対して，次の首座行列式が正であることである：

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}. \tag{3.35}$$

では，定理 3.12 を示す．

証明. まず，連分数展開 (3.33) を持つとすると，$1\le l\le n$ に対して，

$$\frac{L_l}{z-x_l}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{L_l x_l^p}{z^{p+1}}$$

となることから，各係数 c_p は，

$$c_p=\sum_{k=1}^{n}x_k^p L_k,\quad p=0,1,2,\dots$$

と書ける．この係数 c_p に関して 2 次形式を考える．$x_s\neq x_t$ $(t\neq s,\ s,t=1,2,3,\dots,n)$ とし，変数 u の m $(<n)$ 次の多項式は恒等的に 0 ではなく，多項式 $X_0+X_1u+X_2u^2+\cdots+X_mu^m$ は，$u=x_k$, $(k=1,2,3,\dots,n)$ に関して 0 をとらないとする．従って，2 次形式

$$\sum_{p,q=0}^{m}c_{p+q}X_pX_q=\sum_{u=x_1}^{x_k}(X_1+X_1u+\cdots+X_mu^m)^2L(u),\quad L(x_k)=L_k$$

は正定値である．定理 3.13 から，

$$\Delta_p=\begin{vmatrix}c_0 & c_1 & \cdots & c_p\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{p+1}\\ & & \cdots & \\ c_p & c_{p+1} & \cdots & c_{2p}\end{vmatrix}>0,\quad p=0,1,2,\dots,n-1 \tag{3.36}$$

が成り立つ．いま，t を定数として，

$$\frac{c_0z^{2n}+c_1z^{2n-1}+\cdots+c_{2n-1}z+t}{z^{2n+1}}=\sum_{p=0}^{2n-1}\frac{c_p}{z^{p+1}}+\frac{t}{z^{2n+1}} \tag{3.37}$$

を考える．このとき，定理 3.11 における行列式 D_p は，$D_0=0$, $D_1=c_0=\Delta_1$, $D_2=\Delta_1,\ldots,D_n=\Delta_{n-1}$, $D_{n+1}=D_{n+1}(t)=t\Delta_{n-1}+D_{n+1}(0)$ となる．行列式 (3.36) から，$D_p>0$, $(p=0,1,2,\ldots,n)$．さらに，定数 t を十分大きくとれば，$D_{n+1}>0$．したがって，ローラン級数 (3.37) の有理分数に対する Jacobi 連分数の最初の $(n+1)$ 次の部分商が作れる．つまり，

$$\frac{a_0|}{|b_1+z}-\frac{a_1|}{|b_2+z}-\cdots-\frac{a_{n-1}|}{|b_n+z}-\frac{a_n|}{|b_{n+1}+z},$$

ただし，$b_p\in\mathbb{R}$ であり, 式 (3.29) より，$a_p>0$, $(p=0,1,2,\ldots)$．ローラン級数 (3.32) から，この連分数の n 次近似値は，

$$\frac{A_n(z)}{B_n(z)}=\sum_{p=0}^{2n-1}\frac{c_p}{z^{p+1}}+\frac{c_{2n}^{(n)}}{z^{2n+1}}+\cdots$$

なので，

$$f_1(z)B_n(z)-A_n(z)f_0(z)=P\left(\frac{1}{z}\right)$$

となる．ただし，$P(1/z)$ は $1/z$ より始まるローラン級数を表すものとする．この左辺は，f_1 と A_n が z の $(n-1)$ 次の多項式，f_0 と B_n が z の n 次の多項式であるので，ローラン級数ではない．つまり，$f_1(z)B_n(z)-A_n(z)f_0(z)\equiv 0$．ゆえに，

$$\frac{A_n(z)}{B_n(z)}\equiv 0. \tag{3.38}$$

したがって，商 f_1/f_0 は連分数展開 (3.25) を持つ． □

3.5 有理函数に関する Stieltjes 連分数展開

連分数展開 (3.15) において，z を $-z$ とし，同値変換を行うと，

$$\frac{f_1(-z)}{f_0(-z)}=\frac{-1|}{|r_1z-s_1}+\frac{1|}{|r_2z-s_2}+\cdots+\frac{1|}{|r_nz-s_n}.$$

つまり，もし，商 $f_1(z)/f_0(z)$ が奇函数ならば，各 $p=1,2,3,\ldots,n$ に対して，$s_p=0$ である．また，明らかに，各 $p=1,2,3,\ldots,n$ に対して，$s_p=0$ であれば，商 $f_1(z)/f_0(z)$ は奇函数である．このことから，$zf_1(z^2)/f_0(z^2)$ が Jacobi 連分数展開可能であれば，$zf_1(z^2)/f_0(z^2)$ は奇函数なので，Jacobi 連分数展開における s_p は全て 0 でなければならない．したがって，r_p の表記を k_p に変えると，

$$\frac{zf_1(z^2)}{f_0(z^2)}=\frac{1|}{|k_1z}+\frac{1|}{|k_2z}+\frac{1|}{|k_3z}+\cdots+\frac{1|}{|k_mz} \tag{3.39}$$

となる．ただし，$\deg f_0 = n$ である．また，$f_0(0) = 0$ であれば $m = 2n-1$ であり，$f_0(0) \neq 0$ であれば $m = 2n$ である．左辺を $f_1(z)/f_0(z)$ にするために，z^2 を z に取り直すと，

$$\frac{f_1(z)}{f_0(z)} = \frac{1|}{|k_1 z} + \frac{1|}{|k_2} + \frac{1|}{|k_3 z} + \cdots + \frac{1}{T}, \quad T = \begin{cases} k_{2n-1}z & \text{if} \quad f_0(0) = 0, \\ k_{2n} & \text{if} \quad f_0(0) \neq 0. \end{cases} \tag{3.40}$$

逆に，連分数展開 (3.40) があれば，連分数 (3.39) から連分数 (3.40) に移る同値変換が存在するので，連分数 (3.39) の展開も必ずあり，$f_1(z)/f_0(z)$ の一意性から，k_p の一意性も分かる．また，リスト (3.17) から，すぐ次のリストが分かる：

$$\begin{array}{lllll} & a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & \cdots, \\ & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \cdots, \\ k_1 = \dfrac{a_{00}}{a_{11}}, & a_{22} = a_{01} - k_1 a_{12}, & a_{23} = a_{02} - k_1 a_{13}, & a_{24} = a_{03} - k_1 a_{14}, & \cdots, \\ k_2 = \dfrac{a_{11}}{a_{22}}, & a_{33} = a_{12} - k_2 a_{23}, & a_{34} = a_{13} - k_2 a_{24}, & a_{35} = a_{14} - k_2 a_{25}, & \cdots, \\ & & \cdots. & & \end{array} \tag{3.41}$$

さらに，定理 3.14 から，連分数展開 (3.40) をもつことと，各 $p = 1, 2, 3, \ldots, m$ に対して，商 $zf_1(z^2)/f_0(z^2)$ の係数からなる行列式 $D'_p \neq 0$ となることは同値である．ここで，D'_p は

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}, & 0, & a_{12}, & 0, & a_{13}, & 0, & a_{14}, & 0, & \ldots, \\ a_{00}, & 0, & a_{01}, & 0, & a_{02}, & 0, & a_{03}, & 0, & \ldots, \\ 0, & a_{11}, & 0, & a_{12}, & 0, & a_{13}, & 0, & a_{14}, & \ldots, \\ 0, & a_{00}, & 0, & a_{01}, & 0, & a_{02}, & 0, & a_{03}, & \ldots, \\ 0, & 0, & a_{11}, & 0, & a_{12}, & 0, & a_{13}, & 0, & \ldots, \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \end{array} \tag{3.42}$$

から切り取ってできる行列式

$$D'_1 = a_{11}, \quad D'_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{00} & 0 & a_{01} \\ 0 & a_{11} & 0 \end{vmatrix}, \quad D'_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & a_{13} \\ a_{00} & 0 & a_{01} & 0 & a_{02} \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{00} & 0 & a_{01} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \end{vmatrix}, \ldots$$

である．さらにリスト (3.20) から次のような行列式を切り取る：

$$W_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{00} & a_{01} \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{00} & a_{01} & a_{02} \end{vmatrix}, \ldots$$

このとき,

$$\begin{aligned} D'_0 &= a_{00} = D_0 W_0, \qquad W_0 = 1, \\ D'_1 &= a_{11} = D_1 W_0, \\ D'_2 &= -D_1 W_1, \\ D'_3 &= -D_2 W_1, \\ &\cdots \\ D'_{2p} &= (-1)^p D_p W_p, \\ D'_{2p+1} &= (-1)^p D_{p+1} W_p. \end{aligned} \tag{3.43}$$

ゆえに，次の定理が従う：

定理 3.14. ([Wa48]) (3.14) の多項式函数 $f_0,\ f_1$ に関して，商 f_1/f_0 が各 $p = 1, 2, 3, \ldots, m$ に対し連分数展開 (3.40) をもつための必要十分条件は，行列式 $D_p \neq 0$, $(p = 0, 1, 2, \ldots, n)$ かつ，$W_k \neq 0$, $(k = 0, 1, 2, \ldots, m)$．ただし，$m = \begin{cases} n-1 & \text{if} \quad f_0(0) = 0, \\ n & \text{if} \quad f_0(0) \neq 0. \end{cases}$

また,

$$a_0 = \frac{1}{k_1}, \quad a_p = -\frac{1}{k_p k_{p+1}}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots, m \tag{3.44}$$

とおくと，連分数展開 (3.40) は,

$$\frac{a_0|}{|z} - \frac{a_1|}{|1} - \frac{a_2|}{|z} - \frac{a_3|}{|1} - \cdots \tag{3.45}$$

に書き変わる．さらに，関係式 (3.29) と (3.43) から,

$$a_0 = \frac{D_1}{D_0}, \quad a_{2p-1} = -\frac{D_{p-1} W_p}{D_p W_{p-1}}, \quad a_{2p} = -\frac{W_{p-1} D_{p+1}}{D_p W_p} \tag{3.46}$$

が計算によりわかる．

第4章　ローラン級数に対するJacobi連分数展開

ここでは，ローラン級数 $\sum\left(c_p/z^{p+1}\right)$ を Jacobi 連分数展開にうつす問題を考える．これは，ある種の直交多項式と関係している．まずは，このような連分数展開が存在することと，ある多項式列で，ローラン級数の係数列 $\{c_p\}$ と直交するものが構成できることが必要十分であることを示す．さらに，この多項式は Jacobi 連分数の分母に相当するものとなる．最後に，収束に関する問題と，ローラン級数と Jacobi 連分数展開との間に成り立つ関係について述べる．

4.1　係数列と直交する多項式

いま，各 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して，$c_n \in \mathbb{C}$ とする．以後，簡略のために，$c := \{c_n\}$ と書くことにする．この数列に関して，変数 u の多項式に対して次のように作用する形式的な積分を定める：

$$\int (k_0 + k_1 u + \cdots + k_n u^n)\, d\phi_c(u) = k_0 c_0 + k_1 c_1 + \cdots + k_n c_n.$$

ここで，$\phi_c(u)$ は，u に関する多項式に対して，u を定数 c に置き換えるという意味の記号として用いるとする．この作用を 2 つ以上の多項式の積を用いて行う場合は，作用を施す前に，始めに積を考え，新たな多項式を構成してから作用させるものとする．

定義 4.1. $k \in [0, \infty]$ を任意に 1 つ固定する．多項式列 $\{B_p(u)\}_{p=0}^{k}$ が **c に関して直交している**とは，

$$\int B_p(u) B_q(u) d\phi_c(u) = 0 \quad \text{for} \quad p \neq q$$

となることである．

次のような問題を考える： 各 $p = 0, 1, 2, \dots, m,\ (m > 1)$ に対して，

$$\int B_p(u) B_q(u) d\phi_c(u) \begin{cases} = 0 & \text{for} \qquad p \neq q, \quad p, q \leq m, \\ \neq 0 & \text{for} \qquad p = q < m \end{cases} \tag{4.1}$$

であるような多項式 $B_p(u) = u^p + \beta_{p1} u^{p-1} + \cdots + \beta_{pp}$ を構成することを考える．まず，このような多項式が存在するための必要条件は，

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_p \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{p+1} \\ & & \cdots & \\ c_p & c_{p+1} & \cdots & c_{2p} \end{vmatrix} \neq 0, \quad p = 0, 1, 2, \dots, m-1 \tag{4.2}$$

となることである．実際，

$$0 \neq \int B_0^2(u)d\phi_c(u) = \int 1 \cdot d\phi_c(u) = c_0$$

なので，$\Delta_0 = c_0 \neq 0$ が必要である．いま，$0 < q < m$ を固定すると，帰納的に

$$\begin{aligned}
\int B_0(u)B_q(u)d\phi_c(u) &= \int B_q(u)d\phi_c(u) = 0, \\
\int B_1(u)B_q(u)d\phi_c(u) &= \int uB_q(u)d\phi_c(u) = 0, \\
&\cdots \\
\int B_{p-1}(u)B_q(u)d\phi_c(u) &= \int u^{p-1}B_q(u)d\phi_c(u) = 0, \\
\int B_q^2(u)d\phi_c(u) &= \int u^q B_q(u)d\phi_c(u) =: h_p \neq 0
\end{aligned}$$

が分かる．ゆえに，

$$\Delta_q = h_q\Delta_{q-1}, \quad q = 0, 1, 2, \ldots, m-1, \quad (\Delta_{-1} = 1)$$

となり，条件 (4.2) が成り立つ．

逆に，条件 (4.2) を仮定すると，

$$\int B_0^2(u)d\phi_c(u) = \int 1 \cdot d\phi_c(u) = c_0 = \Delta_0 \neq 0.$$

ここで，$a_0 := c_0$，$B_1(u) := u + b_1$ とすると，

$$\int B_0(u)B_1(u)d\phi_c(u) = c_1 + c_0b_1 = 0$$

であるためには，

$$\int B_0(u)d\phi_c(u) = a_0, \quad \int uB_0(u)d\phi_c(u) = -a_0b_1$$

が必要十分である．そして $a_0 \neq 0$ であることから，b_1 も定まり，B_1 も一意的に定まる．さらに帰納法により，$n < m$ として，$B_0(u), B_1(u), B_2(u), \ldots, B_n(u)$ が一意的に定まっていて，$p, q \leq m$ に対して，直交条件 (4.1) を満たし，さらに，定数 a_p, b_p は

$$\int u^p B_p(u)d\phi_c(u) = a_0a_1\cdots a_p \neq 0,$$

$$\int u^{p+1}B_p(u)d\phi_c(u) = -a_0a_1\cdots a_p(b_1+b_2+\cdots+b_{p+1}),\ p = 0, 1, 2, \ldots, n-1,\ B_{-1}(u) = 0 \tag{4.3}$$

で定まり，多項式 $B_p(u)$ は，

$$B_p(u) = (b_p + u)B_{p-1}(u) - a_{p-1}B_{p-2}(u), \quad p = 1, 2, 3, \ldots, n, \quad B_{-1}(u) = 0 \tag{4.4}$$

を満たすとする．まず，多項式 $B_{n+1}(u)$ は，$\deg B_{n+1}(u) = n+1$ であり，かつモニック多項式であるとき，

$$B_{n+1}(u) = (b_{n+1}+u)B_n(u) - a_nB_{n-1}(u) + k_0B_0(u) + k_1B_1(u) + \cdots + k_{n-2}B_{n-2}(u)$$

と一意的に書くことができる．ここで，$b_{n+1}, a_n, k_0, k_1, \ldots, k_{n-2}$ は定数である．条件

$$\int u^p(u)B_{n+1}(u)d\phi_c(u) = 0, \quad p = 0,1,2,\ldots,n-2$$

から，$k_0a_0 = 0$, $k_1a_0a_1 = 0$,…,$k_{n-2}a_0a_1\cdots a_{n-2} = 0$．ゆえに，$k_0 = k_1 = \cdots = k_{n-2} = 0$．さらに条件

$$\int u^{n-1}B_{n+1}(u)d\phi_c(u) = 0, \quad \int u^nB_{n+1}(u)d\phi_c(u) = 0$$

より，$p = n$ に対して，条件 (4.3) が成り立つ．さらに，

$$\int u^pB_n(u)d\phi_c(u) = 0, \quad p = 0,1,2,\ldots,n-1,$$
$$\int u^nB_n(u)d\phi_c(u) = a_0a_1\cdots a_n$$

より，$\Delta_n = a_0a_1\cdots a_n\Delta_{n-1}$ が分かり，$\Delta_n \neq 0$ より，$a_n \neq 0$．ゆえに，b_{n+1} も一意的である．さらに，$p, q \leq n+1$ $(p \neq q)$ に対して，

$$\int B_p(u)B_q(u)d\phi_c(u) = 0,$$

かつ，$n+1 < m$ とすると，

$$\int B_{n+1}^2(u)d\phi_c(u) = \int u^{n+1}B_{n+1}(u)d\phi_c(u) \neq 0.$$

ゆえに，$\Delta_{n+1} = 0$．つまり，これで以下の定理を示したことになる：

定理 4.2. ([Wa48]) $c = \{c_p\}$ とし，自然数 $m > 1$ に対して，条件 (4.2) が成り立つとする．このとき，直交条件 (4.1) が成り立つような多項式 $B_p(u) = u^p + \beta_{n1} + \cdots + \beta_{nn}$, $(p = 0,1,2,\ldots,m)$ が一意的に存在する．そして，この多項式は，

$$\begin{aligned} &B_0(u) = 1, \quad B_1(u) = b_1 + u, \\ &B_p(u) = (b_p+u)B_{p-1}(u) - a_{p-1}B_{p-2}(u), \quad p = 2,3,4,\ldots,m; \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} &\int u^pB_p(u)d\phi_c(u) = a_0a_1\cdots a_p, \\ &\int u^{p+1}B_p(u)d\phi_c(u) = -a_0a_1\cdots a_p(b_1+b_2+\cdots+b_{p+1}), \quad p = 0,1,2,\ldots,m-1 \end{aligned} \tag{4.6}$$

で与えられる．逆に，条件 (4.2) が成り立たなければ，このような多項式は存在しない．

註 4.3. 最初に係数列 $\{a_p\}$, $\{b_p\}$ が与えられていて，さらに $a_p \neq 0$, $(p = 1,2,3,\ldots)$ であれば，関係式 (4.5) と (4.6) から，$c_0, c_1, \ldots, c_{2m-1}$ は一意的である．

4.2　ローラン級数を Jacobi 連分数展開にうつすアルゴリズム

式 (4.5) から，多項式 $B_p(z)$ は，Jacobi 連分数

$$\frac{a_0|}{|b_1+z} - \frac{a_1|}{|b_2+z} - \cdots - \frac{a_{m-1}|}{|b_m+z} \tag{4.7}$$

の分母である．また，

$$P\left(\frac{1}{z}\right) := \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c_p}{z^{p+1}} \tag{4.8}$$

を形式的ローラン級数とする．$P(1/z)B_p(z)$ における $1/z, 1/z^2, \ldots, 1/z^p$ に関する係数は，

$$\int u^r B_p(u) d\phi_c(u) = 0, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, p-1$$

であり，$1/z^{p+1}, 1/z^{p+2}$ の係数は，

$$\int u^p B_p(u) d\phi_c(u) = a_0 a_1 \cdots a_p,$$
$$\int u^{p+1} B_p(u) d\phi_c(u) = -a_0 a_1 \cdots a_p(b_1 + b_2 + \cdots + b_{p+1})$$

で，それぞれ与えられる．これより，次数が $p-1$ である多項式 $A_p(z)$ が存在して，

$$P\left(\frac{1}{z}\right) B_p(z) - A_p(z) = \frac{a_0 a_1 \cdots a_p}{z^{p+1}} - \frac{a_0 a_1 \cdots a_p(b_1 + b_2 + \cdots + b_{p+1})}{z^{p+2}} + \cdots, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \tag{4.9}$$

であり，両辺を $B_p(z)$ で除算をし移項すると，

$$\frac{A_p(z)}{B_p(z)} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \cdots + \frac{c_{2p-1}}{z^{2p}} + \frac{c_{2p}^{(p)}}{z^{2p+1}} + \cdots . \tag{4.10}$$

さらに，前章で出てきた，ローラン級数展開 (3.32) から Jacobi 連分数の n 次近似値は，

$$\frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{c_p}{z^{p+1}} + \frac{c_{2n}^{(n)}}{z^{2n+1}} + \cdots$$

だったので，ローラン級数展開 (4.10) が Jacobi 連分数の p 次の近似値になっていることが分かる．各 $m = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，条件 (4.2) が成り立っているときに限り，多項式列 $\{B_m(z)\}$ が作れる．$2p$ 次の項までローラン展開 $P(1/z)$ が Jacobi 連分数の p 次の近似値と一致しているとき，これを **Jacobi 連分数のローラン級数展開**とよぶ．さらに，係数列 $\{c_p\}$ を Jacobi 連分数の**モーメント**とよぶ．これまでの議論により，次の定理を得る：

定理 4.4. ([Wa48]) 各 $p = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，行列式 $\Delta_p \neq 0$ であるローラン級数 $P(1/z)$ と Jacobi 連分数との間に一対一対応がある．このとき，a_p を Jacobi 連分数の係数としたとき，

$$\Delta_p = a_0 a_1 \cdots a_p \Delta_{p-1}, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, \quad (\Delta_{-1} = 1) \tag{4.11}$$

である．

もし，ローラン級数 $P(1/z)$ が z の有理函数ならば，ある自然数 $p \in \mathbb{N}$ があって，$a_p = 0$ となるので，$\Delta_p = 0$．ゆえに次の定理が分かる：

定理 4.5. ([Wa48]) Jacobi 連分数に対して，任意の自然数 $p \in \mathbb{N}$ に対して，$a_p \neq 0$ ならば，ローラン級数展開は z の有理函数で表せない．

直交多項式を構成するために，関係式 (4.6) を行列表示し，計算しやすくしたものが次である：

$$\begin{aligned}
B_p(z) &= z^p + \beta_{p1} z^{p-1} + \beta_{p2} z^{p-2} + \cdots + \beta_{pp}, \\
A_p(z) &= \alpha_p z^{p-1} + \alpha_{p1} z^{p-2} + \cdots + \beta_{p,p-1};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{00} &= 1, \\
c_0 \beta_{00} &= a_0, \\
c_1 \beta_{00} &= -a_0 b_1 = h_0; \\
b_1 &= -\frac{h_0}{a_0}, \\
(\beta_{10}\ \beta_{11}) &= (1\ b_1), \\
(c_2\ c_1) \begin{pmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{11} \end{pmatrix} &= a_0 a_1, \\
(c_3\ c_2) \begin{pmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{11} \end{pmatrix} &= -a_0 a_1 (b_1 + b_2) = h_1; \\
b_2 &= \frac{h_0}{a_0} - \frac{h_1}{a0a_1}, \\
(\beta_{20}\ \beta_{21}\ \beta_{22}) &= (\beta_{10}\ \beta_{11}) \begin{pmatrix} 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 \end{pmatrix} - a_1 (0\ 0\ \beta_{00}), \\
(c_4\ c_3\ c_2) \begin{pmatrix} \beta_{20} \\ \beta_{21} \\ \beta_{22} \end{pmatrix} &= a_0 a_1 a_2, \\
(c_5\ c_4\ c_3) \begin{pmatrix} \beta_{20} \\ \beta_{21} \\ \beta_{22} \end{pmatrix} &= -a_0 a_1 a_2 (b_1 + b_2 + b_3) = h_2; \\
b_3 &= \frac{h_1}{a_0 a_1} - \frac{h_2}{a_0 a_1 a_2}, \\
(\beta_{30}\ \beta_{31}\ \beta_{32}\ \beta_{33}) &= (\beta_{20}\ \beta_{21}\ \beta_{22}) \begin{pmatrix} 1 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{pmatrix} - a_2 (0\ 0\ \beta_{10}\ \beta_{11}), \\
&\cdots
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$(\alpha_{p0}\ \alpha_{p1}\ \alpha_{p2}\ \cdots) = (\beta_{p0}\ \beta_{p1}\ \beta_{p2}\ \cdots). \tag{4.13}$$

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{p-1} \\ 0 & c_0 & \cdots & c_{p-2} \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & c_0 \end{pmatrix}.$$

各ステップの最初の 2 段は関係式 (4.5) の手順を表し，最後の 2 段は関係式 (4.6) の手順を表している．式 (4.13) は，式 (4.9) の右辺に現れる $z^0, z^1, z^2, \ldots, z^{2p-1}$ の各係数を計算することで得られる．

上のアルゴリズムで Jacobi 連分数展開を考えてみる．

例 4.6. 係数列

$$c_p = \frac{1}{p+1}, \quad p = 0, 1, 2, \ldots$$

とし，ローラン級数

$$P\left(\frac{1}{z}\right) = \log\frac{z}{z-1} = \frac{1}{z} + \frac{1/2}{z^2} + \frac{1/3}{z^3} + \cdots$$

とするとき，Jacobi 連分数展開を求める．

$$\begin{aligned}
\beta_{00} &= 1, \\
c_0\beta_{00} &= a_0 = 1, \\
c_1\beta_{00} &= -a_0 b_1 = \frac{1}{2}; \\
b_1 &= -\frac{1}{2}, \\
(\beta_{10}\ \beta_{11}) &= (1\ \ -1/2), \\
(c_2\ c_1)\begin{pmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{11} \end{pmatrix} &= (1/3\ 1/2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = a_0 a_1 = \frac{1}{12}, \quad a_1 = \frac{1}{12} \\
(1/4\ 1/3)\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} &= -a_0 a_1 (b_1 + b_2) = \frac{1}{12} = h_1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= -\frac{1}{2}, \\
(\beta_{20}\ \beta_{21}\ \beta_{22}) &= (1\ \ -1/2)\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} - (1/12)(0\ 0\ 1), \\
&= (1\ \ -1\ 1/6) \\
(1/5\ 1/4\ 1/3)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/6 \end{pmatrix} &= a_0 a_1 a_2 = \frac{1}{180}, \quad a_2 = \frac{1}{15}, \\
(1/6\ 1/5\ 1/4)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/6 \end{pmatrix} &= -a_0 a_1 a_2 (b_1 + b_2 + b_3) = \frac{1}{120} = h_2;
\end{aligned}$$

$$b_3 = -\frac{1}{2},$$
$$(\beta_{30}\ \beta_{31}\ \beta_{32}\ \beta_{33}) = (1\ \ -2/3\ 3/5\ \ -1/20),$$
$$(\alpha_{30}\ \alpha_{31}\ \alpha_{32}) = (1\ \ -1\ 11/60).$$

ゆえに，

$$\frac{1|}{|-1/2+z} - \frac{1/12|}{|-1/2+z} - \frac{1/15|}{|-1/2+z} = \frac{z^2 - z + 11/60}{z^3 - 3z^2/2 + 3z/5 - 1/20}.$$

ちなみに，$z = -1$ とすると，連分数の値は，$-0.69312\cdots$ となり，$-\log 2 = 0.69314\cdots$ と小数第４位まで一致する．

4.3 Stieltjes 連分数に対するローラン級数

前章では，Stieltjes 連分数を定義した．もう一度確認すると，

$$\frac{1|}{|k_1 z} + \frac{1|}{|k_2} + \frac{1|}{|k_3 z} + \frac{1|}{|k_4} + \cdots$$

という形をしていた．この定め方から，Jacobi 連分数で，各 $p = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，$b_p = 0$ であれば，Stieltjes 連分数になることが分かる．実際，連分数

$$\frac{a_0|}{|z} - \frac{a_1|}{|z} - \frac{a_2|}{|z} - \cdots \tag{4.14}$$

に対して，同値変換を施すと，

$$\frac{a_0 z|}{|z^2} - \frac{a_1|}{|1} - \frac{a_2|}{|z^2} - \frac{a_3|}{|1} - \cdots \tag{4.15}$$

となる．さらに $P(1/z)$ を連分数 (4.14) のローラン級数とすると，

$$\frac{1}{z} \cdot P\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{c_0}{z^2} + \frac{c_1}{z^4} + \frac{c_2}{z^6} + \cdots \tag{4.16}$$

と書き変わる．さらに，両辺を $1/z$ 倍して，z^2 を z と取り直すと，

$$\frac{a_0|}{|z} - \frac{a_1|}{|1} - \frac{a_2|}{|z} - \frac{a_3|}{|1} - \cdots \tag{4.17}$$

という Stieltjes 連分数になる．そして，そのローラン級数は，

$$\frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \cdots \tag{4.18}$$

になる．このとき，Jacobi 連分数のモーメントは $c_0, 0, c_1, 0, c_2, 0, c_3, \ldots$ であるので，ローラン級数展開との一対一対応が存在するためには，行列式

$$c_0, \quad \begin{vmatrix} c_0 & 0 \\ 0 & c_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_0 & 0 & c_1 \\ 0 & c_0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 \end{vmatrix}, \cdots \tag{4.19}$$

が全て 0 とならないことが必要十分である．ここで，

$$\Omega_p = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{p+1} \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_{p+2} \\ & & \cdots & \\ c_{p+1} & c_{p+2} & \cdots & c_{2p+1} \end{vmatrix}, \quad p = 0, 1, 2, \dots \tag{4.20}$$

とおくと，行列式 (4.19) は

$$\Delta_0, \quad \Delta_0\Omega_0, \quad \Delta_1\Omega_0, \quad \Delta_1\Omega_1, \cdots$$

とそれぞれ書けることがわかる．つまり，ローラン級数 (4.18) に対して，Stieltjes 連分数展開 (4.17) をもつための必要条件は，

$$\Delta_p \neq 0, \quad \Omega_p \neq 0, \quad p = 0, 1, 2, \dots \tag{4.21}$$

である．逆にこの条件が満たされていれば，$c_0, 0, c_1, 0, c_2, 0, c_3, \dots$ が Jacobi 連分数のモーメントであったので，行列式 (4.19) は全て 0 でない．この Jacobi 連分数を構成するために，各 $p = 0, 1, 2, \dots$ に対して，c_{2p} を c_p に，c_{2p+1} を 0 にそれぞれ置き換えると，リスト (4.12) において，

$$\begin{aligned} &b_1 = 0, \quad \beta_{11} = 0, \\ &b_2 = 0, \quad \beta_{21} = 0, \\ &b_3 = 0, \quad \beta_{31} = 0, \quad \beta_{33} = 0, \\ &b_4 = 0, \quad \beta_{41} = 0, \quad \beta_{43} = 0, \\ &b_5 = 0, \quad \beta_{51} = 0, \quad \beta_{53} = 0, \quad \beta_{55} = 0, \\ &\qquad\qquad \cdots \end{aligned}$$

となる．ゆえに，連分数展開 (4.14) を持つので，ローラン級数 (4.18) は Stieltjes 連分数展開 (4.17) をもつ．結果をまとめると次のようになる：

定理 4.7. ([Wa48]) 各 $p = 0, 1, 2, \dots$ に対して，$\Delta_p \neq 0$, $\Omega_p \neq 0$ が成り立つようなローラン級数展開 (4.18) と，部分分子 $a_p \neq 0$ であるような Stieltjes 連分数との間には，一対一対応がある．

註 4.8. Stieltjes 連分数展開 (4.17) において，各 $p = 0, 1, 2, \dots$ に対し，部分分子 $a_p > 0$ であることと，$\Delta_p > 0$, $\Omega_p > 0$ であることは同値である．

また，Jacobi 連分数と同様に，次の定理も分かる (c.f. 定理 4.5)：

定理 4.9. ([Wa48]) Stieltjes 連分数に対して，任意の自然数 $p \in \mathbb{N}$ に対して，部分分子 $a_p \neq 0$ ならば，ローラン級数展開は z の有理函数で表せない．

4.4 Stieltjes の展開定理

前節では，何段階かの手順を踏むことによって，ローラン級数を Jacobi 連分数展開する手法を調べた．ここでは Stieltjes [St89] によって導入された，1 回の手続きで，一気に連分数展開を得る方法を紹介する．

定理 4.10 (Stieltjes の展開定理)**.** Jacobi 連分数

$$\frac{1|}{|b_1+z}-\frac{a_1|}{|b_2+z}-\frac{a_2|}{|b_3+z}-\cdots \tag{4.22}$$

の係数と，ローラン級数

$$P\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p c_p}{z^{p+1}} \tag{4.23}$$

は，関係式

$$\begin{aligned}&c_{p+q}=k_{0p}k_{0q}+a_1k_{1p}k_{1q}+a_1a_2k_{2p}k_{2q}+\cdots,\\ &k_{00}=1,\quad k_{rs}=0\quad \text{if}\quad r>s\end{aligned} \tag{4.24}$$

で結びつけられる．ここで，定数 k_{rs} $(r\le s)$ は，

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}k_{00}&0&0&0&\cdots\\ k_{01}&k_{11}&0&0&\cdots\\ k_{02}&k_{12}&k_{22}&0&\cdots\\ &&\cdots&&\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1&1&0&0&0&\cdots\\ a_1&b_2&1&0&0&\cdots\\ 0&a_2&b_3&1&0&\cdots\\ &&\cdots&&&\end{pmatrix}\\ &\qquad=\begin{pmatrix}k_{01}&k_{11}&0&0&0&\cdots\\ k_{02}&k_{12}&k_{22}&0&0&\cdots\\ k_{03}&k_{13}&k_{23}&k_{33}&0&\cdots\\ &&\cdots&&&\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.25}$$

で与えられる．さらに，次の分解ができる：

$$\begin{aligned}\sum_{p,q=0}^{\infty}c_{p+q}x_px_q&=(x_0+k_{01}x_1+k_{02}x_2+\cdots)^2\\ &\quad+a_1(x_1+k_{12}x_2+k_{13}x_3+\cdots)^2\\ &\quad\quad+a_1a_2(x_2+k_{23}x_3+k_{24}x_4+\cdots)^2+\cdots.\end{aligned} \tag{4.26}$$

逆に，各 $p=1,2,3,\dots$ に対して，部分分子 $a_p\neq 0$ で，(4.26) の分解が可能ならば，$P(1/z)$ は Jacobi 連分数 (4.22) のローラン級数展開である．ただし，各 $p=1,2,3,\dots$ に対して

$$b_1=k_{01},\quad b_{p+1}=k_{p,p+1}-k_{p-1,p} \tag{4.27}$$

である．最後に，ローラン級数 (4.23) を Jacobi 連分数 (4.22) にうつす問題は，

$$Q(z)=\sum_{p=0}^{\infty}c_p\frac{z^p}{p!},\quad Q_r(z)=\sum_{p=r}^{\infty}k_{rp}\frac{z^p}{p!},\quad (c_0=1) \tag{4.28}$$

としたとき，

$$Q(x+y) = Q(x)Q(y) + a_1Q_1(x)Q_1(y) + a_1a_2Q_2(x)Q_2(y) + \cdots \tag{4.29}$$

なるローラン級数を得ることと同値である．

証明．まず，

$$\sum_{p,q=0}^{\infty} c_{p+q}\frac{x^p}{p!}\cdot\frac{y^q}{q!} = Q(x)Q(y) + a_1Q_1(x)Q_1(y) + a_1a_2Q_2(x)Q_2(y) + \cdots$$

と書けるので，y を x に取り替えて，分母の階乗に気をつければ，(4.26) の分解に一致することが分かる．いま，

$$C_{p+q} := k_{0p}k_{0q} + a_1k_{1p}k_{1q} + a_1a_2k_{2p}k_{2q} + \cdots$$

とおく．条件 (4.25) より，

$$\begin{aligned}
C_{p,q+1} &= k_{0p}(b_1k_{0q} + a_1k_{1q}) + a_1k_{1p}(k_{0q} + b_2k_{1q} + a_2k_{2q}) \\
&\quad + a_1a_2k_{2p}(k_{1q} + b_3k_{2q} + a_3k_{3q}) + \cdots, \\
C_{p+1,q} &= k_{0q}(b_1k_{0p} + a_1k_{1p}) + a_1k_{1q}(k_{0p} + b_2k_{1p} + a_2k_{2p}) \\
&\quad + a_1a_2k_{2q}(k_{1p} + b_3k_{2p} + a_3k_{3p}) + \cdots.
\end{aligned}$$

ゆえに，展開して各項を比べることにより，

$$C_{p,q+1} = C_{p+1,q} = C_{p+2,q-1} = \cdots = C_{p+q+1,0} = C_{p-1,q+2} = C_{p-2,q+3} = \cdots = C_{0,p+q+1}.$$

したがって，$p+q = r+s$ ならば，$C_{p,q} = C_{r,s}$ がわかる．ゆえに，$C_{p,q} = C_{p+q}$ と書いてもよい．いま，双線型形式

$$C = \sum_{p,q=0}^{\infty} C_{p+q}x_px_q$$

を考えると，

$$\begin{aligned}
C &= (k_{00}x_0 + k_{01}x_1 + k_{02}x_2 + \cdots)(k_{00}y_0 + k_{01}y_1 + k_{02}y_2 + \cdots) \\
&\quad + a_1(k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3 + \cdots)(k_{11}y_1 + k_{12}y_2 + k_{13}y_3 + \cdots) \\
&\quad + a_1a_2(k_{22}x_2 + k_{23}x_3 + k_{24}x_4 + \cdots)(k_{22}y_2 + k_{23}y_3 + k_{24}y_4 + \cdots) \\
&\quad + \cdots.
\end{aligned}$$

ここで，$p,q > n$ に対して，$x_p, y_q = 0$ とし，さらに

$$\begin{aligned}
U_0 &= k_{00}x_0 + k_{01}x_1 + k_{02}x_2 + \cdots + k_{0n}x_n, \\
U_1 &= \qquad\qquad k_{11}x_1 + k_{01}x_1 + \cdots + k_{1n}x_n, \\
&\cdots \\
U_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k_{nn}x_n, \\
V_0 &= k_{00}y_0 + k_{01}y_1 + k_{02}y_2 + \cdots + k_{0n}y_n, \\
V_1 &= \qquad\qquad k_{11}y_1 + k_{01}y_1 + \cdots + k_{1n}y_n, \\
&\cdots \\
V_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k_{nn}y_n
\end{aligned}$$

とおくと，

$$\sum_{p,q=0}^{n} C_{p+q}x_p y_q = \sum_{p=0}^{n} a_0 a_1 \cdots a_p U_p V_p, \quad (a_0 = 1)$$

となる．また，上の線形変換の行列式

$$\begin{vmatrix} k_{00} & k_{11} & \cdots & k_{0n} \\ 0 & k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & k_{nn} \end{vmatrix} = 1$$

より，

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_p \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_{p+1} \\ & & \cdots & \\ C_p & C_{p+1} & \cdots & C_{2p} \end{vmatrix} = a_0^{p+1} a_1^p a_2^{p-1} \cdots a_{p-1}^2 a_p.$$

ローラン級数 (4.23) の Jacobi 連分数展開より，各 $p = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $a_p \neq 0$ なので，

$$\Delta_p = a_0 a_1 \cdots a_p \Delta_{p-1}, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, \quad (\Delta_{-1} = 1). \tag{4.30}$$

同様にして，$x_n = y_n = 0,\ p, q > n+1$ に対して，$x_p, y_q = 0$ のときは，

$$\begin{aligned} \Delta'_p &= k_{p,p+1} a_0^{p+1} a_1^p \cdots a_{p-1}^2 a_p \\ &= (a_0 a_1 \cdots a_p)(b_1 + b_2 + \cdots + b_{p+1})\Delta_{p-1} \end{aligned} \tag{4.31}$$

となる．ここで，

$$\Delta'_p = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_{p+1} \\ C_2 & C_3 & \cdots & C_{p+2} \\ & & \cdots & \\ C_{p+1} & C_{p+2} & \cdots & C_{2p+1} \end{vmatrix}$$

である．いま，式 (4.30) と (4.31) はまさに，ローラン級数展開 (4.9) において，C_p を c_p に取り替えた $1/z, 1/z^2, \ldots, 1/z^{p+2}$ の係数と同一視できる．定理 4.2 の註から，行列式 $\Delta_p \neq 0$ かつ，ローラン級数の係数であるような c_p によって，a_p, b_p が一意に決まることを述べた．よって，この C_p をローラン級数の係数とみてよい，すなわち，$C_p = c_p$，$(p = 0, 1, 2 \ldots)$．ゆえに，関係式 (4.24) が分かる．

逆に，(4.26) の分解ができるとすると，$C_p = c_p$ において，式 (4.30) と (4.31) が成り立つので，ローラン級数は Jacobi 連分数展開 (4.22) をもつ． □

実際に，上の定理を用いて，連分数展開を構成してみる．

例 4.11. 広義積分

$$\int_0^\infty \mathrm{sech}^k u \cdot e^{-zu} du = \frac{1|}{|z} + \frac{1 \cdot k|}{|z} + \frac{2(k+1)|}{|z} + \frac{3(k+2)|}{|z} + \cdots \tag{4.32}$$

における連分数展開を求める．

まず，

$$\mathrm{sech}^k u = 1 - \frac{kz^2}{2!} + \frac{1}{4!}k(3k+2)z^4 - \frac{1}{6!}\{k(15k^2+30k+16)\}z^6 + \cdots$$

と級数展開されることを用いて，広義積分 (4.32) の左辺を計算すると，

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \mathrm{sech}^k u \cdot e^{-zu} du \\
&\quad = \int_0^\infty \left(1 - \frac{kz^2}{2!} + \frac{1}{4!}k(3k+2)z^4 - \frac{1}{6!}\{k(15k^2+30k+16)\}z^6 + \cdots\right) e^{-zu} du \\
&\quad = \int_0^\infty e^{-zu} du - \int_0^\infty \frac{kz^2}{2!} e^{-zu} du + \cdots \\
&\quad = \frac{1}{z} - \frac{k}{z^3} + \frac{k(3k+2)}{z^5} - \cdots
\end{aligned} \tag{4.33}$$

となるので，係数列

$$c = (c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, \dots) = (1, 0, k, 0, k(3k+2), \dots),$$

つまり，ローラン級数

$$\frac{1}{z} - \frac{k}{z^3} + \frac{k(3k+2)}{z^5} - \cdots$$

を Jacobi 連分数展開することになる．これを，直前の定理を使うと，

$$\begin{aligned}
\mathrm{sech}^k(x+y) &= (\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y)^{-k} \\
&= \mathrm{sech}^k x\ \mathrm{sech}^k y - k\mathrm{sech}^{k+1} x \sinh x\ \mathrm{sech}^{k+1} y \sinh y \\
&\quad - \frac{k(k+1)}{1 \cdot 2} \mathrm{sech}^{k+2} x \sinh^2 x\ \mathrm{sech}^{k+2} y \sinh^2 y - \cdots \\
&= Q(x)Q(y) + a_1 Q_1(x)Q_1(y) + a_1 a_2 Q_2(x) Q_2(y) + \cdots,
\end{aligned}$$

ただし，

$$Q_p(z) = \frac{\mathrm{sech}^{k+p} z \sinh^p z}{p!} = \frac{z^p}{p!} + k_{p,p+1}\frac{z^{p+1}}{(p+1)!} + \cdots,$$

$$a_p = -p(k+p-1), \quad k_{p,p+1} = 0$$

であるような多項式を考えると，Jacobi 連分数展開を構成できるということである．

関係式 (4.25) は，Jacobi 連分数展開をローラン級数に展開する最も便利な手法である．このことを確認するために，連分数

$$\frac{1|}{|z+1} - \frac{1^2 t|}{|z+t+2} - \frac{2^2 t|}{|z+2t+3} - \frac{3^2 t|}{|z+3t+4} - \cdots$$

において最初の何項かを見てみる．関係式 (4.25) は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 11 & 0 & 0 & \cdots \\ t+1 & t+3 & 1 & 0 & \cdots \\ & & \cdots & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ t & t+2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 4t & 2t+3 & 1 & 0 & \cdots \\ & & \cdots & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ t+1 & t+3 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ t^2+4t+1 & t^2+10t+7 & 3t+6 & 1 & 0 & \cdots \\ & & \cdots & & & \end{pmatrix}$$

となるので，関係式 (4.24) より,

$$\begin{aligned} &c_0 = 1, && c_3 = t^2+4t+1, \\ &c_1 = 1, && c_4 = t^3+11t^2+11t+1, \\ &c_2 = t+1, && c_5 = t^4+26t^3+66t^2+26t+1, \\ &c_6 = t^5+57t^4+302t^3+302t^2+57t+1. && \end{aligned}$$

4.5　級数と連分数の収束に関わる問題

ここでは，ローラン級数と Jacobi 連分数展開の収束性に関して述べる．これまで扱ってきた Jacobi 連分数と Stieltjes 連分数に対して，z を $1/z$ に取り直し，全体を $1/z$ 倍すると，それぞれ,

$$\frac{a_0|}{|b_1z+1} - \frac{a_1z^2|}{|b_2z+1} - \frac{a_2z^2|}{|b_3z+1} - \cdots, \tag{4.34}$$

$$\frac{a_0|}{|1} - \frac{a_1z|}{|1} - \frac{a_2z|}{|1} - \cdots \tag{4.35}$$

とそれぞれ書き変わり，ローラン級数は,

$$P(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \cdots \tag{4.36}$$

というべき級数になる．

定理 4.12. ([Vl01b]) Jacobi 連分数 (4.34) が，ある定数 $M>0$ に対し，閉円板 $|z| \le M$ で広義一様収束していれば，べき級数 (4.36) の収束半径は M であり，級数の和と連分数の値は等しくなる．また，同様のことが Stieltjes 連分数に関しても成り立つ．

証明. いま，$\{f_p(z)\}_{p=0}^{\infty}$ を Jacobi 連分数 (もしくは，Stieltjes 連分数) の近似分数列として，閉円板 $|z| \le M$ で広義一様収束しているとする．このとき，ある自然数 $k \in \mathbb{N}$ があって，$p \ge k$ に対して，各 $f_p(z)$ のべき級数展開が閉円板 $|z| \le M$ で広義一様収束している．そこで,

$$u_1(z) := f_k(z), \quad u_p(z) := f_{k+p-1}(z) - f_{k+p-2}(z), \quad p = 2, 3, 4, \ldots$$

とおくと，
$$\sum_{p=1}^{\infty} u_p(z) = \lim_{p\to\infty} f_p(z) = u(z)$$
は閉円板 $|z| \leq M$ で広義一様収束していて，$u(z)$ は多項式函数であるから，開円板 $|z| < M$ で正則である．また，級数 $\sum_{p=1}^{\infty} u_p(z)$ は広義一様収束しているので，項別微分ができて，
$$\sum_{p=1}^{\infty} u_p^{(n)}(z) = u^n(z)$$
が成り立つ．各 $f_p(z)$ は，Jacobi 連分数展開 (4.34) の近似分数列なので，Jacobi 連分数 (4.34) のべき級数である $P(z)$ と先頭項から一致している．ゆえに，$p\to\infty$ とすると，各 $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，
$$\sum_{p=1}^{\infty} u_p^{(n)}(0) = n!c_n.$$
よって，
$$u(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{u^{(p)}(0)}{p!} z^p = \sum_{p=0}^{\infty} c_p z^p = P(z).$$
□

では，この章の最後に，6 章で扱う Gauss 連分数の収束性にも関わる Stieltjes 連分数における収束性について述べた定理を示す．

定理 4.13. ([Vl04])
$$\lim_{p\to\infty} a_p = 0, \qquad (a_p \neq 0) \tag{4.37}$$
であれば，Stieltjes 連分数 (4.35) は，ある有理型函数 $f(z)$ に収束する．さらに，この収束は，函数 $f(z)$ の極を含まないような任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{C}$ 上で一様である．逆に，
$$\lim_{p\to\infty} a_p = a \neq 0 \tag{4.38}$$
であれば，Stieltjes 連分数 (4.35) は，領域 $\Omega \subset \mathbb{C}\backslash[1/4a, \infty]$ 上で収束し，極限函数はこの領域内で極をいくつか持つ．さらに，この収束は，函数 $f(z)$ の極を含まないような任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{C}\backslash[1/4a, \infty]$ 上で一様である．

この定理を示すために，次の定理を事実として紹介するが，詳細な証明については，[Wa48, pp.138] や [Vl01b, pp.254] を参考にされたい：

定理 4.14. ([Vl01b]) $\{h_p\}_{p=0}^{\infty}$ を有限な極限 h をもつ数列とする．$h = 0$ のときは，区間 L を複素平面内の $-1/4h$ から ∞ 方向への切り込みとし，集合 K を $d(K, L) = \inf\{d(x, y) : x \in K, y \in L\} > 0$ であるような任意のコンパクト集合とする．$h \neq 0$ のときは，集合 K は複素平面内の任意のコンパクト集合とする．このとき，ある自然数 $N(K) \in \mathbb{N}$ が存在して，連分数
$$\frac{1|}{|1} + \frac{h_n z|}{|1} + \frac{h_{n+1} z|}{|1} + \frac{h_{n+2} z|}{|1} + \cdots \tag{4.39}$$
は任意の $n > N(K)$ に対して広義一様収束する．

では，定理 4.13 を示す.

証明. 原点を含む任意のコンパクト集合を K とする．まず，条件 (4.37) が成り立っている場合は，この条件のままで，条件 (4.38) が成り立っている場合は，$1/4a$ から ∞ へ切り込みを入れる．すると，定理 4.14 から，ある自然数 $N(K) \in \mathbb{N}$ があって，$n > N(K)$ に対して，連分数

$$\frac{a_n z|}{|1} - \frac{a_{n+1} z|}{|1} - \frac{a_{n+2} z|}{|1} - \cdots \tag{4.40}$$

はコンパクト集合 K 上で，ある正則函数 $F_n(z)$ に広義一様収束する．$0 \in K$ なので，定理 4.12 から，連分数展開 (4.40) は，原点における近傍で $F_n(z)$ に収束している．また，定理 4.9 から，$F_n(z)$ は有理函数ではないことがわかる．ここで，

$$\frac{A'_m}{B'_m} := \frac{a_n z|}{|1} - \frac{a_{n+1} z|}{|1} - \frac{a_{n+2} z|}{|1} - \cdots$$

とおくと，Stieltjes 連分数 (4.35) の $(n+m)$ 次の近似分数は

$$\frac{A_n(z) - \dfrac{A'_m}{B'_m} A_{n-1}(z)}{B_n(z) - \dfrac{A'_m}{B'_m} B_{n-1}(z)}.$$

ゆえに，

$$\frac{A_n(z) - F_n(z) A_{n-1}(z)}{B_n(z) - F_n(z) B_{n-1}(z)}$$

に収束し，極を除き K 上で正則である．ここで，$B_n(z) - F_n(z) B_{n-1}(z) \not\equiv 0$ である． □

この章の冒頭で導入した形式的な積分を，次章では実際の積分として扱う．そこで登場するモーメント問題では，ここで述べた連分数展開とローラン級数 (べき級数) の近似理論が重要になってくる．

第5章　連分数とモーメント問題

Stieltjes は Jacobi 連分数に関する研究において，要素 a_p, b_p が全て実数である場合からスタートをした．この場合，要素にある条件を付けることで，Stieltjes は Jacobi 連分数と積分

$$\int_0^\infty \frac{d\phi(u)}{z-u}$$

の関連づけを示した [St94a]．ただし，ここで $\phi(u)$ は有界かつ非減少な函数である．とりわけ，この条件を緩くし，積分区間を実軸全体にまで拡張したのが，Van Vleck [Vl03] である．この後にも多くの数学者によって，Jacobi 連分数と積分表現に関する研究が行われてきた．この章では，連分数と積分の関係を述べることにする．

5.1　Stieltjes 積分

この節では，連分数を積分として表現するため第一段階として **Stieltjes 積分**に関する性質を述べる．まず，定数 $k_p \in \mathbb{R},\ (p = 1, 2, 3, \dots)$ として，Stieltjes 連分数 (3.1) を扱う．Stieltjes は，この連分数がある条件下で積分

$$\int_0^\infty \frac{f(u)du}{z+u}, \quad f(u) > 0$$

や級数

$$\sum_{p=1}^\infty \frac{L_p}{z+x_p}, \quad L_p > 0, \quad 0 \le x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$$

に一致することを示した．

まず，実変数 $u \in [a, b], (a, b \in \mathbb{R})$ に対して，複素数値函数 $f(u), \phi(u)$ を考える．この区間 $[a, b]$ を $n+1$ 分割し，それぞれを $u_1, u_2, \dots, u_n$ とする．このとき，$u_0 := a$，$u_{n+1} := b$ とすれば，分割

$$\Delta : u_0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_{n+1}$$

を考えることができる．いま，各 $k = 1, 2, 3, \dots, n+1$ に対して，$u_{k-1} \le v_k \le u_k$ となるような点 v_k を任意に選び，

$$S_\Delta(u, v) := \sum_{k=1}^{n+1} f(v_k)\,[\phi(u_k) - \phi(u_{k-1})]$$

とし

$$|\Delta| := \max\{u_k - u_{k-1} : k = 1, 2, 3, \dots, n+1\}$$

とする．このとき，$\phi(u)$ **に関する** $f(u)$ **の Stieltjes 積分**とは，極限 $\lim S_\Delta(u,v)=L$ となるようなる定数 L のことをいい，記号として

$$\int_a^b f(u)d\phi(u)$$

と書く．

ではこの積分について簡単な性質を紹介する．先に述べておくが，Stieltjes 積分に関しては既に多くの書物に載っているので証明は省略する．詳しい証明は [Wa48, pp.239] を参照されたい．

定理 5.1. Stieltjes 積分

$$\int_a^b f(u)d\phi(u)$$

が存在すれば Stieltjes 積分

$$\int_a^b \phi(u)df(u)$$

が存在する．このとき，部分積分が可能で

$$\int_a^b f(u)d\phi(u)=f(b)\phi(b)-f(a)\phi(a)-\int_a^b \phi(u)df(u). \tag{5.1}$$

つまり，Stieltjes 積分に関して函数 $f(u)$ と $\phi(u)$ には双対性があるということである．

特に次は，Stieltjes 積分の定義から直接導かれる性質である：

$$\int_a^b \{f_1(u)+f_2(u)\}\,d\phi(u)=\int_a^b f_1(u)d\phi(u)+\int_a^b f_2(u)d\phi(u);$$

$$\int_a^b f(u)d\{\phi_1(u)+\phi_2(u)\}=\int_a^b f(u)d\phi_1(u)+\int_a^b f(u)d\phi_2(u);$$

$$\int_a^b k_1f(u)d\{k_2\phi(u)\}=k_1k_2\int_a^b f(u)d\phi(u),\quad k_1,k_2:\text{定数}.$$

さらに，次々節で述べる (対称) モーメント問題の解の存在を示すために用いる次の 2 つの定理を紹介する．証明はここでは行わないが，[Wa48, p.244] に詳細が書かれている．

定理 5.2. 函数 $f(u)$ を区間 $[a,b]$ において連続かつ非負値であるとする．さらに，函数 $\phi(u)$ はこの区間において有界かつ非減少とする．また，十分小さい正数 $t>0$ に対して $f(u_0)>0$ かつ $\phi(u_0+t)>\phi(u_0-t)$ となるような点 $u_0\in(a,b)$ が少なくとも 1 つ存在するとする．このとき，

$$\int_a^b f(u)d\phi(u)>0.$$

定理 5.3. 実多項式函数 $P(u)$ は，次数が $r-1$ であり，恒等的に 0 ではないとする．函数 $\phi(u)$ は，少なくとも r 個の点 $u_0\in(a,b)$ と，十分小さい正数 $t>0$ に対して $f(u_0)>0$ かつ $\phi(u_0+t)>\phi(u_0-t)$ となるような有界かつ非減少な函数とする．さらに，

$$\int_a^b u^kP(u)d\phi(u)=0\quad\text{for}\quad k=0,1,2,\dots,n-1$$

を仮定する．このとき，実多項式函数 $P(u)$ は区間 (a,b) において符号が少なくとも n 回入れ代わる．

ここまでが Stieltjes 積分の基本的な概念と性質である．今後，他にも必要になる事実があればその都度紹介することにする．

5.2 有限区間におけるモーメント問題

Jacobi 連分数と直交多項式の関係性を述べた際に，変数 u^p を定数 c_p に置き換える積分作用

$$c_p = \int u_p d\phi_c(u), \quad p = 0, 1, 2, \ldots$$

を考えた．モーメント問題では，まずこの作用を実際の積分で行うことになる．モーメント問題が解けるか，あるいはその解がどういった性質を持つかは列 $\{c_p\}$ に依ってくる．最初に扱うモーメント問題は，Hausdorff モーメント問題と呼ばれるものであり，与えられた列 $\{\mu_p\}$ に対して

$$\mu_p = \int_0^1 u^p d\mu(u), \quad p = 0, 1, 2, \ldots$$

となる函数 $\mu(u)$ を決定する (解く) ことを考える．また，ここでの積分は前節で導入した Stieltjes 積分の意味である．

定義 5.4. 区間 $(0, 1)$ における**モーメント問題**とは，列 $\{\mu_p\}$ に対して

$$\mu(u) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad u \leq 0, \\ \dfrac{\mu(u-0) + \mu(u+0)}{2} & \text{for} \quad 0 < u < 1, \\ \mu(1) & \text{for} \quad u > 1 \end{cases} \tag{5.2}$$

を満たし，さらに，

$$\mu_p = \int_0^1 u^p d\mu(u), \quad p = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.3}$$

であるような有界かつ非減少な函数 $\mu(u)$ を決定する問題である．

このとき，函数 $\mu(u)$ が条件 (5.2) を満たしているとき，**正規化**であるといい，条件 (5.3) を満たしているとき，**モーメント問題の解である**という．さらに，上記のモーメント問題は **Hausdorff モーメント問題**と呼ばれる．ここでは詳しく述べないが，このような解が存在すればそれはただ 1 つであることも分かる [Wa48, p.259].

定義 5.5. 区間 $(-1, +1)$ における**対称モーメント問題**とは，列 $\{d_p\}$ に対して

$$\theta(u) = \begin{cases} \theta(-1) & \text{for} \quad u < -1, \\ \dfrac{\theta(u-0) + \theta(u+0)}{2} & \text{for} \quad -1 < u < 1, \\ \theta(1) & \text{for} \quad u > 1, \end{cases} \tag{5.4}$$

$$\theta(u) = -\theta(-u) \quad \text{for} \quad -\infty < u < +\infty \tag{5.5}$$

を満たし，さらに，

$$d_p = \int_{-1}^{+1} u^p d\theta(u), \quad p = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.6}$$

であるような有界かつ非減少な函数 $\theta(u)$ を決定する問題である．

この 2 つのモーメント問題は，考えている区間が異なるが，それぞれの解は互いに関連性がある．それが次の定理である：

定理 5.6. 対称モーメント問題が解 $\theta(u)$ を持つとき，$u_p := d_{2p}/2$,（$p = 0, 1, 2, \ldots$）とおけば，Hausdorff モーメント問題は解 $\mu(u) = \theta(\sqrt{u})$ をもつ．同様に，Hausdorff モーメント問題が解 $\mu(u)$ を持つとき，$d_{2p} := 2\mu_p$,（$p = 0, 1, 2, \ldots$）とおけば，対称モーメント問題は解 $\theta(u) = \mu(u^2)$, $(u \geq 0)$，$\theta(u) = -\mu(u^2)$, $(u < 0)$ をもつ．

証明. どちらも直接解になっていることを確かめれば良い．例えば，$\mu_p = \int_0^1 u^p d\mu(u) = \int_0^1 u^{2p} d\mu(u^2) = \int_0^1 u^p d\theta(u) = (1/2) \int_{-1}^{+1} u^{2p} d\theta(u) = d_{2p}/2$．一方，$d_{2p} = \int_{-1}^{+1} u^{2p} d\theta(u) = \int_{-1}^{+1} t^{4p} d\mu(t^2) = \int_{-1}^{+1} t^{2p} d\mu(t) = 2\mu_{2p}$．また，$d_{2p+1} = 0$ も同様に示される． □

この定理は，片方のモーメント問題で解が得られれば，もう片方でも解を構成することができるということを述べている．次の節では，Stieltjes 連分数を用いて，モーメント問題の解を調べることにする．

5.3 いくつかのモーメント問題に対する解

以下では，条件 (5.6) において自明なケースである $d_p = 0$,（$p = 0, 1, 2, \ldots$）を除いて，$d_p > 0$ だけを考えることにする．さらに，$d_0 > 0$ であれば，$d_0 = 1$ としても定数倍を考えればよいだけなので一般性は失わない．

まず最初に，対称モーメント問題の解の存在に関する定理を述べる．

定理 5.7. 対称モーメント問題が列 $\{d_p\}$ に対して解を持つための必要十分条件は，列 $\{d_p\}$ が実 Stieltjes 連分数

$$\frac{1|}{|z} - \frac{(1-g_0)g_1|}{|z} - \frac{(1-g_1)g_2|}{|z} - \cdots \tag{5.7}$$

のモーメント列となることである．ただしここで，$0 \leq g_p \leq 1$,（$p = 0, 1, 2, \ldots$）である．また，この条件を満足していれば，モーメント問題の解 $\theta(u)$ は

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d\theta(u)}{z-u} \tag{5.8}$$

満たし，Stieltjes 連分数 (5.7) の値と一致する．

証明. 十分性について： 列 $\{d_p\}_{p=0}^{\infty}$ を Stieltjes 連分数 (5.7) のモーメントとする．このとき，定理 3.8 と定理 3.7 から，連分数 (5.7) は，$I := [-1, +1]$ としたとき，$d(K, I) = \inf\{d(x, y) : x \in K,\ y \in I\} > 0$ であるような任意のコンパクト集合 K 上で広義一様収束している．さらにここで，事実として次の関係式を用いる [Wa48, p.255]:

$$\frac{1|}{|z} - \frac{(1-g_0)g_1|}{|z} - \frac{(1-g_1)g_2|}{|z} - \cdots = \int_{-1}^{+1} \frac{d\theta(u)}{z-u}, \quad (z \to \infty).$$

そして，定理 4.12 から，

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{d_p}{z^{p+1}} = \frac{1|}{|z} - \frac{(1-g_0)g_1|}{|z} - \frac{(1-g_1)g_2|}{|z} - \cdots = \int_{-1}^{+1} \frac{d\theta(u)}{z-u}, \quad (z \to \infty)$$

が分かるので，$1/(z-u) = \sum_{p=0}^{\infty} u^p/z^{p+1}$ を用いれば，

$$d_p = \int_{-1}^{+1} u^p d\theta(u), \quad p = 0, 1, 2, \ldots.$$

必要性について：対称モーメント問題が解 $\theta(u)$ を持つような列 $\{d_p\}_{p=0}^{\infty}$ をまず仮定する．ただし，$d_0 = 1$ とする．このとき，解 $\theta(u)$ が階段函数であれば，有限な区間の分割が可能なので，ある列 $\{u_p\}_{p=0}^{m-1}$ があって，正数 $t > 0$ と各 $p = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ に対して $\theta(u_p + t) > \theta(u_p - t)$ となる．定理 5.2 から，2 次形式

$$\int_{-1}^{+1} (X_0 + X_1 u + \cdots + X_n u^n)^2 \, d\theta(u) > 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

が成り立つ．よって，

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} d_0 & d_1 & \cdots & d_n \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_{n+1} \\ & & \cdots & \\ d_n & d_{n+1} & \cdots & d_{2n} \end{vmatrix} > 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, m-1.$$

ゆえに，次のような連分数展開を構成できる：

$$\frac{a_0|}{|b_1 + z} - \frac{a_1|}{|b_2 + z} - \frac{a_2|}{|b_3 + z} - \cdots - \frac{a_{m-1}|}{|b_m + z}.$$

ここで，$a_0 = d_0 = 1$，$a_1, a_2, \ldots, a_{m-1} > 0$．Jacobi 連分数のローラン級数展開は，先頭から $2m$ 次の項まで一致していることは述べたので，$d_0, d_1, d_2, \ldots$ はこの連分数のモーメントである．また，条件 (5.5) から，積分 (5.8) は z に関して奇函数なので，Jacobi 連分数展開は，

$$\frac{1|}{|z} - \frac{a_1|}{|z} - \frac{a_2|}{|z} - \cdots - \frac{a_{m-1}|}{|z} \tag{5.9}$$

となる．連分数 (5.9) における p 次の分母を $B_p(z)$ とすると，任意の正数 $c > 0$ に対して

$$\int_{-1-c}^{+1+c} u^r B_p(u) d\theta(u) = 0, \quad r = 0, 1, 2, \ldots, p-1, \quad p \leq m$$

が成り立つ．定理 5.3 から，$p < m$ に対して多項式 $B_p(u)$ は区間 $[-1-c, +1+c]$ で p 回符号が入れ代わる．また，十分大きな u に対して，$B_p(u) > 0$ が成り立つので，$u > 1$ に対して $B_p(u) > 0$．基本漸化式から，

$$a_p = \frac{B_p(1+c)}{B_{p-1}(1+c)} \left(1 + c - \frac{B_{p+1}(1+c)}{B_p(1+c)} \right), \quad p = 1, 2, 3, \ldots, m-1. \tag{5.10}$$

$a_p > 0$ なので，

$$0 < \frac{B_{p+1}(1+c)}{B_p(1+c)} < 1+c, \quad p = 0,1,2,\dots,m-1, \quad (c > 0).$$

よって，

$$\lim_{c\to 0} \frac{B_{p+1}(1+c)}{B_p(1+c)} = 1 - g_p$$

とおけば，$0 \leq g_p \leq 1$, $(p = 0,1,2,\dots,m-1)$ であり，式 (5.10) から，$a_p = (1-g_{p-1})g_p$, $(p = 1,2,3,\dots,m-1)$ なので，連分数 (5.9) は (5.7) の表現を持つ．

解 $\theta(u)$ が階段函数でない場合，行列式 $\Delta_n > 0$, $(n = 1,2,3,\dots)$ なので，連分数 (5.9) ではなく

$$\frac{1|}{|z} - \frac{a_1|}{|z} - \frac{a_2|}{|z} - \cdots$$

として同様の議論をすれば示せる． □

この定理に関して，連分数 (5.7) を同値変換すると，

$$\frac{1/z|}{|1} - \frac{(1-g_0)g_1/z^2|}{|1} - \frac{(1-g_1)g_2/z^2|}{|1} - \cdots$$

となるので，$1/z$ を取り去り，$1/z^2 =: z$ と取り直すと次のように書き換えられる [Wa40]:

定理 5.8. 区間 $(0,1)$ における Hausdorff モーメント問題

$$\mu_p = \int_0^1 u^p d\mu(u), \quad p = 0,1,2,\dots \tag{5.11}$$

が解を持つための必要十分条件は，べき級数

$$\mu_0 - \mu_1 z + \mu_2 z^2 - \cdots \tag{5.12}$$

が連分数展開

$$\frac{\mu_0|}{|1} + \frac{(1-g_0)g_1|}{|1} + \frac{(1-g_1)g_2|}{|1} + \cdots \tag{5.13}$$

をもつことである．ただし，$\mu_0 \geq 0$ であり，$0 \leq g_p \leq 1$, $(p = 0,1,2,\dots)$ である．

ここまでは，積分区間を有限な場合に限って議論を進めてきた．次では積分区間を無限大にまで拡張したモーメント問題を考える．

まず最初に，積分区間を $(-\infty,+\infty)$ に拡張した **Hamburger モーメント問題**に関して述べる．しかし，このモーメント問題に関しては，複雑かつ込み入った複素解析学の知識を用いるので結果のみ紹介することにする．詳しくは [Wa48, pp.325] や [Ha20] を参考にされたい．

定理 5.9. 実数列 $\{c_p\}_{p=0}^{\infty}$ を与えられた列とする．ただし，$c_0 = 1$ とする．このとき，区間 $(\infty, +\infty)$ で無限に異なる値をとり，

$$c_p = \int_{-\infty}^{+\infty} u^p d\phi(u), \quad p = 0, 1, 2, \dots \tag{5.14}$$

となるような有界かつ非減少函数 $\phi(u)$ が存在することと，

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_p \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{p+1} \\ & & \cdots & \\ c_p & c_{p+1} & \cdots & c_{2p} \end{vmatrix} > 0, \quad p = 0, 1, 2, \dots \tag{5.15}$$

となることは同値である．

ここで，モーメント問題の解の分類に関して次の定義を導入する：

定義 5.10. モーメント問題 (5.14) が**決定的である**とは，$\phi(-\infty) = 0$, $\phi(u) = [\phi(u+0) + \phi(u-0)]/2$, $(-\infty < u < +\infty)$ を満たすような解 $\phi(u)$ がただ 1 つ定まるときをいう．反対にそうでない場合は，モーメント問題は**非決定的である**という．

上記で述べた Hamburger モーメント問題は積分区間が $(-\infty, +\infty)$ であったが，これを基に次の **Stieltjes モーメント問題**の解の存在に関する定理が導かれる [St94a]:

定理 5.11. 実数列 $\{c_p\}_{p=0}^{\infty}$ を与えられた列とする．このとき，区間 $[0, +\infty)$ で無限に異なる値をとり，

$$c_p = \int_{0}^{+\infty} u^p d\phi(u), \quad p = 0, 1, 2, \dots \tag{5.16}$$

となるような有界かつ非減少函数 $\phi(u)$ が存在することと，

$$\Omega_p = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{p+1} \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_{p+2} \\ & & \cdots & \\ c_{p+1} & c_{p+2} & \cdots & c_{2p+1} \end{vmatrix} > 0, \quad p = 0, 1, 2, \dots \tag{5.17}$$

となることは同値である

証明に関しては，やや複雑になるため [Wa48, pp.327] を参照されたい．

最後に，Stieltjes 連分数と Stieltjes モーメント問題の解の関係性を述べた定理を紹介する．証明には，さらに進んだ連分数と級数の理論が必要になるので詳細は [Wa48, p.329] や [St94a] を参考にされたい．

定理 5.12. 列 $\{c_p\}_{p=0}^{\infty}$ は条件 (5.15) と (5.17) をともに満たすとする．さらに，ローラン級数 $\sum (c_p/z^{p+1})$ が Stieltjes 連分数展開

$$\frac{1|}{|k_1 z} - \frac{1|}{|k_2} - \frac{1|}{|k_3 z} - \frac{1|}{|k_4} - \cdots \tag{5.18}$$

を持つとする．このとき，Stieltjes モーメント問題 (5.16) が決定的であることと，正項級数 $\sum k_p$ が発散することは同値である．

モーメント問題の解の性質や存在には他にも多くの結果が得られているが，連分数とモーメント問題の関係性において重要になる主張はここに述べたものとなる．

第6章　Gauss 連分数

この章では，Gauss 連分数と呼ばれる連分数に関してその構築と性質を調べる．Gauss 連分数は，2 つの超幾何級数の商をとることで得られる Stieltjes 連分数となる．Gauss 連分数以外にも超幾何級数の商に着目した連分数展開の理論 [Fr56] は発展しており，また，これらを単葉函数論から研究する論文も多く見られる ([MeSc61, Kü02] など)．その中でも重要な概念としてよく使われるのが，1 章でも扱った部分分子が $(1-g_{p-1})g_p z$ である連分数となる．

6.1　超幾何級数と Gauss 連分数

以下，ここで扱う超幾何級数は，$a,\ b \in \mathbb{C}$ は定数で，$c \notin \{0,-1,-2,-3,\dots\}$ として

$$\begin{aligned} F(a,b,c;z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n \cdot n!} z^n \\ &= 1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)\cdot 2!}z^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)\cdot 3!}z^3 + \cdots \end{aligned} \tag{6.1}$$

とする．ただしここで，$(a)_n$ は Pochhammer 記号と呼ばれ，$(a)_0 := 1$，$(a)_{n+1} := (a)_n(a+n)$，$(n = 0,1,2,\dots)$ により定まる．超幾何級数について，簡単な性質を述べておくと，a または $b \in \{0,-1,-2,\dots\}$ であれば，超幾何級数 $F(a,b,c;z)$ は多項式になるので，収束半径は ∞ である．そうでなければ，収束半径は項比をとることで 1 であることがわかる．また，超幾何級数を用いて，いくつかの初等函数を記述することができる．

例 6.1.

$$\begin{aligned} F(1,1,2;-z) &= 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \cdots = \frac{1}{z}\log(1+z), \\ F(-k,1,1;-z) &= 1 + kz + \frac{1}{2}(k-1)z^2 + \frac{1}{6}(k-2)(k-1)kz^3 + \cdots = (1+z)^k, \\ z \cdot F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2};z^2\right) &= z + \frac{1}{6}z^3 + \frac{3}{40}z^5 + \frac{5}{112}z^7 + \cdots = \arcsin(z), \\ z \cdot F\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2};-z^2\right) &= z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots = \arctan(z). \end{aligned} \tag{6.2}$$

超幾何級数 (6.1) において，z を z/a とし，$a \to \infty$ とすると，

$$\Phi(b, c; z) = 1 + \frac{b}{c}z + \frac{b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \frac{b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{3!} + \cdots \tag{6.3}$$

となる．こうしてできた超幾何級数を**合流型超幾何級数**という．同様にして，合流型超幾何級数 (6.3) において，z を z/b とし，$b \to \infty$ とすると，

$$\Psi(c; z) = 1 + \frac{1}{c}z + \frac{1}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \frac{1}{c(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{3!} + \cdots \tag{6.4}$$

となる．また，超幾何級数 (6.1) において，z を cz とし，$c \to \infty$ とすると，

$$\Omega(a, b; z) = 1 + abz + a(a+1)b(b+1)\frac{z^2}{2!} + a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)\frac{z^3}{3!} + \cdots \tag{6.5}$$

となる．さらにこの合流型超幾何級数は，a もしくは $b \in \{0, -1, -2, \ldots\}$ である場合を除いて，収束半径は 0 である．

では，超幾何級数 (6.1) を用いて Gauss 連分数を構築していく．最初に，次の隣接関係式から始める：

$$F(a, b, c; z) = F(a, b+1, c+1; z) - \frac{a(c-b)}{c(c+1)}zF(a+1, b+1, c+2; z). \tag{6.6}$$

さらに，式を変形すると，

$$\frac{F(a, b+1, c+1; z)}{F(a, b, c; z)} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{a(c-b)}{c(c+1)}z\cfrac{F(a+1, b+1, c+2; z)}{F(a, b+1, c+1; z)}}. \tag{6.7}$$

今，漸化式 (6.7) において a と b を取り替えて，b を $b+1$ に，c を $c+1$ にそれぞれ取り直すと，

$$\frac{F(a+1, b+1, c+2; z)}{F(a, b+1, c+1; z)} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{(b+1)(c-a+1)}{(c+1)(c+2)}z\cfrac{F(a+1, b+2, c+3; z)}{F(a+1, b+1, c+2; z)}}. \tag{6.8}$$

漸化式 (6.7)，(6.8) を繰り返し用いることで，次の **Gauss 連分数**が構成できる [Ga76]:

$$\frac{F(a, b+1, c+1; z)}{F(a, b, c; z)} = \frac{1|}{|1} - \frac{\frac{a(c-b)}{c(c+1)}z\Big|}{|1} - \frac{\frac{(b+1)(c-a+1)}{(c+1)(c+2)}z\Big|}{|1} - \frac{\frac{(a+1)(c-b+1)}{(c+2)(c+3)}z\Big|}{|1} - \frac{\frac{(b+2)(c-b+2)}{(c+3)(c+4)}z\Big|}{|1} - \cdots. \tag{6.9}$$

いま，列 $\{a_p\}$ を $-z$ の各係数とすると，

$$a_{2p+1}=\frac{(a+p)(c-b+p)}{(c+2p)(c+2p+1)},\quad a_{2p+2}=\frac{(b+p+1)(c-a+p+1)}{(c+2p+1)(c+2p+2)},\quad p=0,1,2,\dots \tag{6.10}$$

となる．さらに，各 $n=0,1,2,\dots$ に対して，

$$\begin{aligned}P_{2n}(z)&=\frac{F(a+n,b+n+1,c+2n+1;z)}{F(a+n,b+n,c+2n;z)},\\ P_{2n+1}(z)&=\frac{F(a+n+1,b+n+1,c+2n+2;z)}{F(a+n,b+n+1,c+2n+1;z)}\end{aligned} \tag{6.11}$$

とおくと，

$$P_{n-1}(z)=\frac{1}{1-a_nzP_n(z)},\quad n=1,2,3,\dots \tag{6.12}$$

なので，Gauss 連分数 (6.9) は，

$$\frac{F(a,b+1,c+1;z)}{F(a,b,c;z)}=\frac{1|}{|1}-\frac{a_1z|}{|1}-\frac{a_2z|}{|1}-\cdots-\frac{a_{n-1}z|}{|1-a_nzP_n(z)}. \tag{6.13}$$

ここで，ある自然数 $k\in\mathbb{N}$ があって，$a_1,a_2,\dots,a_{k-1}\neq 0$ であり，$a_k=0$ とすると，商 $F(a,b+1,c+1;z)/F(a,b,c;z)$ は z の有理函数となるので，Gauss 連分数 (6.13) は途中で打ち止められた連分数となる．また，各 $p=1,2,3,\dots$ に対して，$a_p\neq 0$ のときは，$A_p(z)$, $B_p(z)$ を Gauss 連分数 (6.13) の p 次の分子と分母とそれぞれすると，

$$\frac{F(a,b+1,c+1;z)}{F(a,b,c;z)}=\frac{A_n(z)-a_nzP_n(z)A_{n-1}(z)}{B_n(z)-a_nzP_n(z)B_{n-1}(z)}.$$

したがって，行列式公式を使うと

$$\frac{F(a,b+1,c+1;z)}{F(a,b,c;z)}-\frac{A_{n-1}(z)}{B_{n-1}(z)}=\frac{a_1a_2\cdots a_{n-1}z^{n-1}}{B_{n-1}(z)\left\{B_n(z)-a_nzB_{n-1}(z)P_n(z)\right\}}$$

となる．これは $n-1$ 次の近似分数 $A_{n-1}(z)/B_{n-1}(z)$ が，Gauss 連分数 $F(a,b+1,c+1;z)/F(a,b,c;z)$ と先頭から n 項目まで一致している，すなわち，近似されることがわかる．ゆえに，ここから超幾何級数と Gauss 連分数のべき級数展開が一致していることが確かめられる．

次に Gauss 連分数の収束性に関して述べる．Gauss 連分数の広義一様収束性に関して，以下の定理が有効である：

定理 6.2. ([Th67, Ri63, Vl01b]) Gauss 連分数 (6.1) は，ある孤立点を除いて平面 $\mathbb{C}\backslash[1,\infty]$ で収束し，原点のある近傍で函数 $F(a,b+1,c+1;z)/F(a,b,c;z)$ に一致する．さらに，函数 $F(a,b+1,c+1;z)/F(a,b,c;z)$ は平面 $\mathbb{C}\backslash[1,\infty]$ に解析接続される．また，Gauss 連分数は上で述べた孤立点を含まない任意のコンパクト集合 $K\subset\mathbb{C}\backslash[1,\infty]$ 上で広義一様収束する．最後に，これら孤立点が存在するならば，それらは Gauss 連分数 (6.1) の極となっている．

証明. まず,

$$\lim_{p\to\infty} a_p = \lim_{p\to\infty}\frac{(a+p)(c-b+p)}{(c+2p+1)(c+2p+1)} = \lim_{p\to\infty}\frac{(b+p+1)(c-a+p+1)}{(c+2p+1)(c+2p+2)} = \frac{1}{4}$$

であることから，定理4.13の2つ目のケースに該当する．よって，複素平面$\mathbb{C}$に対して，1から∞へのスリッドを入れることになる．また，定理4.12より，原点を中心としたある近傍ではGauss連分数と，函数$F(a,b+1,c+1;z)/F(a,b,c;z)$の値は一致している．Gauss連分数はスリッドを除いて全平面で正則なので，一致の定理から，$F(a,b+1,c+1;z)/F(a,b,c;z)$は，この領域に解析接続される． □

いま，

$$g_{2p} = \frac{c-a+p}{c+2p}, \quad g_{2p+1} = \frac{c-b+p}{c+2p+1}, \quad p=0,1,2,\dots \tag{6.14}$$

とおくと，

$$\frac{F(a,b+1,c+1;z)}{F(a,b,c;z)} = \frac{1|}{|1} - \frac{(1-g_0)g_1z|}{|1} - \frac{(1-g_1)g_2z|}{|1} - \frac{(1-g_2)g_3z|}{|1} - \cdots \tag{6.15}$$

となる．ここで，$b=0$とし，cを$c-1$に取り直すと，Gauss連分数は

$$F(a,1,c;z) = \frac{1|}{|1} - \frac{\left.\frac{a}{c}z\right|}{|1} - \frac{\left.\frac{c-a}{c(c+1)}z\right|}{|1} - \frac{\left.\frac{c(a+1)}{(c+1)(c+2)}z\right|}{|1} - \frac{\left.\frac{2(c-a+1)}{(c+2)(c+3)}z\right|}{|1} - \cdots \tag{6.16}$$

となる．さらに，上記の連分数において，列$\{b_p\}$を$-z$の各係数とすると

$$b_{2p+1} = \frac{(a+p)(c+p-1)}{(c+2p-1)(c+2p)}, \quad b_{2p+2} = \frac{(p+1)(c-a+p)}{(c+2p)(c+2p+1)}, \quad p=0,1,2,\dots. \tag{6.17}$$

また，Gauss連分数(6.16)において，

$$h_{2p-1} = \frac{a+p-1}{c+2p-2}, \quad h_{2p} = \frac{p}{c+2p-1}, \quad p=0,1,2,\dots \tag{6.18}$$

とすると，

$$F(a,1,c;z) = \frac{1|}{|1} - \frac{h_1z|}{|1} - \frac{(1-h_1)h_2z|}{|1} - \frac{(1-h_2)h_3z|}{|1} - \cdots. \tag{6.19}$$

数列(6.14)において，$0<g_p<1$, $(p=0,1,2,\dots)$を仮定し，定理1.19を用いると，添字に気をつければ，

$$\begin{aligned} \left| g_0\cdot\frac{F(a,b+1,c+1;z)}{F(a,b,c;z)} - \frac{1}{2-g_0}\right| &\le \frac{1-g_0}{2-g_0} \\ \left|\frac{c-a}{c}\cdot\frac{F(a,b+1,c+1;z)}{F(a,b,c;z)} - \frac{c}{c+1}\right| &\le \frac{a}{c+a}, \quad |z|\le 1 \end{aligned} \tag{6.20}$$

となる．ここで，$z=-z$, $a=b=1$, $c=2$ とすると，

$$\left|\frac{1}{2}\cdot\frac{F(1,2,3;-z)}{F(1,1,2;-z)}-\frac{2}{3}\right|\leq\frac{1}{3}$$

$$\left|\frac{1}{2}\cdot\frac{\dfrac{2(z-\log(1+z))}{z^2}}{\dfrac{\log(1+z)}{z}}-\frac{2}{3}\right|\leq\frac{1}{3}$$

$$\left|\frac{z-\log(1+z)}{z\log(1+z)}-\frac{2}{3}\right|\leq\frac{1}{3}$$

となるので，三角不等式を用いることで

$$\frac{|z|}{1+|z|}\leq|\log(1+z)|\,.$$

また，

$$f(z):=\frac{g_0|}{|1}+\frac{(1-g_0)g_1z|}{|1}+\frac{(1-g_1)g_2z|}{|1}+\cdots$$

とすると，

$$\frac{1-f(z)}{1+zf(z)}=\frac{1-g_0|}{|1}+\frac{g_0(1-g_1)z|}{|1}+\frac{g_1(1-g_2)z|}{|1}+\cdots$$

なので，この連分数に関しても定理 1.19 を用いると，

$$\left|\frac{1-f(z)}{1+zf(z)}-\frac{1}{2-(1-g_0)}\right|\leq\frac{1-(1-g_0)}{2-(1-g_0)}.$$

したがって，$f(z)=(z-\log(1+z))/z\log(1+z)$ を代入して，三角不等式を使うことで，

$$|\log(1+z)|\leq|z|\cdot\frac{1+|z|}{|1+z|}.$$

ゆえに，

$$\frac{|z|}{1+|z|}\leq|\log(1+z)|\leq|z|\cdot\frac{1+|z|}{|1+z|},\quad |z|\leq 1. \tag{6.21}$$

不等式 (6.21) は，べき級数展開と複素積分によるアプローチによっても導ける [MiVa70].

6.2 初等函数

例 (6.2) と，Gauss 連分数 (6.16) から，$b=0$ とした連分数を考えると，いくつかの初等函数を連分数で記述できる．例えば，

$$\log(1+z)=\frac{z|}{|1}+\frac{1^2z|}{|2}+\frac{1^2z|}{|3}+\frac{2^2z|}{|4}+\frac{2^2z|}{|5}+\frac{3^2z|}{|6}+\cdots, \tag{6.22}$$

$$(1+z)^k = \frac{1|}{|1} - \frac{kz|}{|1} + \frac{\frac{1\cdot(1+k)}{1\cdot 2}z\Big|}{|1} + \frac{\frac{1\cdot(1-k)}{2\cdot 3}z\Big|}{|1} + \frac{\frac{2\cdot(2+k)}{3\cdot 4}z\Big|}{|1} + \frac{\frac{2\cdot(2-k)}{4\cdot 5}z\Big|}{|1} + \cdots, \tag{6.23}$$

$$\arctan(z) = \frac{z|}{|1} + \frac{1\cdot z^2|}{|3} + \frac{4z^2|}{|5} + \frac{9z^2|}{|7} + \frac{16z^2|}{|9} + \cdots \tag{6.24}$$

といった連分数展開が考えられる．ただし，定理 6.2 より，最初の 2 つは，平面 $\mathbb{C}\backslash[-\infty,-1]$ 上で，最後の展開は，平面 $\mathbb{C}\backslash[i, i\cdot\infty]\cup[-i\cdot\infty,-i]$ 上でそれぞれ定義される．また，

$$2z\cdot F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; z^2\right) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

なので，

$$\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{2z|}{|1} - \frac{1\cdot z^2|}{|3} - \frac{4z^2|}{|5} - \frac{9z^2|}{|7} - \cdots \tag{6.25}$$

となり，これは平面 $\mathbb{C}\backslash[-\infty,-1]\cup[1,\infty]$ 上で定義される．連分数展開 (6.22)，(6.24) の一般化として，

$$\begin{aligned}\int_0^z \frac{dt}{1+t^n} &= zF\left(\frac{1}{n}, 1, 1+\frac{1}{n}; -z^n\right)\\ &= \frac{z|}{|1} + \frac{1^2z^n|}{|n+1} + \frac{n^2z^n|}{|2n+1} + \frac{(n+1)^2z^n|}{|3n+1} + \frac{(2n)^2z^n|}{|4n+1} + \frac{(2n+1)^2z^n|}{|5n+1} + \cdots\end{aligned} \tag{6.26}$$

が得られるが，これは，各 $n=1,2,3,\ldots$ と，各 z^n-平面において，スリッド $[-\infty,-1]$ を入れた平面で定義される．

Gauss 連分数 (6.9) より，

$$\begin{aligned}\frac{\arcsin(z)}{\sqrt{1-z^2}} &= \frac{zF\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2};z^2\right)}{F\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2};z^2\right)}\\ &= \frac{z|}{|1} - \frac{1\cdot 2z^2|}{3} - \frac{1\cdot 2z^2|}{|5} - \frac{3\cdot 4z^2|}{|7} - \frac{3\cdot 4z^2|}{|9} - \frac{5\cdot 6z^2|}{|11} - \cdots\end{aligned} \tag{6.27}$$

となり，さらに，

$$\begin{aligned}\frac{(1+z)^k-(1-z)^k}{(1+z)^k+(1-z)^k} &= kz\cdot\frac{F\left(\frac{1-k}{2}, \frac{2-k}{2}, \frac{3}{2}; z^2\right)}{F\left(\frac{1-k}{2}, -\frac{k}{2}, \frac{1}{2}; z^2\right)}\\ &= \frac{kz|}{|1} + \frac{(k^2-1)z^2|}{|3} + \frac{(k^2-4)z^2|}{|5} + \frac{(k^2-9)z^2|}{|7} + \cdots\end{aligned} \tag{6.28}$$

となるが，これらはともに，平面 $\mathbb{C}\backslash[-\infty,-1]\cup[1,\infty]$ 上で定義される連分数展開となる．

連分数展開 (6.28) において，z を $2/(z-1)$ に置き換えると，

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^k - 1 = \frac{2k|}{|z-k} - \frac{1-k^2|}{|3z} - \frac{4-k^2|}{|5z} - \frac{9-k^2|}{|7z} - \cdots . \tag{6.29}$$

また，

$$\left(\frac{iz+1}{iz-1}\right)^{ik} = \exp\left(ik \cdot \log\left(\frac{iz+1}{iz-1}\right)\right) = \exp\left(2k \cdot \arctan\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

なので，z を iz に，k を ik に取り替えると，

$$\exp\left(2k \cdot \arctan\left(\frac{1}{z}\right)\right) = 1 + \frac{2k|}{|z-k} + \frac{1+k^2|}{|3z} + \frac{4+k^2|}{|5z} + \frac{9+k^2|}{|7z} + \cdots . \tag{6.30}$$

そして，

$$\tan(k\phi) = -i \cdot \frac{(1+i\tan(\phi))^k - (1-i\tan(\phi))^k}{(1+i\tan(\phi))^k + (1-i\tan(\phi))^k}$$

より，連分数展開 (6.28) において，z を $i\tan(\phi)$ に置き換えると，

$$\tan(k\phi) = \frac{k\tan(\phi)|}{|1} - \frac{(k^2-1)\tan^2(\phi)|}{|3} - \frac{(k^2-4)\tan^2(\phi)|}{|5} - \frac{(k^2-9)\tan^2(\phi)|}{|7} - \cdots \tag{6.31}$$

となる．1 つめの連分数展開は，平面 $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ 上で，2 つめの連分数展開は，平面 $\mathbb{C}\backslash[-i,i]$ 上で，最後の連分数展開は，帯領域 $-\pi/2 < \Re(\phi) < \pi/2$ でそれぞれ定義される．

6.3 有理型函数

Gauss 連分数 (6.9) において，z を z/a に取り直し，$a \to \infty$ とすると，

$$\frac{\Phi(b+1,c+1;z)}{\Phi(b,c;z)} = \frac{1|}{|1} - \frac{\left.\dfrac{c-b}{c(c+1)}z\right|}{|1} + \frac{\left.\dfrac{b+1}{(c+1)(c+2)}z\right|}{|1} - \frac{\left.\dfrac{c-b+1}{(c+2)(c+3)}z\right|}{|1} + \cdots \tag{6.32}$$

となり，合流型超幾何級数からなる Gauss 連分数が得られる．$\Phi(b,c;z)$ は整函数であるので，Gauss 連分数 (6.32) は有理型函数である．連分数における z の係数の極限は 0 であるので，定理 4.12 と定理 4.13 から，任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{C}$ 上で，Gauss 連分数は，この有理型函数に広義一様収束している．

Gauss 連分数 (6.32) において，$b=0$ とすると，

$$\Phi(1,c;z) = \frac{1|}{|1} - \frac{z|}{|c} + \frac{1\cdot z|}{|c+1} - \frac{cz|}{|c+2} + \frac{2\cdot z|}{|c+3} - \frac{(c+1)z|}{|c+4} + \cdots . \tag{6.33}$$

特に，

$$e^z = \frac{1|}{|1} - \frac{z|}{|1} + \frac{z|}{|2} - \frac{z|}{|3} + \frac{z|}{2} - \frac{z|}{|5} + \cdots \tag{6.34}$$

であり，これは複素平面 $\mathbb{C}$ 上で定義される．
整函数 (6.4) の商をとると，

$$\frac{\Psi(c+1;z)}{\Psi(c;z)} = \frac{1|}{|1} + \frac{\left.\dfrac{z}{c(c+1)}\right|}{|1} + \frac{\left.\dfrac{z}{(c+1)(c+2)}\right|}{|1} + \frac{\left.\dfrac{z}{(c+2)(c+3)}\right|}{|1} + \cdots \tag{6.35}$$

という Gauss 連分数になる．これは，Gauss 連分数 (6.32) において，z を z/b にして，$b \to \infty$ とすると同様の形の連分数になる．
ここで，**ベッセル函数**を考える．ベッセル函数 $J_n(z)$ とは

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k! \cdot \Gamma(n+k+1)} = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{k! \cdot (n+k)!}$$

で記述される函数である．いま，

$$\Psi(n;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k \cdot (n-1)!}{k! \cdot (n+k-1)!}$$

であるので，

$$J_n(z) = \frac{(z/2)^n}{\Gamma(n+1)} \cdot \Psi\left(n+1; -\frac{z^2}{4}\right).$$

これらから，

$$\begin{aligned} \frac{J_{n-1}(z)}{J_n(z)} &= \frac{\dfrac{(z/2)^{n-1}}{\Gamma(n)} \cdot \Psi\left(n; -\dfrac{z^2}{4}\right)}{\dfrac{(z/2)^n}{\Gamma(n+1)} \cdot \Psi\left(n+1; -\dfrac{z^2}{4}\right)} = \frac{2n}{z} \cdot \frac{1}{\dfrac{\Psi\left(n+1; -\dfrac{z^2}{4}\right)}{\Psi\left(n; -\dfrac{z^2}{4}\right)}} \\ &= \frac{2n}{z} \cdot \left(1 + \frac{\left.\dfrac{-\,z^2/4}{n(n+1)}\right|}{|1} + \frac{\left.\dfrac{-\,z^2/4}{(n+1)(n+2)}\right|}{|1} + \cdots \right) \\ &= \frac{2n}{z} - \frac{\left.\dfrac{z}{2(n+1)}\right|}{|1} - \frac{\left.\dfrac{z^2/4}{(n+1)(n+2)}\right|}{|1} - \frac{\left.\dfrac{z^2/4}{(n+2)(n+3)}\right|}{|1} - \cdots \end{aligned} \tag{6.36}$$

という連分数展開が得られる．定義域は複素平面 $\mathbb{C}$ 全体である．いま，

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = z \cdot \Psi\left(\frac{3}{2}; -\frac{z^2}{4}\right),$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \Psi\left(\frac{1}{2}; -\frac{z^2}{4}\right)$$

より，

$$\tan(z) = z \cdot \frac{\Psi\left(\frac{3}{2}; -\frac{z^2}{4}\right)}{\Psi\left(\frac{1}{2}; -\frac{z^2}{4}\right)} = \frac{z|}{|1} - \frac{z^2|}{|3} - \frac{z^2|}{|5} - \frac{z^2|}{|7} - \cdots \tag{6.37}$$

が得られる．さらにここで，z を iz に置き換えると，$\tan(iz) = i \cdot \tanh(z)$ であることから，

$$\tanh(z) = \frac{z|}{|1} + \frac{z^2|}{|3} + \frac{z^2|}{|5} + \frac{z^2|}{|7} + \cdots. \tag{6.38}$$

この最後の連分数展開を **Lambert の連分数**という．

6.4 発散級数に関するクラス

Gauss 連分数 (6.9) において，z を $-cz$ に置き換え，$c \to \infty$ とすると，

$$\frac{\Omega(a,b;-z)}{\Omega(a,b-1;-z)} = \frac{1|}{|1} + \frac{az|}{|1} + \frac{bz|}{|1} + \frac{(a+1)z|}{|1} + \frac{(b+1)z|}{|1} + \cdots \tag{6.39}$$

という，2 つの発散級数からなる Gauss 連分数が得られる．ただし，$a, b \notin \{0, -1, -2, \ldots\}$．ここで，等号は級数が収束する $z = 0$ の場合を除いて，ただ形式的な表現であるとする．このとき，$b = 1$ とすると，$\Omega(a, 0; -z) = 1$ なので，

$$\Omega(a,1;-z) = \frac{1|}{|1} + \frac{az|}{|1} + \frac{1 \cdot z|}{|1} + \frac{(a+1)z|}{|1} + \frac{2 \cdot z|}{|1} + \cdots. \tag{6.40}$$

しかしこの場合，2 つの級数は発散するにもかかわらず，連分数が収束する場合がある．ではまず，次の定理を示す：

定理 6.3. ([Wa48]) $A, B \subset \mathbb{C}$ を任意の有界集合とする．このとき，Gauss 連分数 (6.39) が任意の $a \in A$, $b \in B$, $z \in (0, \delta)$ に対して広義一様収束するような正数 $\delta > 0$ が存在する．

証明. まず，$A, B \subset \mathbb{C}$ を任意の有界集合とする．十分小さな正数 $\delta > 0$ をとれば，任意の $a \in A$, $b \in B$, $z \in (0, \delta)$ に対して，$(a+p)z$, $(b+p)z$ はそれぞれ方物領域 $\{|z| - \Re(z) \leq 1/2\}$ に含まれる．なので，定理 2.11 より，連分数は広義一様収束している． □

定理 6.4. ([Wa45]) $a, b \in \mathbb{C}$ とし，$K \subset \mathbb{C} \backslash [-\infty, 0]$ を任意のコンパクト集合とする．このとき，Gauss 連分数 (6.39) は，(孤立点があればそれを除き)K 上で収束し，さらに，それら孤立点を中心とした十分小さな円を K から取り除いてできる任意の領域上で広義一様収束する．Gauss 連分数の値は，これら孤立点を極として持つような解析函数となる．

この定理を示す前に，次の命題を事実として用いる：

命題 6.5. ([PaWa42, DeWa45]) 連分数 $\dfrac{1|}{|1}+\dfrac{a_1^2t|}{|1}+\dfrac{a_2^2t|}{|1}+\cdots$ における部分分母 a_p^2 が定数 $h\geq 0$ として不等式

$$|a_p^2|-\Re(a_p^2)\leq 2h^2(1-g_{p-1})g_p,\quad 0\leq g_{p-1}\leq 1,\quad p=1,2,3,\ldots \tag{6.41}$$

を満たしているとする．さらに，t-平面の領域として

$$t=|t|e^{-2\phi},\quad |t|>0,\quad -\frac{\pi}{2}<\phi<\frac{\pi}{2} \tag{6.42}$$

を考える．ここで，$h=0$ のときは，集合 K を領域 (6.42) 内の任意のコンパクト集合とし，$h>0$ のときは，集合 K をカージオイド領域

$$|t|<\frac{1}{2h^2}(1+\cos(2\phi)),\quad -\frac{\pi}{2}<\phi<\frac{\pi}{2},\quad \arg(t)=-2\phi \tag{6.43}$$

内の任意のコンパクト集合とする．連分数は

(a) ある $p\in\mathbb{N}$ があって, $a_p=0$,

(b) 任意の自然数 $p\in\mathbb{N}$ に対し, $a_p\neq 0$ であり, $k_1=1, a_p^2=1/k_pk_{p+1}$, $(p=1,2,3,\ldots)$ で定まる級数$\Sigma|k_p|$ が発散する

のいずれかを満たしているとき，コンパクト集合 K 上で広義一様収束する．さらに，級数 $\Sigma|k_p|$ が発散するとき，連分数の偶数部分と奇数部分はコンパクト集合 K 上で，それぞれ相異なる極限に広義一様収束するので，連分数は任意の $t\in K$ に対して，極限が振動するため，発散する．

では，定理 6.4 を示す．

証明. いま，$A,B\subset\mathbb{C}$ を任意のコンパクト集合とし，$A=\{a\}$, $B=\{b\}$ とし，それに対して正数 $\delta>0$ を選ぶ．さらに，領域 $K\subset\mathbb{C}$ を連結とし，$K\supset(\delta/2,\delta)$ とする．領域 K は，定数 $h>0$ を十分小さくとると，カージオイド領域 (6.43) に含まれる．このとき，自然数 $N\in\mathbb{N}$ を十分大きくとると，$n>N$ に対して，$a+n, b+n\in\{|w|-\Re(w)\leq 1/2h^2\}$ とできる．よって，定理 6.5 から，$n>N$ に対して，連分数

$$\frac{1|}{|1}+\frac{(a+n)z|}{|1}+\frac{(b+n)z|}{|1}+\frac{(a+n+1)z|}{|1}+\frac{(b+n+1)z|}{|1}+\cdots$$

は K 上広義一様収束し，その極限は正則関数 $f_n(z)$．したがって，連分数 (6.39) は K 上収束し，その極限は

$$\frac{A_{2n}(z)+(b+n-1)zf_n(z)A_{2n-1}(z)}{B_{2n}(z)+(b+n-1)zf_n(z)B_{2n-1}(z)}$$

となる，ただし，$B_{2n}(z)+(b+n-1)zf_n(z)B_{2n-1}(z)\not\equiv 0$．よって，定理 6.3 から，連分数 (6.39) は広義一様収束する．結論として，連分数は (6.39) は，孤立点を除いて収束し，これらを除いてできる領域 K 上で広義一様収束している． □

ここで述べた Gauss 連分数は $F(a, b+1, c+1; z)/F(a, b, c; z)$ という形であったが，他にも超幾何級数 $F(a, b, c; z)$ を用いた連分数の収束性について研究されている．例えば，$F(a, b, c; z)/F(a, b+1, c+1; z)$，$F(a, b, c; z)/F(a+1, b, c+1; z)$，$F(a, b, c; z)/F(a+1, b, c; z)$，$F(a, b, c; z)/F(a, b+1, c; z)$，$F(a, b, c; z)/F(a, b, c+1; z)$，$F(a, b, c; z)/F(a+1, b+1, c+1; z)$ などである [Fr56].

第7章　結論

これまで述べて来た Gauss 連分数や，Jacobi 連分数に関する近似値の存在領域，さらに，連分数の自己相似性を用いることで，よく知られた函数について種々の不等式が得られる．

命題 7.1. ここでは，$|z| \leq 1$，$\alpha \in \mathbb{C}$，$p, q > 0$，$k \in (0,1)$ とする．また，

$$K(k) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} d\theta, \quad E(k) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta$$

をそれぞれ**第 1 種完全楕円積分**，**第 2 種完全楕円積分**とする．このとき，初等函数と楕円積分に関して次の各不等式が成り立つ：

$$\left| \log(1+z) - \frac{3\bar{z} + 2|z|^2}{3 + 4\Re(z) + |z|^2} \right| \leq \frac{|z|^2}{3 + 4\Re(z) + |z|^2}, \tag{7.1}$$

$$\left| \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) - \frac{10\bar{z} - 6z|z|^2}{5 - 6\Re(z^2) + |z|^4} \right| \leq \frac{4|z|^3}{5 - 6\Re(z^2) + |z|^4}, \tag{7.2}$$

$$\left| \arctan(z) - \frac{5\bar{z} + 3z|z|^2}{5 + 6\Re(z^2) + |z|^4} \right| \leq \frac{2|z|^3}{5 + 6\Re(z^2) + |z|^4}, \tag{7.3}$$

$$\left| \tanh^{-1}(z) - \frac{5\bar{z} - 3z|z|^2}{5 - 6\Re(z^2) + |z|^4} \right| \leq \frac{2|z|^3}{5 - 6\Re(z^2) + |z|^4}, \tag{7.4}$$

$$\left| (1+z)^k - \frac{2 + k - z}{2 + k - 2\Re(z) - k|z|^2} \right| \leq \frac{(1+k)|z|}{2 + k - 2\Re(z) - k|z|^2}, \tag{7.5}$$

$$\left| \arcsin(z) - \frac{|z|^2\sqrt{z^2+1}\left(4 + 3\bar{z}^2\right)}{4\bar{z} + 6\bar{z}\Re(z^2) + 2\bar{z}|z|^4} \right| \leq \frac{|z|^3\sqrt{|z^2+1|}}{4 + 6\Re(z^2) + 2|z|^4}, \tag{7.6}$$

$$\left| \int_0^z \frac{dt}{1+t^n} - \frac{(2n+1)\bar{z} + (n+1)z^{n-1}|z|^2}{2n + 1 + 2(n+1)\Re(z^n) + |z|^{2n}} \right| \leq \frac{n \cdot |z|^{n+1}}{2n + 1 + 2(n+1)\Re(z^n) + |z|^{2n}}, \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^z \frac{t^p}{1+t^q} dt - \frac{(p+2q+1)\bar{z}^{p+1} + (p+q+1)z^{q-p-1} \cdot |z|^{2(p+1)}}{q\left\{(p+2q+1) + 2(p+q+1)\Re(z^q) + (p+q)|z|^{2q}\right\}} \right| \\ &\qquad \leq \frac{|z|^{p+q+1}}{(p+2q+1) + 2(p+q+1)\Re(z^q) + (p+q)|z|^{2q}}, \end{aligned} \tag{7.8}$$

$$\frac{3(1-k^2)}{3-k^2} \leq \frac{E(k)}{K(k)} \leq 1 - \frac{k^2}{3}. \tag{7.9}$$

これらの不等式は，各函数が超幾何級数で記述されることと，Gauss 連分数の収束領域を用いることでどれも導ける．また，いくつかの不等式（例えば不等式 (7.1) など）は不等式 (7.6) に吸収される．なので不等式 (7.6) と，完全楕円積分による不等式 (7.9) の証明を行う．

証明. まず，$p, q > 0$ に対して，

$$\int_0^z \frac{t^p}{1+t^q}dt = \frac{z^{p+1}}{q} \cdot F\left(\frac{p+1}{q}, 1, 1+\frac{p+1}{q}; -z^q\right)$$

と記述できる．これは，Gauss 連分数 (6.19) において $a = (p+1)/q, c = 1+(p+1)/q$ とした場合である．さらに便宜上，$S := \int_0^z t^p dt/(1+t^q)$ とする．定理 1.19 から，$h_1 = a/c = (p+1)/(p+q+1)$ に注意して，

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1-\dfrac{q\cdot S}{z^{p+1}}}{z^q\cdot\dfrac{q\cdot S}{z^{p+1}}} - \frac{p+q+1}{p+2q+1}\right| &\leq \frac{p+1}{p+2q+1} \\
\left|\frac{z^{p+1}-q\cdot S}{z^q\cdot q\cdot S} - \frac{p+q+1}{p+2q+1}\right| &\leq \frac{p+1}{p+2q+1} \\
\left|\frac{1}{z^{q-p-1}\cdot q\cdot S} - \frac{1}{z^q} - \frac{p+q+1}{p+2q+1}\right| &\leq \frac{p+1}{p+2q+1} \\
\left|1-\frac{q\cdot S}{z^{p+1}} - \frac{p+q+1}{p+2q+1}z^{q-p-1}\cdot q\cdot S\right| &\leq \frac{q^2}{p+2q+1}|z|^{q-p-1}|S|.
\end{aligned}$$

ここで，

$$A := \frac{q}{z^{p+1}} + \frac{p+q+1}{p+2q+1}z^{q-p-1}\cdot q, \quad B := \frac{q^2}{p+2q+1}|z|^{q-p-1}$$

とおくと，

$$|1-AS|^2 \leq B^2|S|^2.$$

$R := |A|^2 - B^2$ とおいて，展開して整理すると，

$$\left|S - \frac{A}{R}\right|^2 \leq \frac{|A|^2-R}{R^2} = \frac{B^2}{R^2}.$$

さらに，

$$\begin{aligned}
\frac{B}{R} &= \frac{\dfrac{q}{p+2q+1}|z|^{q-p-1}\cdot q}{\left|\dfrac{q}{z^{p+1}} + \dfrac{p+q+1}{p+2q+1}z^{q-p-1}\cdot q\right|^2 - \left(\dfrac{q^2}{p+2q+1}|z|^{q-p-1}\right)^2} \\
&= \cdots \\
&= \frac{|z|^{p+q+1}}{(p+2q+1)+2(p+q+1)\Re(z^q)+(p+q)|z|^{2q}}.
\end{aligned}$$

同様にして,

$$\begin{aligned}
\frac{A}{R} &= \frac{\dfrac{q}{z^{p+1}} + \dfrac{p+q+1}{p+2q+1} z^{q-p-1} \cdot q}{\left| \dfrac{q}{z^{p+1}} + \dfrac{p+q+1}{p+2q+1} z^{q-p-1} q \right|^2 - \left(\dfrac{q^2}{p+2q+1} |z|^{q-p-1} \right)^2} \\
&= \cdots \\
&= \frac{(p+2q+1)\bar{z}^{p+1} + (p+q+1) z^{q-p-1} \cdot |z|^{2(p+1)}}{q \left\{ (p+2q+1) + 2(p+q+1)\Re(z^q) + (p+q)|z|^{2q} \right\}}.
\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\left| \int_0^z \frac{t^p}{1+t^q} dt - \frac{(p+2q+1)\bar{z}^{p+1} + (p+q+1) z^{q-p-1} \cdot |z|^{2(p+1)}}{q \left\{ (p+2q+1) + 2(p+q+1)\Re(z^q) + (p+q)|z|^{2q} \right\}} \right| \\
\leq \frac{|z|^{p+q+1}}{(p+2q+1) + 2(p+q+1)\Re(z^q) + (p+q)|z|^{2q}}.$$

次に，完全楕円積分に関する不等式は，$k \in (0,1)$ に対して,

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; k^2 \right),$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1; k^2 \right)$$

と書けることに気をつける．さらに,

$$\frac{4K(k)}{\pi k^2} - \frac{4E(k)}{\pi k^2} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2; k^2 \right),$$

$$\frac{4\left(k^2-1\right)K(k)}{\pi k^2} + \frac{4E(k)}{\pi k^2} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2; k^2 \right)$$

であるので，Gauss 連分数の収束領域である不等式 (6.20) において，$a = 1/2, c = 1$ とした場合であると考えることができる．

$$\left| \frac{1 - 1/2}{1} \cdot \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2; k^2 \right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; k^2 \right)} - \frac{1}{1 + 1/2} \right| \leq \frac{1/2}{1 + 1/2}$$

$$\left| \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\dfrac{4K(k) - 4E(k)}{\pi k^2}}{\dfrac{2K(k)}{\pi}} - \frac{2}{3} \right| \leq \frac{1}{3}$$

$$\left|\frac{K(k)-E(k)}{K(k)\cdot k^2}-\frac{2}{3}\right|\leq\frac{1}{3}.$$

なので，

$$1-k^2\leq\frac{E(k)}{K(k)}\leq 1-\frac{k^2}{3}$$

が分かる．次に，

$$\left|\frac{1-1/2}{1}\cdot\frac{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2;k^2\right)}{F\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1;k^2\right)}-\frac{1}{1+1/2}\right|\leq\frac{1/2}{1+1/2}$$

$$\left|\frac{(k^2-1)K(k)+E(k)}{E(k)\cdot k^2}-\frac{2}{3}\right|\leq\frac{1}{3}.$$

なので，

$$\frac{3(k^2-1)}{k^2-3}\leq\frac{E(k)}{K(k)}\leq 1.$$

先ほどの不等式と合わせて，

$$\frac{3(k^2-1)}{k^2-3}\leq\frac{E(k)}{K(k)}\leq 1-\frac{k^2}{3}.$$

□

これら以外の証明は，$\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=2z\cdot F\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2};z^2\right)$，$\arctan(z)=z\cdot F\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2};-z^2\right)$，$\tanh^{-1}(z)=z\cdot F\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2};z^2\right)$，$\int_0^z dt/(1+t^n)=z\cdot F\left(\frac{1}{n},1,1+\frac{1}{n};-z^n\right)$，$(1+z)^\alpha=F\left(-\alpha,1,1;-z\right)$，$\arcsin(z)/\sqrt{1+z^2}=z\cdot F\left(1,1,\frac{3}{2};-z^2\right)$ とそれぞれ書けることを用いればよい．

これらの証明から，超幾何級数の不等式は

$$\left|F(a,1,c;z)-\frac{(2c-a)-cz}{(2c-a)+2c\Re(z)+a|z|^2}\right|\leq\frac{(c-a)|z|}{(2c-a)+2c\Re(z)+a|z|^2}$$

と一般化される．

連分数 (6.19) の自己相似性を用いるとさらに，精度の高い不等式が得られる，いま，連分数 (6.19) から，$h_n\in(0,1)$, $(n=1,2,3,\dots)$ に対して，

$$\frac{F(a,1,c;z)-1}{z\cdot F(a,1,c;z)}=\frac{h_1|}{|1}-\frac{(1-h_1)h_2z|}{|1}-\frac{(1-h_2)h_3z|}{|1}-\cdots$$

と変形できるので，$f(z):=\frac{F(a,1,c;z)-1}{z\cdot F(a,1,c;z)}$ とおいて，さらに変形すると，

$$\frac{f(z)-h_1}{(1-h_1)zf(z)}=\frac{h_2|}{|1}-\frac{(1-h_2)h_3z|}{|1}-\frac{(1-h_3)h_4z|}{|1}-\cdots$$

という添字が1つずつ早められた連分数が得られる．もちろん，この連分数は定理1.19の仮定を全て満たすので，今度は $g(z) := \frac{f(z)-h_1}{(1-h_1)zf(z)}$ として，定理1.19を再び適用すれば，パラメータ h_1 の情報を含んだ不等式 (領域) が導かれる．同様のアイデアを Jacobi 連分数に適用することで誤差函数に対しても不等式が導ける．

系 7.2. $|z| \le 1$，$k \in (0,1)$ に対して，次の不等式が得られる：

$$\left|\log(1+z) - \frac{4\bar{z}(3\Re(z)+5)+(3z^2+11z)|z|^2}{6|z|^2+2\Re(3z^2+16z)+20}\right| \le \frac{|z|^3}{3|z|^2+\Re(3z^2+16z)+10}, \tag{7.10}$$

$$\frac{14-6k^2}{k^2+14} \le \frac{E(k)}{K(k)} \le \frac{(1-k^2)(3k^2+10)}{10-2k^2}. \tag{7.11}$$

不等式 (7.10) は，不等式 (7.1) と前章で述べた不等式 (6.21) の精密化になっており，同様のことが不等式 (7.11) と不等式 (7.9) にもいえる．

$|z| \le 1$ に対して，パラメータ $h_1 = a/c$ を含む不等式を一般化とすると，

$$\left|F(a,1,c:z) - \frac{S+c\{c(2c+1)+(c+1)(c-a)z\}}{S+2c\Re(c(2c+1)z+(c+1)(c-a)z^2)+c^2(2c+1)|z|^2}\right|$$
$$\le \frac{c^2(c-a)|z|^2}{S+2c\Re(c(2c+1)z+(c+1)(c-a)z^2)+c^2(2c+1)|z|^2}$$

となる．ここで，

$$S = c^2(2c+1)+2(c+1)(c-a)\Re(z)+(c-a)|z|^2.$$

つまり，連分数の自己相似性を用いることで，いくらでも高精度の不等式を導くことができるのである．この性質は他のべき級数や複素積分などでは見られない，連分数特有の特徴といえる．

ここまでの議論に基づき，Jacobi 連分数でも同様にして不等式が導けることを述べる．

定義 7.3. $z \in \mathbb{C}$ に対して，次で定まる函数をそれぞれ，**Gauss の誤差函数**，**相補誤差函数**，**複素相補誤差函数**という：

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt, \tag{7.12}$$

$$\mathrm{erfc}(z) = 1-\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty e^{-t^2}dt, \tag{7.13}$$

$$w(z) = e^{-z^2}\mathrm{erfc}(-iz) = e^{-z^2}\left(1+\frac{2i}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{t^2}dt\right). \tag{7.14}$$

定理 7.4. $z \in \mathbb{C}$ とし，$\Im(z^2) \ne 0$ とする．このとき次の各不等式が成り立つ：

$$\left|\mathrm{erfc}(z) - \frac{2z(1+2z^2)\cdot e^{z^2}}{\sqrt{\pi}\cdot|e^{z^2}|\cdot(1+4\Re(z^2)+4|z|^4-1/(\Im(z^2))^2)}\right|$$
$$\le \frac{2|z|}{|\Im(z^2)|\cdot(1+4\Re(z^2)+4|z|^4-1/(\Im(z^2))^2)}, \quad \Re(z)>0, \quad \Im(z^2)\ne 0, \tag{7.15}$$

$$\left| w(z) - \frac{2iz(1-2z^2)}{\sqrt{\pi}\cdot(1-4\Re(z^2)+4|z|^4-1/(\Im(z^2))^2)} \right|$$
$$\leq \frac{2|z|}{|\Im(z^2)|\cdot\sqrt{\pi}\cdot(1-4\Re(z^2)+4|z|^4)-1/(\Im(z^2))^2)}, \quad \Im(z)>0, \quad \Im(z^2)\neq 0. \tag{7.16}$$

証明. まず,

$$\mathrm{erfc}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}, z^2\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{z^2}^{\infty} t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt$$
$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}ze^{-z^2}|}{|z^2} + \frac{1/2|}{|1} + \frac{1|}{|z^2} + \frac{3/2|}{|1} + \frac{2|}{|z^2} + \cdots, \quad (\Re(z)>0)$$

という連分数展開を得ることができる．この形は，Stieltjes 連分数の形式をしているので，偶数部分を考えると,

$$\mathrm{erfc}(z) = \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}ze^{-z^2}|}{|z^2+1/2} - \frac{1/2|}{|z^2+5/2} - \frac{3|}{|z^2+9/2} - \frac{15/2|}{|z^2+13/2} - \cdots, \quad (\Re(z)>0)$$

となるが，これは Jacobi 連分数である．また，実 Jacobi 連分数の p 次の分子と分母をそれぞれ $A_p(z), B_p(z)$ とすると，任意の近似値は,

$$\left|\frac{A_p(z)}{B_p(z)}\right| \leq \frac{1}{|\Im(z)|}, \quad (\Im(z)\neq 0)$$

を満たすので,

$$\left|\frac{\sqrt{\pi}\cdot e^{z^2}}{z}\cdot\mathrm{erfc}(z)\right| \leq \frac{1}{|\Im(z^2)|}$$

となる．これを変形すると，Gauss の相補誤差函数に関して,

$$|\mathrm{erfc}(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{|z|}{|\Im(z^2)|\cdot\left|e^{z^2}\right|}$$

という不等式が得られる．しかし，上の不等式は定義域全体にわたって精度が悪くなっているので，さらなる改善が必要である．そこで，使うのは，Jacobi 連分数の自己相似性である．Jacobi 連分数の収束領域に関しては，$\Im(z)$ によってのみ定まるが，この自己相似性により定義域全体において精度が改善される．先ほど,

$$\mathrm{erfc}(z) = \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}ze^{-z^2}|}{|z^2+1/2} - \frac{1/2|}{|z^2+5/2} - \frac{3|}{|z^2+9/2} - \frac{15/2|}{|z^2+13/2} - \cdots, \quad (\Re(z)>0)$$

と書けることは述べたので，これをさらに変形すると,

$$2z^2+1-\frac{2z}{\sqrt{\pi}\cdot e^{z^2}\cdot\mathrm{erfc}(z)} = \frac{1|}{|z^2+5/2} - \frac{3|}{|z^2+9/2} - \frac{15/2|}{|z^2+13/2} - \cdots, \quad (\Re(z)>0).$$

ゆえに,

$$\left|2z^2 + 1 - \frac{2z}{\sqrt{\pi} \cdot e^{z^2} \cdot \mathrm{erfc}(z)}\right| \le \frac{1}{|\Im(z^2)|}$$

とできるので，これを同値変形すると,

$$\left|\mathrm{erfc}(z) - \frac{2z(1+2z^2) \cdot e^{z^2}}{\sqrt{\pi} \cdot |e^{z^2}| \cdot (1 + 4\Re(z^2) + 4|z|^4 - 1/(\Im(z^2))^2)}\right|$$

$$\le \frac{2|z|}{|\Im(z^2)| \cdot (1 + 4\Re(z^2) + 4|z|^4 - 1/(\Im(z^2))^2)},$$

$$\Re(z) > 0, \quad \Im(z^2) \neq 0.$$

また，$w(z) = e^{-z^2}\mathrm{erfc}(-iz)$ なので,

$$w(z) = \frac{\frac{-iz}{\sqrt{\pi}}|}{|-z^2} + \frac{1/2|}{|1} + \frac{1|}{|-z^2} + \frac{|3/2}{|1} + \cdots, \quad (\Im(z) > 0)$$

と書ける．偶数部分をとると,

$$w(z) = \frac{\frac{-iz}{\sqrt{\pi}}|}{|-z^2+1/2} - \frac{1/2|}{|-z^2+5/2} - \cdots, \quad (\Im(z) > 0).$$

さらに変形を施すと,

$$-2z^2 + 1 + \frac{2iz}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{w(z)} = \frac{1|}{|-z^2+5/2} - \cdots, \quad (\Im(z) > 0).$$

したがって,

$$\left|-2z^2 + 1 + \frac{2iz}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{w(z)}\right| \le \frac{1}{|\Im(z^2)|}.$$

同値変形を施すと,

$$\left|w(z) - \frac{2iz(1-2z^2)}{\sqrt{\pi} \cdot (1 - 4\Re(z^2) + 4|z|^4 - 1/(\Im(z^2))^2)}\right|$$

$$\le \frac{2|z|}{|\Im(z^2)| \cdot \sqrt{\pi} \cdot (1 - 4\Re(z^2) + 4|z|^4) - 1/(\Im(z^2))^2)},$$

$$\Im(z) > 0, \quad \Im(z^2) \neq 0.$$

$\square$

謝辞

この研究を修士論文として形をなすことができたのは，指導教員である須川敏幸先生の熱心なご指導と，数学教室の諸先生方の支えのおかげだと思っております．須川先生には，毎週のセミナーで的確なアドバイスを頂き，豊富な経験と知識を基に私の勉学のため，有意義な議論に付き合ってくださいました．また，私は他の学生とは異なり，工学部情報工学科の出身であったにも関わらず，ここまで数学を学び，研究できたことは須川先生のおかげだとたいへん感謝しております．そして，日々の学生生活を始め，心地よく研究が行えるようにと，環境を整えてくださった奈良坂さん，狩野さんにもこの場を借りてお礼を申し上げます．最後になりましたが，2 年間，辛いときも苦しいときも最後まで支えてくださった同期，そして院生室の学生の皆様に心より感謝申し上げます．

関連図書

[Be87] B. C. Bernt, Ramanujan's Notebook Part Ⅱ, Springer, 1987.

[Ch78] T. S. Chihara, An Introduction to Otrhogonal Poynomials, Routledge, 1978.

[Cu08] A. Cuyt et al., Handbook of Continued Fractions for Special Functions, Springer, 2008.

[DeWa45] J. J. Dennis and H. S. Wall, "The limit-circle case for a positive definite J-fraction", Duke Math. Jour. vol. 12, pp. 255-273, 1945.

[Eu48] L. Euler, Introductio in analysin infinitorum, vol. I, 1748, Chapter 18

[Fr46] E. Frank, "On the zeros of polynomials with complex coefficients", Bull. Amer. Math. Soc, vol. 52 (1946), pp. 144-157.

[Fr56] ______, "A new class of continued fraction expansions for the ratios of hypergeometric functions", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 81 (1956), pp. 453-476.

[Ga76] C. F. Gauss, "Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \alpha\beta x/1 \cdot \gamma + \alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)x^2/1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1) + \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)x^3/1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2) + \mathrm{etc}$", Nouveaux mémoires de l'akadémie royale des sciences et belles-letters de Berlin, 1776, pp. 236-264 ; Oeuvres, vol. 4, p. 301 ff.

[Gr14] J. Grommer, "Ganze transcendente Functionen mit lauter reellen Nullstellen", Jour. für Math., vol. 144 (1914), pp. 212-238.

[Ha20] H. Hamburger, "Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems", Parts I, II, III, Math. Ann., vol. 81 (1920), pp. 235-319; vol. 82 (1920), pp. 120-164, 168-187.

[HeWa43] E. Hellinger and H. S. Wall, "Contributions to the analytic theory of continued fractions and infinite matrices", Ann. of Math., (2), vol. 44, pp. 103-127, 1943.

[JoTh80] W. B. Jones and W. J. Thron, Continued Fractions: Analytic Theory and Application, Cambridge University Press, 1980.

[Kü02] R. Küstner, "Mapping properties of hypergeometric functions and convolutions of starlike or convex functions of order α", Comput. Methods Funct. Thoery 2(2) (2002) pp. 597-610.

[La45] R. E. Lane, "The value region problem for continued fractions", Duke Math. Jour., vol. 12 (1945), pp. 207-216.

[LiYa99] L. A. Ljusternik and A. P. Yampolisky, 解析学 I, 佐藤常三監修, 宮本敏雄ほか訳, 総合図書, 1972.

[MeSc61] E. P. Merkes and W. T. Scott, "Starlike hypergeometric functions", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 12 (1961), pp. 885-888.

[MiVa70] D. S. Mitrinović and P. M. Vasić, Analytic Inequalities, Springer, 1970.

[PaWa42] J. F. Paydon and H. S. Wall, "The continued fraction as a sequence of linear transformations", Duke Math. Jour., vol. 9 (1942), pp. 360-372.

[Pr98] A. Pringsheim, "Über die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche", Sb. München, vol. 28 (1898), pp. 295-324.

[Ri63] B. Riemann, "Sullo svolgimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua infinita", Werke, 1st ed. (1863), pp. 400-406. (Posthumous fragment, completed by Schwarz.)

[Ru87] W. Rudin, Real and Complex Analysis, Third edition, McGraw-Hill, 1987.

[ScWa40] W. T. Scott and H. S. Wall, "A convergence theorem for continued fractions", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 47 (1940), pp. 155-172.

[ScWa41] ——, "Value regions for continued fractions", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 47 (1941), pp. 580-585.

[ScWa47] ——, "On the convergence and divergence of continued fractions", Amer. Jour. of Math., vol. 69 (1947), pp. 551-561.

[St89] T. J. Stieltjes, "Sur la réduction en fraction continue d'une série précédent suivant les pouissances descendants d'une variable", Ann. Fac. Sci. Toulouse, vol. 3 (1889), H, pp. 1-17; Oeuvres, vol. 2, pp. 184-200.

[St94a] ——, "Recherches sur les fractions continues", Ann. Fac. Sci. Toulouse, vol. 8 (1894), J, pp. 1-122.

[St94b] ——, "Recherches sur les fractions continues", Ann. Fac. Sci. Toulouse, vol. 9 (1894), A, pp. 1-47.

[St94c] ——, "Recherches sur les fractions continues", Ann. Fac. Sci. Toulouse, vol. 2, pp. 402-566, 1894.

[St94d] ——, "Recherches sur les fractions continues", Mémoires présentés par divers savants àl'Académie des sciences de l'Institut National de France, vol. 33, pp. 1-196, 1894.

[Th67] L. W. Thomé, "Über die Kettenbrüchentwicklung des Gauss'schen Quotienten $F(\alpha, \beta+1, \gamma+1; x)/F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ ", Jour. für Math., vol. 67 (1867), pp. 299-309.

[Vl01a] E. V. Van Vleck, "On the convergence and character of the continued fraction $a_n z/1 + a_2 z/1 + a_3 z/1 + \cdots$", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 2 (1901), pp. 476-483.

[Vl01b] ———, "On the convergence of the continued fraction of Gauss and other continued fractions", Ann. of Math., (2), vol. 3 (1901), pp. 1-18.

[Vl03] ———, "On an extension of the 1894 memoir of Stieltjes", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 4 (1903), pp. 297-332.

[Vl04] ———, "On the convergence of algebraic continued fractions whose coefficients have limiting values", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 5 (1904), pp.253-262.

[Ko95] H. von Koch, "Sur un théorème de Stieltjes et sur les fractions continues", Bull. Soc. Math. de France, vol. 23 (1895), pp. 23-40.

[Wa40] H. S. Wall, "Continued fractions and totally monotone sequences", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 48 (1940), pp. 165-184.

[Wa45] ———, "Note on a certain continued fraction", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 51 (1945), pp. 930-934.

[Wa48] ———, Analytic Theory of Continued Fractions, D. Van Nostrand Co. Inc., New York, 1948.

[WaWe44a] H. S. Wall and M. Wetzel, "Contributions to the analytic theory of J-fractions", Trans. Amer. Math. Soc. vol. 55, pp. 373-397, 1944.

[WaWe44b] ———, "Quadratic forms and convergence region for continued fractions", Duke Math. Jour. vol. 11, pp. 89-102, 1944.

[Wo65] J. Worpitzky, "Üntersuchungen über die Entwickelung der monodronen und monogenen Funktionen durch Kettenbrüche", Fried-richs-Gymnasium und Realschule, Jahresbericht, Berlin, 1865, pp.3-39.