

修士論文

Discrete group の limit set のハウスドルフ次元と
収束指数の関係

氏名 椿 侑祥

アドバイザー 糸 健太郎

2010年2月3日

序文

筆者は、博士前期課程において Nicholls 著 “*The Ergodic Theory of Discrete Groups*” を少人数クラスで輪読した。この論文は、この文献の解説である。この論文の具体的な目標は、「convex co-compact な discrete group について、その conical limit set のハウスドルフ次元は収束指数に一致する」(定理 4.1) ことを示すことである。

この目標の歴史的背景を述べる。一般次元の単位球を保つメビウス変換群の discrete subgroup (Kleinian group) Γ について多くの研究がなされてきた。単位球の各点の group による軌道の集積点の集合である limit set を研究することは、その group をより深く理解する上でとても重要な研究である。この分野の研究者の一人である Sullivan は、その limit set の幾何学的な複雑さを測る 1 つの指標としてそのハウスドルフ次元に注目し、1980 年代に研究を行った。その Sullivan の理論を解説した本である “*The Ergodic Theory of Discrete Groups*” を修士論文として解説する。

次に目標の主張「convex co-compact な discrete group について、その conical limit set のハウスドルフ次元は収束指数に一致する」ことについて述べる。先に discrete group とハウスドルフ次元については述べた。convex co-compact とは、limit set を境界を持つ \mathbb{B} 内の最小の双曲凸閉集合 (convex hull) をその discrete group で割ったものが compact になるという条件である。conical limit set とは、limit set の部分集合であり、軌道が半径方向から集積するような点の集合である。収束指数とは、discrete group から得られる量であり、これは discrete group の軌道の境界への集積の仕方が早い遅いかということを表す指標である。

目標の主張を示すためのプロセスは次の通りである。まず第一に limit set 上に台を持つ α 次元 Γ -不変等角測度を定義する。そしてその具体例として Patterson-Sullivan 測度を述べる。これが本文の第 3 章に当たる内容である。次に第 4 章に入り、その測度を shadow という概念を用いて評価する (定理 4.2 (shadow lemma)) この shadow lemma が一番重要な定理である。この shadow lemma を用いてハウスドルフ測度と α 次元 Γ -不変等角測度 (Patterson-Sullivan 測度) の関係を述べ、ハウスドルフ次元と収束指数の 2 つの不等式を示すことによって一致することを示す。一言で言えば、 α 次元 Γ -不変等角測度を仲介してハウスドルフ測度を評価するということである。

詳細は把握していないが、この分野の新しい結果では「任意の discrete group について、その conical limit set のハウスドルフ次元は収束指数に一致する」というこの修士論文の目標の「convex co-compact」の条件のない結果が得られている。詳しい解説は [BJ] に載っている。

本論文の大まかな流れを述べると、大きく3つ(前半, 中盤, 後半)に分かれている。まず前半は第1章, 第2章に当たる部分で、基本的な必要な定義・定理を述べる。ここでは、技巧的な部分もあるが一般的な概念を用いて証明することのできる事実を示す。次に中盤は、第3章に当たる部分で、 α 次元 Γ -不変等角測度を導入し、その存在や一意性について述べる。そして後半は、第4章に当たる部分で、shadow lemma というキーとなる定理を証明し、この定理を使って目標(定理 4.1)を示す。より詳しく述べると、目標は shadow lemma を使い、 α 次元 Γ -不変等角測度を仲介し、ハウスドルフ測度を評価し、ハウスドルフ次元と比較することで示していく方針である。

より具体的に各章毎の内容を解説する。第1章では、discrete group Γ やそれに関連する基本的な定義・定理・概念を述べる。また、shadow やハウスドルフ次元、使われる測度論についても説明する。第2章では、 Γ の収束指数を定義し、空間の次元との関係について述べる。第3章では、目標を示すためにとても重要な役割を果たす α 次元 Γ -不変等角測度を導入し、その具体例として Patterson-Sullivan 測度を構成する。また、Patterson-Sullivan 測度の性質についても触れる。第4章では、目標を示すための本質的な定理 shadow lemma を証明し、目標「convex co-compact な discrete group について、その conical limit set のハウスドルフ次元は収束指数に一致する」を示す。

この修士論文では第1章において、できるだけその概念の意味付けを行い、理解を助けるように心がけた。特に第4章に力を入れ、証明に必要な知識や補題等を適宜補足し、重要な定理の証明をできるだけ詳しく述べた。

最後に、未熟な筆者にたいし、ご多忙の中、終始熱心にご指導して下さった糸健太郎先生に心より感謝申し上げます。そして、筆者と共に輪読し、助言して頂いた桂悠祐氏、棕野純一氏、赤川祥崇氏に感謝致します。

目次

1	準備	4
1.1	双曲距離とメビウス変換	4
1.2	discrete group と関連事項	5
1.3	ハウスドルフ次元	7
1.4	測度論	8
2	収束指数と空間の次元	10
2.1	収束指数とその別表現	10
2.2	空間の次元との関係	12
3	α 次元 Γ -不変等角測度	15
3.1	α 次元 Γ -不変等角測度の定義	15
3.2	Patterson-Sullivan 測度	16
3.3	α 次元 Γ -不変等角測度の一意性	17
4	shadow lemma の証明とハウスドルフ次元と収束指数の関係	19
4.1	shadow lemma とその証明	19
4.2	ハウスドルフ次元と収束指数の関係 (その1)	22
4.3	shadow lemma の応用	23
4.4	ハウスドルフ次元と収束指数の関係 (その2)	25

1 準備

1.1 双曲距離とメビウス変換

ここでは, $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^n$ 上に双曲距離を定義し, \mathbb{B} を保つメビウス変換が等長写像であることなどを確認する. まず, 記号を定義する.

$$\begin{aligned}\mathbb{B} &= \mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}, \\ S &= S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}, \\ \omega &: S \text{ 上のユークリッド距離から得られるルベグ測度}\end{aligned}$$

とする. $\partial\mathbb{B} = S$ である.

定義 1.1. $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^n$ において, 双曲距離 (hyperbolic distance) ρ を与える. ここで, ρ は

$$d\rho(x) = \frac{2|dx|}{1 - |x|^2}$$

より導かれる. このとき, \mathbb{B} 上の双曲体積 (hyperbolic volume) V は次より導かれる:

$$dV = \frac{2^n dx_1 \dots dx_n}{(1 - |x|^2)^n}.$$

次に述べる3つの命題はよく知られている. 参考文献として, [Be], [KL] を挙げておく.

命題 1.2. 任意の $x \in \mathbb{B}$ について, $\rho(0, x)$ は次のように表わされる.

$$\rho(0, x) = \log \frac{1 + |x|}{1 - |x|}.$$

命題 1.3. 距離空間 (\mathbb{B}, ρ) は完備距離空間である.

命題 1.4. (\mathbb{B}, ρ) と任意の $a, b \in \mathbb{B}$ について, a, b を通る測地線は唯1本存在し, それは \mathbb{B} の境界 S に直交する円弧である.

以後, \mathbb{R}^n 上のユークリッド球と \mathbb{B} 上の双曲球をそれぞれ次の記号で表す.

$$\begin{aligned}B(x, r) &:= \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < r\} : \text{ユークリッド距離での球,} \\ \Delta(x, r) &:= \{y \in \mathbb{B} \mid \rho(x, y) < r\} : \text{双曲距離での球.}\end{aligned}$$

次に, メビウス変換を定義する.

定義 1.5.

- (1) $\hat{\mathbb{R}}^n$ から $\hat{\mathbb{R}}^n$ への写像 f が相似変換 (similarity) であるとは, $f(x) = mx + b$ と表せるものをいう. ここで, $m = \lambda A$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $A \in O(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$ である.
- (2) $\hat{\mathbb{R}}^n$ から $\hat{\mathbb{R}}^n$ への写像 J が単位球の鏡映 (reflection in the unit sphere) であるとは, $J(x) = x^* := \frac{x}{|x|^2}$ のことをいう.
- (3) 相似変換と単位球の鏡映で生成された群 M を, メビウス変換群 (Möbius group) といい. また, M の元をメビウス変換 (Möbius transform) という.
- (4) \mathbb{B} を保ち, 向きを保つメビウス変換全体を $M(\mathbb{B})$ で表す.

次に述べることはよく知られている. 参考文献として, 同様に [Be], [KL] を挙げておく.

命題 1.6. \mathbb{B} を保つメビウス変換は (\mathbb{B}, ρ) の自己等長写像である.

1.2 discrete group と関連事項

ここでは discrete group の定義を述べ, 今後に使われる定義, 命題等を述べる. $M(\mathbb{B})$ に自然な位相を導入して考える.

定義 1.7. $M(\mathbb{B})$ の部分群 Γ について, Γ が discrete group (Kleinian group) であるとは, 恒等写像 id のある近傍 $U \subset M(\mathbb{B})$ が存在して $U \cap \Gamma = \{id\}$ を満たすときをいう. 特に $\mathbb{B} = \mathbb{B}^2$ の場合は Fuchsian group という.

注意 1.8. Γ が discrete ならば, Γ は \mathbb{B} に真性不連続に作用することに注意する. Γ が \mathbb{B} に真性不連続に作用するとは, 任意の \mathbb{B} の元 a について, a のある近傍 U が存在して, 有限個を除いたすべての Γ の元 γ について $U \cap \gamma(U) = \emptyset$ が成り立つことをいう.

したがって, Γ が discrete ならば, 商空間 \mathbb{B}/Γ はハウスドルフ空間になる. さらに, freely に作用するならば, 商空間 \mathbb{B}/Γ は多様体になる.

\mathbb{B} の元 a について, $\Gamma(a)$ で a の Γ -軌道を表すとする. このとき次がいえる.

命題 1.9. Γ が discrete ならば, \mathbb{B} の任意の元 a について, $\Gamma(a)$ は S 上にのみ集積点を持つ.

定義 1.10. この集積点を Γ の limit point という. また, Γ の limit point 全体の集合を

$\Lambda(\Gamma)$ で表し, Γ の limit set という.

上の命題から $\Lambda(\Gamma) \subset S$ であり, $\Lambda(\Gamma)$ は S 上の閉集合である. さらに, 双曲距離が $M(\mathbb{B})$ で不変であるから $\Lambda(\Gamma)$ は a の取り方に依らず定義され, $\Lambda(\Gamma)$ は Γ -不変であることにも注意する. 特に今後は $a = 0$ とすることが多い.

定義 1.11. Γ が first kind であるとは, $\Lambda(\Gamma) = S$ のときをいう. そうでないとき, second kind という.

ここで, 以後特に重要となる limit set の部分集合 conical limit set を定義する.

定義 1.12. $\Lambda(\Gamma)$ の点 ξ が Γ の conical limit point であるとは, \mathbb{B} の任意の元 a について, ある Γ の部分列 $\{\gamma_n\}$ とある正定数 M が存在して, 任意の n について

$$\frac{|\xi - \gamma_n(a)|}{1 - |\gamma_n(a)|} \leq M$$

となるときをいう. conical limit point 全体の集合を conical limit set と呼び, $\Lambda_c(\Gamma)$ で表す.

この conical limit point の意味は, その点に集積する $\Gamma(0)$ の軌道が境界に沿ってではなく, 半径方向から集積するということである. conical limit point は次に導入する shadow という概念を使うと分かりやすい特徴付けができる.

定義 1.13. \mathbb{B} の点 a と正の数 δ とする. shadow $b(x : a, \delta)$ とは, x から双曲球 $\Delta(a, \delta) (\not\ni x)$ を S 上に射影したものである. つまり, $\overline{x\xi}$ で x と ξ を結ぶ測地線を表すとすると $b(x : a, \delta)$ は次のように表せる.

$$b(x : a, \delta) = \{\xi \in S_\infty \mid \overline{x\xi} \cap \Delta(a, \delta) \neq \emptyset\}.$$

この shadow という概念は, 考え方としても証明の道具としても多々使われる. 先に述べた conical limit point の特徴付けとして, 次の命題を紹介する.

命題 1.14. $\Lambda(\Gamma)$ の点 ξ が Γ の conical limit point であることの必要十分条件は, \mathbb{B} のある点 a とある正の数 δ について, ξ が無限個の $\gamma \in \Gamma$ に対して $b(0 : \gamma(a), \delta)$ に含まれることである.

上の命題の “ \mathbb{B} のある元 a とある正の数 δ ” は “ \mathbb{B} の任意の元 a と任意の正の数 δ ” に書き換えることができることに注意する. 次に, fundamental region について述べる.

定義 1.15. Γ を discrete group とし, $D \subset \mathbb{B}$ を Γ -不変な領域とする. $F \subset D$ が Γ について D の fundamental region であるとは次の条件を満たすときをいう.

1. $\gamma(F) \cup F = \emptyset \quad (\forall \gamma \in \Gamma \setminus \{id\}),$
2. $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\bar{F}) = D.$

fundamental region の典型例として次がよく知られている.

例 1.16. D_a を集合 $\{x \in \mathbb{B} \mid \rho(x, a) \leq \rho(x, \gamma(a)), \gamma \in \Gamma\}$ の内部とすると D_a は Γ について \mathbb{B} の fundamental region である. この D_a を a 中心の Dirichlet region という. 特に D_a は convex fundamental region の例になっている.

次に他の limit set に関連した幾何学的な定義も述べる.

定義 1.17. Γ を discrete group とする. $\Lambda(\Gamma)$ の convex hull とは, $\Lambda(\Gamma)$ を境界を持つ \mathbb{B} 内の最小の双曲凸閉集合のことである. これを記号で $\text{ch}(\Lambda(\Gamma))$ と表す.

定義 1.18. Γ が discrete のとき, Γ が convex co-compact であるとは, 商空間 $\text{ch}(\Lambda(\Gamma))/\Gamma$ が compact となるときをいう.

1.3 ハウスドルフ次元

次の 1.3 節、1.4 節では以後必要となる事柄の準備として, discrete group とは別の一般的な理論について述べる. ここでは, 一般のボレル集合のハウスドルフ次元を紹介する. 本論文の目的は, 「convex co-compact な discrete group について, その conical limit set のハウスドルフ次元は収束指数に一致する」ことを示すことであり, 重要な概念である.

定義 1.19. E を \mathbb{R}^n のボレル集合, α を正の数とする. 正の数 ϵ について,

$$\mathcal{H}_\epsilon^\alpha(E) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} c_j^\alpha \mid E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, c_j), x_j \in \mathbb{R}^n, 0 \leq c_j \leq \epsilon \right\}.$$

$$\mathcal{H}^\alpha(E) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\epsilon^\alpha(E).$$

とし, \mathcal{H}^α を \mathbb{R}^n 上の α 次元ハウスドルフ測度という. また, E のハウスドルフ次元とは,

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) := \sup\{\alpha \mid \mathcal{H}^\alpha(E) = \infty\} = \inf\{\alpha \mid \mathcal{H}^\alpha(E) = 0\}$$

のことをいう. つまり, ハウスドルフ次元とはハウスドルフ測度によって面積を定めるこ

とができる次元のことである.

このことを直感的にわかりやすい \mathbb{R}^2 の部分集合の場合で説明する.

$E \subset \mathbb{R}^2$ の α 次元ハウスドルフ測度の値は, $\alpha = 0$ ならば, E を点の集合 (つまり 0 次元) と見なしたときの点の個数を表し, $\alpha = 1$ ならば, E を曲線の集合 (つまり 1 次元) と見なしたときの曲線の長さを表し, $\alpha = 2$ ならば, E を平面の集合 (つまり 2 次元) と見なしたときの平面の面積を表す. $0 < \alpha < 1$ ならば, E を点と曲線の間のような複雑な図形 (つまり α 次元) と見なしたときの図形の厚みを表し, $1 < \alpha < 2$ ならば, E を曲線と平面の間のような複雑な図形 (つまり α 次元) と見なしたときの図形の厚みを表したものと考えればよい.

1.4 測度論

ここでは, 第 3 章以降で必要となる測度論の定義, 定理を列挙する.

定理 1.20 (Helly の選出定理). K をコンパクト距離空間, $\{\mu_n\}$ を K 上非負値ボレル測度の列で, 任意の $X \subset K$ について $\sup \mu_n(X) < \infty$ を満たすものとする. このとき, $\{\mu_n\}$ のある部分列 $\{\mu_{n_k}\}$ が存在し, ある K 上非負値ボレル測度 μ に弱収束する. つまり次が成り立つ.

$$\int_K f(x) d\mu_{n_k}(x) \rightarrow \int_K f(x) d\mu(x) \quad (\forall f \in C^0(K)).$$

証明については, [ON] 参照.

定義 1.21. 測度空間 (X, B, μ) が σ -有限 であるとは,

1. $\mu(X_n) < \infty$,
2. $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$

なる列 $\{X_n\}$ が存在するときをいう.

定義 1.22. μ, ν を可測空間 (X, B) 上の σ -有限な測度とする. $\mu(E) = 0$ ならば $\nu(E) = 0$ が成り立つとき ν は μ に関して 絶対連続 (absolutely continuous) であるという.

定理 1.23 (ラドン・ニコディムの定理). ν が μ に関して絶対連続である必要十分条件は, ν が積分形 $\int_E f d\mu$ (f は非負ボレル可測関数) で表されることである. さらにこの f は μ

測度 0 を除いて一意に定まる.

この f を ν の μ に関するラドン・ニコディム導関数といい, $\frac{d\nu}{d\mu}$ で表す.

定理 1.24. 測度空間 (X, B, μ) において E をボレル集合とする. このとき, 次の性質を満たす開集合 O が存在する.

$$E \subset O \text{ かつ任意の } \varepsilon > 0 \text{ について } \mu(O \setminus E) < \varepsilon \text{ が成り立つ.}$$

詳しい解説については, [Si] を参照せよ.

2 収束指数と空間の次元

2.1 収束指数とその別表現

ここでは、 \mathbb{B} を保ち、向きを保つメビウス変換群 $M(\mathbb{B})$ の discrete subgroup Γ の収束指数 $\delta(\Gamma)$ の定義とその別表現について述べる。

Γ を特徴付ける一つの指標として \mathbb{B} の元 y についての軌道 $\Gamma(y)$ の S への近づき方を考える。つまり、次の級数の収束、発散を考える。

定義 2.1. $x, y \in \mathbb{B}$, $\alpha \geq 0$ とする。このとき、次の関数を **ポアンカレ級数 (Poincaré series)** と呼ぶ。

$$g_\alpha(\Gamma : x, y) := \sum_{\gamma \in \Gamma} \exp(-\alpha \rho(x, \gamma(y))). \quad (1)$$

特にこの級数の収束・発散は x, y の依らず、 Γ と α にのみ依っていることがわかる。また、 α が大きいほど級数は収束しやすく、小さいほど発散しやすいこともわかる。

定義 2.2. Γ の収束指数 (**critical exponent**) $\delta(\Gamma)$ とは

$$\delta(\Gamma) := \inf \left\{ \alpha \mid g_\alpha(\Gamma : x, y) < \infty \right\}$$

のことをいう。 $\alpha = \delta(\Gamma)$ のときに $g_\alpha(\Gamma : x, y)$ が発散する Γ を **発散型 (divergence type)**、収束する Γ を **収束型 (convergence type)** と呼ぶ。

先のことから、収束指数も x, y には依らず、 Γ と α にのみ依っていることに注意する。したがって、 $x = 0, y = 0$ として考えればよい。次に不等式を使って $x = 0, y = 0$ のポアンカレ級数の別表現ができることを述べる。三角不等式と命題 1.2 より

$$\exp(-\alpha \rho(0, \gamma(0))) \leq (1 - |\gamma(0)|)^\alpha \leq 2^\alpha \exp(-\alpha \rho(0, \gamma(0)))$$

が成り立つことから、次の級数

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} (1 - |\gamma(0)|)^\alpha$$

は各 Γ, α に関してのみ収束・発散が定まり、同じ Γ, α に関してのポアンカレ級数の収束・発散と一致することがわかる。

収束指数は、次で定義する orbit counting function によって別表現することができる。

定義 2.3. Γ の orbit counting function $N(r, x, y)$ とは, 任意の \mathbb{B} の点 x, y と正の数 r について

$$N(r, x, y) := \#\{\gamma \in \Gamma \mid \rho(x, \gamma(y)) < r\}$$

のことをいう.

この $N(r, x, y)$ は, 中心 x , 半径 r の球の中にある y の Γ -軌道の個数を数える関数である. orbit counting function を $x = 0, y = 0$ として用いると, ポアンカレ級数を積分で表現できる.

$$\begin{aligned} g_\alpha(\Gamma : 0, 0) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{\gamma \in \Gamma, \rho(0, \gamma(0)) < r} \exp(-\alpha \rho(0, \gamma(0))) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \exp(-\alpha t) dN(t, 0, 0). \quad (\because \text{スティルチェス積分}) \end{aligned}$$

この $N(r, x, y)$ を使って次の量を考える.

$$\delta'(\Gamma) := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log N(r, x, y).$$

実はこの量も x, y に依らず定まるので, 以後 $x = 0, y = 0$ として考える. ここで重要なことは, $\delta'(\Gamma)$ と収束指数 $\delta(\Gamma)$ が一致することである.

命題 2.4. $\delta(\Gamma) = \delta'(\Gamma)$ が成り立つ.

証明. $\delta := \delta(\Gamma), \delta' := \delta'(\Gamma)$ とする.

(1) $\delta \geq \delta'$ を示す. そのためには, $s > \delta' \Rightarrow g_s(\Gamma : 0, 0) < \infty$ を示せばよい. $s > \delta' + \epsilon$ となる $\epsilon > 0$ をとるとある r_0 が存在して $r \geq r_0$ ならば $\frac{1}{r} \log N(r, 0, 0) \leq \delta' + \epsilon \Leftrightarrow N(r, 0, 0) \leq \exp(r(\delta' + \epsilon))$ となる. したがってポアンカレ級数の部分和は,

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma, \rho(0, \gamma(0)) < r} \exp(-s \rho(0, \gamma(0))) &= \int_0^r \exp(-st) dN(t, 0, 0) \\ &= N(r, 0, 0) \exp(-sr) + s \int_0^r N(t, 0, 0) \exp(-st) dt \\ &\leq \exp(r(\delta' + \epsilon - s)) + s \int_0^r \exp(t(\delta' + \epsilon - s)) dt \end{aligned}$$

と計算できる. ここで第一項 $\rightarrow 0$, 第二項 $< \infty$ ($r \rightarrow \infty$) より題意は示された.

(2) $\delta \leq \delta'$ を示す. $s < \delta' \Rightarrow g_s(\Gamma : 0, 0) = \infty$ を (1) と同様に示すことができるので省略する. □

2.2 空間の次元との関係

ここでは、収束指数 $\delta(\Gamma)$ が空間の次元 n を使って評価できること、 $\alpha = n - 1$ の場合のポアンカレ級数の収束・発散について述べる。その準備として次の定理を示す。

定理 2.5. 任意の $x, y \in \mathbb{B}, r > 0$ について y, Γ に依存する定数 A が存在し、 $N(r, x, y) < A \exp(r(n - 1))$ が成り立つ。

証明. $x = 0$ として考える。【step1】まず、 $V(\Delta(0, s))$ ($s > 0$) を評価する。

$$\rho(0, x) = \log \frac{1 + |x|}{1 - |x|} \Leftrightarrow |x| = \tanh \frac{\rho(0, x)}{2}$$

より、

$$\begin{aligned} V(\Delta(0, s)) &= \int_{\Delta(0, s)} dV \\ &= \int_0^{\tanh \frac{s}{2}} \frac{2^n r^{n-1}}{(1 - r^n)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} \\ &= W \int_0^s \left(\frac{2 \tanh \frac{t}{2}}{1 - \tanh^2 \frac{t}{2}} \right)^{n-1} dt \quad \left(W := \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} \text{は定数} \right) \\ &= W \int_0^s \sinh^{n-1} t dt \quad \left(\because \frac{2 \tanh \frac{t}{2}}{1 - \tanh^2 \frac{t}{2}} = \sinh t \right). \end{aligned}$$

【step2】次に $N(r, x, y)$ を評価する。 $\Delta := \Delta(y, \epsilon)$ ($\epsilon > 0$) とする。 ϵ を十分小さくして、 $\gamma, \tilde{\gamma} \in \Gamma$ ($\gamma \neq \tilde{\gamma}$) $\Rightarrow \gamma(\Delta) \cap \tilde{\gamma}(\Delta) = \emptyset$ とできる。(これより ϵ は、 Γ, y に依存していることに注意する。) このとき V は Γ 不変なので、 $\Delta(0, r + \epsilon)$ の体積は Δ の $N(r, 0, y)$ 個の互いに交わらない軌道の体積の和で下から押さえられる。【step1】より

$$\begin{aligned} V(\Delta) \times N(r, 0, y) &< V(\Delta(0, r + \epsilon)) \\ &= W \int_0^{r+\epsilon} \sinh^{n-1} t dt \\ &\leq W \int_0^{r+\epsilon} \left(\frac{e^t}{2} \right)^{n-1} dt \\ &\leq W \frac{e^{\epsilon(n-1)}}{2^{n-1}(n-1)} e^{r(n-1)} \\ \Leftrightarrow N(r, 0, y) &< \frac{W e^{\epsilon(n-1)}}{2^{n-1}(n-1) V(\Delta)} e^{r(n-1)} \end{aligned}$$

となり y, Γ に依存する定数 A を得る. □

定理 2.6. $\delta(\Gamma) \leq n - 1$ が成り立つ.

証明. 命題 2.4 より $\delta'(\Gamma)$ について考える. $\delta'(\Gamma)$ の定義式に定理 2.5 を代入すると,

$$\begin{aligned} \delta'(\Gamma) &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log N(r, x, y) \\ &\leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \{\log A \exp(r(n-1))\} \\ &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\log A}{r} + n - 1 \right\} \\ &= n - 1 \end{aligned}$$

したがって, $\delta(\Gamma) \leq n - 1$ が成り立つ. □

次に, ポアンカレ級数の指数 α と収束・発散の関係について述べる. 特に, $\alpha = n - 1$ のときを考えると,

定理 2.7. Γ が second kind のとき, ポアンカレ級数は $s = n - 1$ で収束する.

この証明には次の 2 つの公式を用いる.

公式 2.8. $\gamma \in M(\mathbb{B})$, $\xi \in S$ のとき,

$$|(\gamma^{-1})'(\xi)| = \frac{1 - |\gamma(0)|^2}{|\xi - \gamma(0)|^2}.$$

公式 2.9. $\gamma \in M(\mathbb{B})$ のとき, $|\gamma^{-1}(0)| = |\gamma(0)|$.

定理 2.7 の証明. $\Lambda(\Gamma)$ が S 上閉集合であるから, ある $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ が存在し, $C := S \cap B(x, r)$ s.t. $\Lambda(\Gamma) \cap C = \emptyset$ となるものが存在することに注意する. C の取り方から $\gamma(C)$ ($\gamma \in \Gamma$) は C と有限個しか交わらないので

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \omega(\gamma(C)) \leq \omega(S) + \text{交わった部分の面積} < \infty$$

である. また,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \omega(\gamma(C)) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_C |\gamma'(\xi)|^{n-1} d\omega(\xi)$$

より,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \int_C |\gamma'(\xi)|^{n-1} d\omega(\xi) < \infty. \quad (2)$$

ここで2つの公式より

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_C \left(\frac{1 - |\gamma^{-1}(0)|^2}{|\xi - \gamma^{-1}(0)|^2} \right)^{n-1} d\omega(\xi) < \infty \\ &\Leftrightarrow \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_C \left(\frac{1 - |\gamma(0)|^2}{|\xi - \gamma^{-1}(0)|^2} \right)^{n-1} d\omega(\xi) < \infty \end{aligned} \quad (3)$$

ここで, $|\xi - \gamma^{-1}(0)| < 2$ より,

$$\begin{aligned} (3) &\Rightarrow \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_C (1 - |\gamma(0)|^2)^{n-1} d\omega(\xi) < \infty \\ &\Leftrightarrow \sum_{\gamma \in \Gamma} (1 - |\gamma(0)|^2)^{n-1} \int_C d\omega(\xi) < \infty. \end{aligned}$$

よって, ポアンカレ級数は収束する.

□

3 α 次元 Γ -不変等角測度

limit set $\Lambda(\Gamma)$ の大きさを測る α 次元 Γ -不変等角測度を導入し, またその具体的な測度として Patterson-Sullivan 測度の構成を目的とする.

3.1 α 次元 Γ -不変等角測度の定義

定義 3.1. S 上の有限 Borel 測度の族 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ について, 次の条件を満たすとき, α 次元 Γ -不変等角測度 (共形測度) と呼ぶ.

1. limit set 上に台を持つ.
2. $x, x' \in \mathbb{B}$ について σ_x と $\sigma_{x'}$ は互いに絶対連続で, ラドン・ニコディム導関数は $\frac{d\sigma_x}{d\sigma_{x'}}(\xi) = \left(\frac{P(x, \xi)}{P(x', \xi)} \right)^\alpha$ となる.
3. $\gamma^* \sigma_x = \sigma_{\gamma^{-1}(x)}$ が成り立つ.

ただし $P(x, \xi)$ は $P(x, \xi) = (1 - |x|^2)|x - \xi|^{-2}$ で定義されるポアソン核である.

x は言わば観測地点であり, 観測地点を変えるとき, 測度は 2. の比率で変化するということである.

ここで, 観測地点を変えとはどのようなことをもう少し考える. 次の S 上の距離を考える.

定義 3.2. 任意の点 $\xi, \eta \in S$ について大円距離 d_0 とは, 次で定義される距離関数である.

$$d_0(\xi, \eta) := |\arccos \xi \cdot \eta|.$$

ここで $\xi \cdot \eta$ は標準内積を表す. さらに, 任意の $x \in \mathbb{B}$ について $\gamma \in M(\mathbb{B})$ s.t. $\gamma(x) = 0$ を取り,

$$d_x(\xi, \eta) := d_0(\gamma(\xi), \gamma(\eta))$$

と定める.

d_0 は 0 と ξ を結ぶ測地線と 0 と η を結ぶ測地線のなす角を表している. すなわち, 観測地点 0 から見た角度である. そして d_x は観測地点 x から見た角度である. 次に x と x' の 2 つの観測地点から見た角度の比を考えると,

$$\frac{d_x(\xi, \eta)}{d_{x'}(\xi, \eta)} \rightarrow \frac{P(x, \xi)}{P(x', \xi)} \quad (\eta \rightarrow \xi)$$

が成り立つので、これは、 d_x と $d_{x'}$ の比が局所的には $\frac{P(x, \xi)}{P(x', \xi)}$ に等しいことを示している。すなわち、

$$\frac{d\sigma_x}{d\sigma_{x'}}(\xi) = \left(\lim_{\eta \rightarrow \xi} \frac{d_x(\xi, \eta)}{d_{x'}(\xi, \eta)} \right)^\alpha$$

が成り立つので、 σ_x は “ α -次元” の集合を測る測度としてふさわしいものであることが理解できる。

これからは、 α 次元 Γ -不変等角測度の存在と一意性について考える。

3.2 Patterson-Sullivan 測度

$\alpha = \delta(\Gamma)$ のとき、 $\delta(\Gamma)$ 次元 Γ -不変等角測度は存在する。実際、Patterson-Sullivan 測度と呼ばれる $\delta(\Gamma)$ 次元 Γ -不変等角測度を具体的に構成することができる。構成にあたっては、まず Γ を発散型と仮定するが、収束型の Γ についても修正を加えることにより同様に構成することができる。

Γ を発散型とし、 $x \in \mathbb{B}$, $s > \delta$ とする。 E は $\overline{\mathbb{B}}$ 上のボレル集合について、 $\overline{\mathbb{B}}$ 上の測度 $\mu_{x,s}$ を、

$$\mu_{x,s}(E) := \frac{1}{g_s(\Gamma : 0, 0)} \sum_{\gamma \in \Gamma} \exp(-s \rho(x, \gamma(0))) 1_E(\gamma(0))$$

で定義する。

Helly の選出定理より、 $\delta(\Gamma)$ に収束する単調減少列 $\{s_n\}$ を、 μ_{x,s_n} が $n \rightarrow \infty$ によって弱収束する列として取ることができる。

定義 3.3. このとき弱収束する測度を μ_x と書き、Patterson-Sullivan 測度 と呼ぶ。

注意 3.4. Γ を発散型を仮定しているので、 μ_x は S 上の limit set に台を持つ測度となる。一方、 Γ が収束型の場合は、分母が発散しないため修正が必要である。修正方法については本論ではないので概略を述べるにとどめる。次の性質を満たす関数 $h(\exp(\rho(x, \gamma(0))))$ を取り、 $\mu_{x,s}(E)$ を修正する。

1. $\sum_{\gamma \in \Gamma} \exp(-s \rho(x, \gamma(0))) h(\exp(\rho(x, \gamma(0))))$ が $s > \delta(\Gamma)$ のときは収束し、 $s \leq \delta(\Gamma)$ のときは発散する。
2. $\epsilon > 0$ を取ると、ある r_0 が存在して、 $r > r_0$, $t > 1$ ならば $h(rt) \leq t^\epsilon h(r)$ となる。この帰結として、 $h(\exp(r+t))/h(\exp(r)) \rightarrow 1$ ($r \rightarrow \infty$) を得る。

$$g_s^*(\Gamma : x, y) := \sum_{\gamma \in \Gamma} \exp(-s \rho(x, \gamma(y))) h(\exp(\rho(x, \gamma(y))))$$

として,

$$\mu_{x,s}(E) := \frac{1}{g_s^*(\Gamma : 0, 0)} \sum_{\gamma \in \Gamma} \exp(-s \rho(x, \gamma(0))) h(\exp(\rho(x, \gamma(0)))) 1_E(\gamma(0))$$

とすると, これが修正された Patterson-Sullivan 測度である. これ以降 $\mu_{x,s}(E)$ は上のよ
うに表し, 発散型のときは $h \equiv 1$ と考える.

注意 3.5. もう一つの注意として, 定義 3.3 の部分列 $\{s_n\}$ を別の部分列を取ると別の測
度に収束することもある. 実は, ほとんどの場合ただ一つに収束するが, 定義 3.3 の定義で
は, 得られる測度すべてを Patterson-Sullivan 測度と呼び, その集合を M_x と表す.

定理 3.6. Γ を discrete group とする. このとき, Patterson-Sullivan 測度は $\delta(\Gamma)$ 次元 Γ -
不変等角測度となる.

3.3 α 次元 Γ -不変等角測度の一意性

任意の α 次元 Γ -不変等角測度が定数倍を除いて一意に表すことができることの必要
十分条件を紹介し, それに関連したことを述べる.

定義 3.7. Γ が α 次元 Γ -不変等角測度 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ に関してエルゴード性を満たすとは, 任
意の Γ -不変なボレル集合 $E \subset S$ に対し, $\mu_x(E) = 0$ または $\mu_x(S \setminus E) = 0$ が成り立つと
きをいう.

実は, このエルゴード性と α 次元 Γ -不変等角測度の一意性が同値なのである.

定理 3.8. 任意の α 次元 Γ -不変等角測度が定数倍を除いて $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ と一致することの必
要十分条件は, Γ が α 次元 Γ -不変等角測度 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ に関してエルゴード性を満たすこと
である.

それでは, どのような場合で定数倍を除き一意に表すことができるかを考察する. 次
の定理がその考察にとっても重要な役割を果たす.

定理 3.9. $E \subset \Lambda_c(\Gamma)$ が Γ -不変であるとする. このとき α 次元 Γ -不変等角測度 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$
について, $\sigma_x(E) = 0$ または $\sigma_x(S \setminus E) = 0$ が成り立つ.

したがって, $\delta(\Gamma)$ 次元 Γ -不変等角測度 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ について $\sigma_x(\Lambda_c(\Gamma)) > 0$ を仮定すれば, 定理 3.9 より $\sigma_x(\Lambda_c(\Gamma)) = \sigma_x(S)$ となり, 任意の Γ -不変な $E \subset S$ について, $\sigma_x(E) = 0$ または $\sigma_x(S \setminus E) = 0$ が分かる. つまり, $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ に関してエルゴード性が得られ, 任意の $\delta(\Gamma)$ 次元 Γ -不変等角測度が Patterson-Sullivan 測度の定数倍により書けることが分かる. さらに知られている事実として次の定理がある.

定理 3.10. Γ を convex co-compact, $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ を α 次元 Γ -不変等角測度とすると, $\sigma_x(\Lambda_c(\Gamma)) = \sigma_x(S)$ となる.

この定理より α 次元 Γ -不変等角測度の一意性の十分条件を得る.

定理 3.11. Γ を convex co-compact とすると, $\delta(\Gamma)$ 次元 Γ -不変等角測度は定数倍を除いて Patterson-Sullivan 測度と一致する.

4 shadow lemma の証明とハウスドルフ次元と収束指数の関係

この章では、この修士論文の目標である次の定理を示す。

定理 4.1. convex co-compact な discrete group Γ について、その conical limit set のハウスドルフ次元は収束指数に一致する。つまり、 $\dim_{\mathcal{H}}(\Lambda_c(\Gamma)) = \delta(\Gamma)$ が成り立つ。

目標を証明するために、2つの不等式 $\dim_{\mathcal{H}}(\Lambda_c(\Gamma)) \leq \delta(\Gamma)$ と $\dim_{\mathcal{H}}(\Lambda_c(\Gamma)) \geq \delta(\Gamma)$ を示す。それぞれ系 4.7, 系 4.11 に当たり、この章で示す定理の関係は次のようになる。

$$\begin{array}{ccccc} \text{定理 4.2 (shadow lemma)} & \Rightarrow & \text{定理 4.6} & \Rightarrow & \text{系 4.7} \\ \downarrow & & & & \\ \text{定理 4.8} & \Rightarrow & \text{定理 4.10} & \Rightarrow & \text{系 4.11} \end{array}$$

上の定理の関係にもわかるとおり、定理 4.2 (shadow lemma) が最も重要な定理である。また、系 4.7 は convex co-compact を仮定しないで証明できるが、定理 4.8 は convex co-compact を仮定して証明するため、目標の定理にある「convex co-compact」という条件は、定理 4.8 に由来している。

4.1 shadow lemma とその証明

ここでは、 α 次元 Γ -不変等角測度とハウスドルフ測度との関係を表した shadow lemma を述べる。

定理 4.2 (shadow lemma). Γ を discrete group とし、 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ を α 次元 Γ -不変等角測度とする。ただし、 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ はシングルアトムではないとする。このとき、ある定数 $a, A > 0$ が存在して、十分大きい数 c と有限個を除く任意の元 $\gamma \in \Gamma$ に対して、

$$a < \frac{\sigma_x(b(x : \gamma(x), c))}{r(x : \gamma(x), c)^\alpha} < A$$

が成り立つ。ここで、 $r(x : a, \delta)$ は $b(x : a, \delta)$ の大円距離での半径を表す。

注意 4.3. $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ のアトムとは、次の条件を満たす点 $\xi \in S$ のことをいう。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_x(B(\xi, \varepsilon) \cap S) > 0.$$

直感的には、 $\sigma_x(\xi) > 0$ なる点である。 $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ がシングルアトムでないとは、アトムがあれば少なくとも2点以上存在するときをいう。Patterson-Sullivan 測度はシングルアトム

ではないことが知られているので, 定理 4.2 の条件は本質的な条件ではないことに注意しておく.

定理 4.2 を示すために補題を 2 つ用意する.

補題 4.4. $b(y : x, c)$ について

$$\tan r(y : x, c) = \frac{\tanh c(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}{2|y||x - y||x - y^*|}$$

が成り立つ,

補題 4.5. 十分大きな c について, ある正の定数 D が存在し, shadow の任意の点 $\xi \in b(0 : \gamma^{-1}(0), c)$ に対して,

$$\frac{D}{1 - |\gamma^{-1}(0)|} < P(\gamma^{-1}(0), \xi) < \frac{2}{1 - |\gamma^{-1}(0)|}$$

が成り立つ.

定理 4.2 の証明. x を変えても定義 3.1 の 2. より比が変化するだけなので, $x = 0$ として考える.

limit set 上の点の中で σ_0 最大の mass を持つ点を η とする.

$$\lambda := \frac{\sigma_0(S) + \sigma_0(\eta)}{2}$$

とすると, σ_0 の台が 1 点ではないので, $\lambda > \sigma_0(\eta)$ が成り立つ. 境界 S 上の半径が ε_0 以下のすべての ball の σ_0 測度が λ で抑えられるような正の数 ε_0 がとれる. つまり, 任意の $\xi \in S$ について, ある ε_0 が存在して $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ならば, $\sigma_0(B(\xi, \varepsilon) \cap S) \leq \lambda$ となる. (もしどんな ε についても $\sigma_0(B(\xi, \varepsilon) \cap S) > \lambda$ ならば, $\varepsilon \rightarrow 0$ として $\sigma_0(\xi) \geq \lambda$ となり, λ の取り方に矛盾する.)

今, 十分大きな数 c をとり, $\rho(\gamma(0), 0) > c$ を満たす $\gamma \in \Gamma$ に対して, $S - b(\gamma(0) : 0, c)$ を半径 ε_0 以下の ball で覆うことができる. 先の議論から

$$\begin{aligned} \sigma_0(S - b(\gamma(0) : 0, c)) &\leq \lambda \\ \Leftrightarrow 0 < \sigma_0(S) - \lambda &\leq \sigma_0(b(\gamma(0) : 0, c)) \end{aligned}$$

が成り立つ. つまり, $\sigma_0(b(\gamma(0) : 0, c))$ が下から押さえられることがわかる. $\sigma_0(b(\gamma(0) :$

$0, c) \leq \sigma_0(S)$ より, 上からも押さえられる . また,

$$\begin{aligned}
\sigma_0(b(\gamma(0) : 0, c)) &= \sigma_0(\gamma(b(0 : \gamma^{-1}(0), c))) \quad (\because \gamma \text{ の性質}) \\
&= \gamma^* \sigma_0((b(0 : \gamma^{-1}(0), c))) \\
&= \sigma_{\gamma^{-1}(0)}((b(0 : \gamma^{-1}(0), c))) \quad (\because \text{等角測度の定義 3}) \\
&= \int_{b(0, \gamma^{-1}(0), c)} \left(\frac{d\sigma_{\gamma^{-1}(0)}}{d\sigma_0} \right)^\alpha (\xi) d\sigma_0(\xi) \quad (\because \text{等角測度の定義 2}) \\
&= \int_{b(0, \gamma^{-1}(0), c)} P(\gamma^{-1}(0), \xi)^\alpha d\sigma_0(\xi) \quad (\because P(0, \xi) = 1)
\end{aligned}$$

である. 補題 4.5 を使うと,

$$\begin{aligned}
&\int_{b(0, \gamma^{-1}(0), c)} \left(\frac{D}{1 - |\gamma^{-1}(0)|} \right)^\alpha d\sigma_0(\xi) < \int_{b(0, \gamma^{-1}(0), c)} P(\gamma^{-1}(0), \xi)^\alpha d\sigma_0(\xi) \\
&< \int_{b(0, \gamma^{-1}(0), c)} \left(\frac{2}{1 - |\gamma^{-1}(0)|} \right)^\alpha d\sigma_0(\xi) \\
&\Leftrightarrow D^\alpha \frac{\sigma_0(b(0 : \gamma^{-1}(0), c))}{(1 - |\gamma^{-1}(0)|)^\alpha} < \sigma_0(b(\gamma(0) : 0, c)) < 2^\alpha \frac{\sigma_0(b(0 : \gamma^{-1}(0), c))}{(1 - |\gamma^{-1}(0)|)^\alpha} \\
&\Leftrightarrow \frac{\sigma_0(b(\gamma(0) : 0, c))}{2^\alpha} < \frac{\sigma_0(b(0 : \gamma^{-1}(0), c))}{(1 - |\gamma^{-1}(0)|)^\alpha} < \frac{\sigma_0(b(\gamma(0) : 0, c))}{D^\alpha}
\end{aligned}$$

が得られ, $0 < \sigma_0(S) - \lambda \leq \sigma_0(b(\gamma(0) : 0, c)) \leq \sigma_0(S)$ と上下から定数で押さえられたので,

$$a' < \frac{\sigma_0(b(0 : \gamma^{-1}(0), c))}{(1 - |\gamma^{-1}(0)|)^\alpha} < A'$$

とできる. さらに補題 4.4 より,

$$\tan r(0 : \gamma^{-1}(0), c) = \frac{\tanh c}{2|\gamma^{-1}(0)|} (1 - |\gamma^{-1}(0)|^2)$$

から c をさらに十分大きくして $|\gamma^{-1}(0)|$ を十分に 1 に近づけると $r(0 : \gamma^{-1}(0), c)$ が十分小さくなるので $\tan x \approx x$ より,

$$(1 - |\gamma^{-1}(0)|^2) \approx r(0 : \gamma^{-1}(0), c)$$

となり,

$$a < \frac{\sigma_0(b(0 : \gamma^{-1}(0), c))}{r(0 : \gamma^{-1}(0), c)^\alpha} < A$$

を得る. c の十分大きい条件は 2 回現れたが, 条件を満たさない γ は有限個であることに注意する. 最後に γ^{-1} を γ に置き換えれば示される. \square

4.2 ハウスドルフ次元と収束指数の関係 (その1)

shadow lemma から, ハウスドルフ測度と等角測度の次の関係がわかる.

定理 4.6. Γ を discrete group とする. $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{B}}$ を α 次元 Γ -不変等角測度とする. E を $\Lambda_c(\Gamma)$ の任意のボレル部分集合とする. このとき, ある正の定数 a が存在して, $\mathcal{H}^\alpha(E) \leq a \cdot \sigma_x(E)$ となる.

証明. 【方針】ハウスドルフ測度の定義に注意して E を被覆する球の族 $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ を構成し, 定理 4.2 (shadow lemma) を用いてハウスドルフ測度を評価していく.

$x = 0$ として考える. 定理 1.24 より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, E を含む開集合 O で $\sigma_0(O - E) < \varepsilon$ が成り立つものが存在する. 今後, O は固定して考え, ここで一つ記号を導入する.

$$\Phi_{\varepsilon'} := \{V = b(0 : \gamma(0)c) \mid \gamma \in \Gamma, c > 0 \text{ かつ十分大}, V \subset O, \text{daim}(V) < \varepsilon'\}.$$

とおくと, $E \subset O$ より $\Phi_{\varepsilon'}$ は E の被覆になる. 特に $\Phi_{\varepsilon'}$ の存在は, E が conical limit set の部分集合であることから命題 1.14 より明らかである. この $\Phi_{\varepsilon'}$ からうまく $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ を構成していく.

< $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ の構成 >

$\Phi_{\varepsilon'}$ の中から次のように帰納的に b_n を構成する.

1. まず, b_1 を $\Phi_{\varepsilon'}$ の中から適当にとる. $E \setminus b_1 = \emptyset$ ならば終わる. $E \setminus b_1 \neq \emptyset$ ならば, $O_1 := O \setminus b_1$, $\Phi_{\varepsilon'}^1 := \{V \in \Phi_{\varepsilon'} \mid V \subset O_1\}$ とする. $\lambda_1 := \sup\{\text{daim}(V) \mid V \in \Phi_{\varepsilon'}^1\}$ とおき, b_2 を $\Phi_{\varepsilon'}^1$ の中からその直径が $\lambda_1/2$ より大きくなるようにとる.
2. $b_1, b_2, \dots, b_n \in \Phi_{\varepsilon'}$ が互いに交わらないようにとれたとする. $O_n := O \setminus (\bigcup_{i=1}^n b_i)$, $\Phi_{\varepsilon'}^n := \{V \in \Phi_{\varepsilon'} \mid V \subset O_n\}$ とする. $E \setminus (\bigcup_{i=1}^n b_i) = \emptyset$ ならば, 終わる. $E \setminus (\bigcup_{i=1}^n b_i) \neq \emptyset$ ならば $\lambda_n := \sup\{\text{daim}(V) \mid V \in \Phi_{\varepsilon'}^n\}$ とし, b_{n+1} を $\Phi_{\varepsilon'}^n$ の中からその直径が $\lambda_n/2$ より大きくなるようにとる.

このように構成すると, 被覆 $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ は次の性質をもつ.

- (1) $b_1, b_2, \dots, b_n \dots$ は互いに交わらない.
- (2) $\sum_{i=1}^\infty \mathcal{H}_{\varepsilon'}^\alpha(b_i) \leq \mathcal{H}_{\varepsilon'}^\alpha(O) < \infty$.
- (3) $E \setminus (\bigcup_{i=1}^\infty b_i) \subset \bigcup_{i=N}^\infty 5b_i$. (N は自然数. $5b_i$ は b_i の半径を 5 倍にした球.)

特に (3) の条件は “ $\lambda_n/2$ より大きくなるようにとる” ことから得られる. よって, $\mathcal{H}_{\varepsilon'}^{\alpha}(E \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty} b_i)) \leq \sum_{i=N}^{\infty} 5^{\alpha} \mathcal{H}_{\varepsilon'}^{\alpha}(b_i)$ となり, N を無限大に飛ばすと右辺は 0 に収束するので, $\mathcal{H}_{\varepsilon'}^{\alpha}(E \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} b_n)) = 0$ がいえる.

b_n の半径を r_n とおく. 被覆 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を使い, E のハウスドルフ測度を評価していく.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\varepsilon'}^{\alpha}(E) &\leq \mathcal{H}_{\varepsilon'}^{\alpha}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\varepsilon'}^{\alpha}(b_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (r_n)^{\alpha} \leq a \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_0(b_n) \quad (\because \text{shadow lemma}) \\ &= a \sigma_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} b_n\right) \leq a \sigma_0(O) \leq a (\sigma_0(E) + \varepsilon) \end{aligned}$$

が成り立つ. ε と ε' を 0 に近づけると求めたい式を得る. □

この系として目標の不等式の一方が言える.

系 4.7. 任意の discrete group Γ に対して, $\dim_{\mathcal{H}}(\Lambda_c(\Gamma)) \leq \delta(\Gamma)$ が成り立つ.

証明. 定理 3.6 より $\delta(\Gamma)$ 次元 Γ -不変等角測度の存在する. 定理 4.6 で $\alpha = \delta(\Gamma)$, $E = \Lambda_c(\Gamma)$ として

$$\mathcal{H}^{\delta(\Gamma)}(\Lambda_c(\Gamma)) \leq a \cdot \mu_x(\Lambda_c(\Gamma)) < a \cdot \mu_x(S) < \infty$$

より $\dim_{\mathcal{H}}(\Lambda_c(\Gamma)) \leq \delta(\Gamma)$ を得る. □

ここまでで, 目標の一方の不等式を示したことになる. 続いて他方の証明に入る.

4.3 shadow lemma の応用

この節では, 目標の他方の不等式を示すための準備を行う. まず第 3 章の最後に述べたことから, convex co-compact を仮定すると $\delta(\Gamma)$ 次元 Γ -不変等角測度は定数倍を除いて Patterson-Sullivan 測度に一致することが分かり, Patterson-Sullivan 測度のみを考えれば良いことがわかる. この注意をした上で, 次の定理を示す.

定理 4.8. Γ を convex co-compact な discrete group とする. このとき, 定数 $a, A, r_0 > 0$ が存在し, 任意の $\xi \in \Lambda(\Gamma)$ と $0 < r < r_0$ なる任意の r に対し,

$$a < \frac{\mu_x[B(\xi, r) \cap S]}{r^{\delta(\Gamma)}} < A$$

とできる.

この定理を証明するために次の補題を用意する.

補題 4.9. $d > 0, c > d$ とする. このときある正の定数 a_1, a_2, λ が存在して, もし $x, y \in \mathbb{B}$ で $\rho(x, y) < d$, $\min\{\rho(x, 0), \rho(y, 0)\} \geq \lambda$ ならば

$$\frac{r(0 : y, c + d)}{r(0 : x, c)} < a_1 \quad \text{かつ} \quad \frac{r(0 : y, c - d)}{r(0 : x, c)} > a_2$$

とできる.

定理 4.8 の証明. 【方針】 convex hull を用いて $B(\xi, r) \cap S$ に包含関係のある 2 つの球を作り, その測度を補題 4.9 等を用いて評価する.

$x = 0$ として考える. $\Lambda(\Gamma)$ の convex hull $\text{ch}(\Lambda(\Gamma))$ を考える. このとき, $0 \in \text{ch}(\Lambda(\Gamma))$ として良い. もし, $0 \notin \text{ch}(\Lambda(\Gamma))$ ならば, $\text{ch}(\Lambda(\Gamma))$ の代わりにその近傍 $\text{ch}_\tau(\Lambda(\Gamma)) := \{x \in \mathbb{B} \mid \rho(x, \text{ch}(\Lambda(\Gamma))) < \tau\}$ を考え, $0 \in \text{ch}_\tau(\Lambda(\Gamma))$ となるように τ を定めればよい. (これは $\text{ch}(\Lambda(\Gamma))$ に厚みを付けたものであり, 双曲距離が Γ -不変であるから $\text{ch}_\tau(\Lambda(\Gamma))$ も Γ -不変である.) Γ は convex co-compact であるから, $\text{ch}(\Lambda(\Gamma))$ についての 0 を含む compact な fundamental region D を取ることができる. (特に $\text{ch}_\tau(\Lambda(\Gamma))$ は少し厚みを増したのだけなので取ることができることに注意する.) これに対し, $d := \text{diam}_\rho D$ とおき, $c - d$ が shadow lemma の仮定をみたすように十分大きな $c > 0$ を取る. (もちろん, $c + d$ も shadow lemma の仮定を満たす.) 以後 c を固定して考える. 今, 任意に $\xi \in \Lambda(\Gamma)$ を取り, 0 から ξ に伸びる測地線を σ と書くと, $\sigma \subset \text{ch}(\Lambda(\Gamma))$ である. そして, ある十分小さな $r_0 > 0$ を取り $0 < r < r_0$ について $B(\xi, r) \cap S = b(0 : k\xi, c)$ を満たす $0 < k < 1$ を取り, $k\xi \in \sigma$ を考える. このとき, D の作り方から, $k\xi \in \gamma(D)$, $\rho(\gamma(0), k\xi) \leq d$ をみたす $\gamma \in \Gamma$ が取れる. この γ について,

$$\Delta(\gamma(0), c - d) \subset \Delta(k\xi, c) \subset \Delta(\gamma(0), c + d)$$

が成り立つ. ゆえに, これらを 0 から射影した shadow を考えると,

$$b(0 : \gamma(0), c - d) \subset b(0 : k\xi, c) \subset b(0 : \gamma(0), c + d)$$

が成り立ち, これらを測度 μ_0 で測ると,

$$\mu_0[b(0 : \gamma(0), c - d)] \leq \mu_0[B(\xi, r) \cap S] \leq \mu_0[b(0 : \gamma(0), c + d)]$$

が成り立つ. ここで r を十分小さく取れば, k や ξ に依らない定数 $\varepsilon > 0$ で

$$1 - \varepsilon < \frac{r}{r(0 : k\xi, c)} < 1 + \varepsilon$$

とできることに注意して, 主張の不等式を示す.

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0[B(\xi, r) \cap S]}{r^{\delta(\Gamma)}} &\leq \frac{\mu_0[b(0 : \gamma(0), c + d)]}{r^{\delta(\Gamma)}} \\ &= \frac{\mu_0[b(0 : \gamma(0), c + d)]}{(r(0 : \gamma(0), c + d))^{\delta(\Gamma)}} \left[\frac{r(0 : \gamma(0), c + d)}{r(0 : k\xi, c)} \right]^{\delta(\Gamma)} \frac{(r(0 : k\xi, c))^{\delta(\Gamma)}}{r^{\delta(\Gamma)}} \end{aligned}$$

と変形すると, shadow lemma と補題 4.9 より

$$\frac{\mu_0[b(0 : \gamma(0), c + d)]}{(r(0 : \gamma(0), c + d))^{\delta(\Gamma)}} < A \quad \text{かつ} \quad \frac{r(0 : \gamma(0), c + d)}{r(0 : k\xi, c)} < a_1 \quad (A, a_1 \text{は定数})$$

とできるので

$$\frac{\mu_0[B(\xi, r) \cap S]}{r^{\delta(\Gamma)}} < Aa_1^{\delta(\Gamma)} \frac{1}{(1 - \varepsilon)^{\delta(\Gamma)}}$$

となり定数で上から押さえられる. 下からも同様に

$$\frac{\mu_0[B(\xi, r) \cap S]}{r^{\delta(\Gamma)}} > aa_2^{\delta(\Gamma)} \frac{1}{(1 + \varepsilon)^{\delta(\Gamma)}}$$

押さえられ, 題意は示された. □

4.4 ハウスドルフ次元と収束指数の関係 (その2)

上の定理 4.8 を用いて次の定理を示すことができる. この定理は定理 4.6 の逆の不等号を示している.

定理 4.10. Γ を convex co-compact な discrete group とする. E を $\Lambda(\Gamma)$ の任意のボレル部分集合とする. このとき, ある正の定数 b が存在して $b \cdot \mu_x(E) \leq \mathcal{H}^{\delta(\Gamma)}(E)$ となる.

証明. 任意に Borel 集合 $E \subset \Lambda(\Gamma)$ と $0 < \varepsilon < r_0$ なる ε を取る. $r_i < \varepsilon, \xi_i \in \Lambda(\Gamma)$ なる E の被覆 $\{B(\xi_i, r_i) \cap S\}_{i=1}^{\infty}$ が存在する. したがって,

$$\mu_x(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_x[B(\xi_i, r_i) \cap S]$$

であり, 定理 4.8 より

$$\mu_x[B(\xi_i, r_i) \cap S] < Ar_i^{\delta(\Gamma)}.$$

したがって,

$$\mu_x(E) \leq A \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{\delta(\Gamma)}.$$

ゆえにハウスドルフ測度の定義より

$$\mu_x(E) \leq A \mathcal{H}_\varepsilon^{\delta(\Gamma)}(E).$$

ここで $\varepsilon \rightarrow 0$ として主張を得る. □

この系として目標の等式の他方が言える.

系 4.11. convex co-compact な discrete group Γ に対して, $\dim_{\mathcal{H}}(\Lambda_c(\Gamma)) \geq \delta(\Gamma)$ が成り立つ.

証明. convex co-compact より第 3 章の最後で述べた, $\Lambda(\Gamma) = \Lambda_c(\Gamma)$ が成り立つことに注意する. 定理 4.10 で $E = \Lambda_c(\Gamma)$ として適応すると $0 < b \cdot \mu_x(\Lambda_c(\Gamma)) \leq \mathcal{H}^{\delta(\Gamma)}(\Lambda_c(\Gamma))$ となりハウスドルフ次元の定義より, $\dim_{\mathcal{H}} \Lambda_c(\Gamma) \geq \delta(\Gamma)$ が成り立つ. □

以上, 系 4.7 と系 4.11 より目標の定理 4.1 を得る.

参考文献

- [Be] A.F.Beardon, *The geometry of discrete groups*, Springer Verlag, 1983.
- [BJ] C.Bishop and P.Jones, *Hausedorff dimension and Kleinian groups*, Acta Math., 179 (1997), 1–39.
- [Su] D.Sullivan, *Related aspects of positivity in Riemannian Geometry*, J. Diff. Geom., 25 (1987), 327–351.
- [KL] L.Keen and N.Lakic, *Hyperbolic Geometry from a Local Viewpoint*, London Mathematical Society Student Text 68, 2007.
- [Ni] P.J. Nicholls, *The Ergodic Theory of Discrete Groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series 143, 1989.
- [ON] 岡本久, 中村周, 関数解析, 岩波書店, 2006.
- [Si] 志賀浩二, 数学 30 講シリーズ 9 ルベーク積分 30 講, 朝倉書店, 1990.
- [M] 松崎克彦, クライン群の力学系—極限集合のハウスドルフ次元—, 数学, 第 51 巻 第 2 号, 1999, 142–160.