

# 平面集合の位相幾何と幾何学的函数論

柳原 宏

山口大学工学部

hiroshi@yamaguchi-u.ac.jp

# 目次

序	3
<b>第 1 章 2 次元の連結性</b>	<b>5</b>
1.1 Sperner の補題 . . . . .	5
1.2 2 次元の連結性, Poincaré-Miranda の定理と Brouwer の不動点定理 . . . . .	7
<b>第 2 章 長方形の格子</b>	<b>11</b>
2.1 cell と chain . . . . .	11
2.2 組み合わせ的境界 . . . . .	14
2.3 $k$ -chain の連結成分 . . . . .	15
2.4 $k$ -cycle . . . . .	16
2.5 相補的 2-chain と格子の細分 . . . . .	18
2.6 $k$ -boundary . . . . .	20
2.7 基本補題 –組み合わせ的な Jordan の曲線定理– . . . . .	22
<b>第 3 章 Alexander の補題と分離, 不分離定理</b>	<b>27</b>
3.1 Alexander の補題と Janiszewski の定理 . . . . .	27
3.2 不分離定理と分離定理 . . . . .	30
<b>第 4 章 領域の不変性と Jordan の曲線定理</b>	<b>36</b>
4.1 領域の不変性 . . . . .	36
4.2 Jordan の曲線定理 . . . . .	37
4.3 Jordan 曲線の回転数 . . . . .	38
4.4 Jordan 曲線の内と外 . . . . .	41
<b>第 5 章 PL-Schönflies の定理</b>	<b>45</b>
5.1 単純多角形に関する Jordan の定理 . . . . .	45
5.2 単純多角形に関する Schönflies の定理 . . . . .	48
5.3 単純多角形による単純曲線の近似 . . . . .	53

第 6 章	単連結領域	58
6.1	$\varepsilon$ -連結性 . . . . .	58
6.2	有界かつ正則な連結 2-chain の境界 . . . . .	62
6.3	Jordan 曲線による分離定理 . . . . .	67
6.4	単連結性の条件 . . . . .	69
第 7 章	Riemann の写像定理と Carathéodory の拡張定理	73
7.1	単連結領域における原始函数の存在 . . . . .	73
7.2	Riemann の写像定理 . . . . .	76
7.3	局所連結空間 . . . . .	78
7.4	等角写像の連続拡張 . . . . .	85
7.5	Carathéodory の拡張定理と Schönflies の定理 . . . . .	88
演習問題の解答		91
参考文献		93
索引		94

# 序

これは 2021 年 9 月 6–10 日の間に東北大学大学院情報科学研究科で行った集中講義の内容をまとめた冊子です。後から証明の gap に気づき修正した箇所が若干ありますが、ほぼ同じ内容で講義を行いました。このようなあまりに基礎的 (簡単という意味ではありません) なトピックを扱うときは、受講者の反応を伺いながら恐る恐る講義を進めるものです。ところがコロナ禍による緊急事態宣言の為にオンラインでの講義になってしまいました。一週間、ノートパソコンを前に受講者を顔を見ること無くひたすら喋るだけの講義をするのは、過去に某大学において 9 割位の学生が爆睡をする中で講義を行って以来の心が折れる体験でした。多分、講義を聞く方にとっては拷問に等しかったのでは無いでしょうか？ 心よりお詫び申し上げます。

確な志望も無いままに大学に入学し、たまたまつきあった友人達に数学志望者が多かった為に、自分も数学の勉強を始めましたが、いつの間にか定年まで残り数年になってしまいました。サボれる授業は徹底的にサボった大学時代ですが、微積分の初回の講義で教わった「教科書に書いてあることは鵜呑みにせず、本当かどうか徹底的に疑い、自分で証明を書き下せるもののみを信用せよ。」は出来るだけ守ろうとして来たつもりです。掘り所にしてよいのは実数の公理系と選択公理だけ、それ以外は人生の何処かの時点で自分で証明を付けるというノルマを自分に課すと、非才の身ではなかなか勉強に時間がかかります。例えば Jordan (ジョルダン) の曲線定理などは、筆者の専攻する複素解析では当たり前のように使う結果ですが、証明を一通り読むことが出来たのは 30 歳を過ぎてからです。そのときに読んだ本 (Newman [16]) には証明がキチンと書いてありましたが、その後に読んだ簡単な証明というのが売り物の論文には間違いがあり、その間違いが直されること無くそのまま色々な教科書に記載され、ある程度流布しているという恐ろしい状況を知りました。しかしながら琉球大の前原先生による証明 [10] を知った時は感動しました。Tietze の拡張定理を使う以外はほぼ elementary と言ってよく、2 ページくらいで Jordan の曲線定理の証明が終わってしまいます。この冊子で前原先生の証明を解説するかどうか非常に悩みましたが、汎用性を考えて別の方法を採用しました。

無駄話はこれくらいにしましょう。この冊子で扱う内容は全て 2 次元に限定しますが

- (1) Sperner の補題, Poincaré-Miranda の定理, Brouwer の不動点定理
- (2) 長方形の対辺を結ぶ長方形内の 2 曲線は交点を持つこと
- (3) 2 次元の組み合わせ的ホモロジーと Alexander の補題
- (4) Janiszewski (ヤニシェフスキー) の定理
- (5) Jordan の曲線定理と回転数
- (6) 単純多角形に関する Schönflies (シェーンフリース) の定理
- (7) Riemann 球面内の領域が単連結であるための必要十分条件は補集合が空または連結であること
- (8) Carathéodory の拡張定理
- (9) Schönflies の定理

です。複素解析の勉強を進める上で、「初学者は無理に証明を追い求めること無く、一旦成り立つことを認め、

先に進む方が賢明である。」と思われるトピックの大半を扱っているのではと思います。ただし手法としては最後の章を除き、複素解析は使っていません。一般の位相空間 (距離空間も含む) の理論を使い、そこに今となつては殆ど失われた知識と言うべき 2 次元の組み合わせ的理論を加え、証明を行います。

この本を読むのに必要な知識は位相空間論の初歩で、開集合、閉集合、境界、連結、道連結、距離などの概念を知っていれば十分です。ご意見、感想、間違いの指摘などは

hiroshi@yamaguchi-u.ac.jp

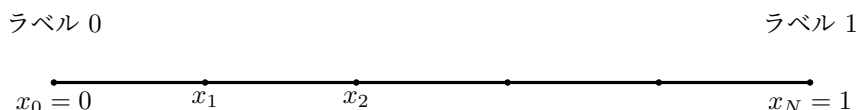
にお知らせ下さい。数学の本を読むのは骨が折れます。まともに読み通せた本など皆無に等しい筆者が言うのも何ですが、半分でも真剣に読みさえすれば、それなりに身につくものはあります。それでは拷問の始まりです。

# 第 1 章

## 2 次元の連結性

### 1.1 Sperner の補題

$N$  を自然数とする. 線分  $I = [0, 1]$  を  $N$  等分し, 分点を  $x_k = \frac{k}{N}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , 分割された小線分を  $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ ,  $k = 1, \dots, N$  と置く. また各分点には 0 または 1 のどちらかの数が対応しているとし, これをラベルと呼ぶ.



**Theorem 1.1.1** (1 次元 Sperner の補題). 区間  $[0, 1]$  の分割において  $x_0$  に 0,  $x_N$  には 1 がラベル付けされているとする. このとき小線分  $I_k$  の中に, 両端点の一方で 0, もう一方で 1 とラベル付けされているものが奇数個存在する. 特にこのような小線分は必ず存在する.

*Proof.* 2 階建ての家を考えよう. ラベル 0 には 1 階にいる状態, ラベル 1 は 2 階にいる状態が対応していると考え, 左端点が 0, 右端点が 1 の区間とは 1 階から 2 階へ上ることを意味し, 左端点が 1, 右端点が 0 の区間は 2 階から 1 階へ下ることを意味する.

出発点である  $x_0$  のラベルは 0 だから, はじめは 1 階にいる. 到着点である  $x_N$  のラベルは 1 だから, 最後は 2 階にいることになる. 従って少なくとも 1 回は上りの区間があり, それ以降は下りがあれば必ず次に上りがあり, 下り, 上りのペアが何回か (0 回もあり得る) になる. よって合計で奇数回の上り, 下りがある.  $\square$

今度は異なった視点から証明を試みてみよう.

別証. 各小線分について

両端点の一方に 0, もう一方に 1 がラベル付け  $\iff$  片方の端点のみに 0 がラベル付け

であるから

$h :=$  片方の端点のみに 0 がラベル付けされている小線分の個数,  
 $b :=$  両方の端点に 0 がラベル付けされている小線分の個数

と置いて  $h$  が奇数であることを示せばよい. ここで

$t :=$  0 がラベル付けされている分点の個数

と置いて以下のように考えよう. 小線分  $I_1, I_2, \dots, I_N$  のそれぞれについて 0 がラベル付けされている端点の個数 (勿論 0 か 1 か 2 である) の総和を  $S_1$  と置くと

$$(1.1.1) \quad S_1 = h + 2b$$

である. 今度は各分点  $x_0, x_1, \dots, x_N$  について 0 がラベル付けされているものが,  $S_1$  において何回カウントされたかを考えよう.

まず左端の  $x_0$  には 0 がラベル付けされているので,  $I_1$  について 1 回カウントされる. また右端の  $x_N$  には 1 がラベル付けされているからカウントされない. 次に区間  $[0, 1]$  の内部にある分点 ( $t-1$  個ある) で 0 がラベル付けされているものについては, この分点を介して隣り合う 2 つの小線分により計 2 回カウントされている. 従って

$$(1.1.2) \quad S_1 = 1 + 2(t-1)$$

である. よって (1.1.1) と (1.1.2) を合わせて

$$h = 2(t-b) - 1$$

となり  $h$  は奇数である. □

次に 2 次元版の Sperner の補題を考えよう. 通常だと三角形分割についての話になるが, ここでは正方形の分割を考える. 正方形  $R = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$  について, 各辺を  $N (\in \mathbb{N})$  等分し, 各分点を

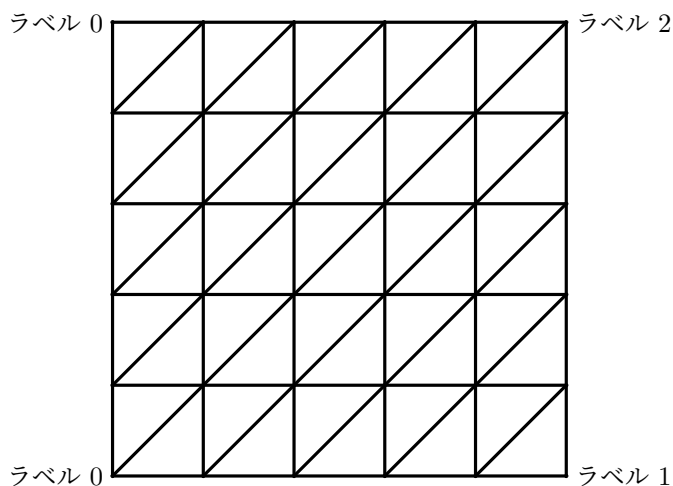
$$a_{j,k} = \left( \frac{j}{N}, \frac{k}{N} \right) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad j, k = 0, 1, \dots, N$$

とし, 各小正方形を

$$R_{j,k} = \left[ \frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right] \times \left[ \frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right]$$

と置く. また  $R_{j,k}$  を左下から右上へ向かう対角線で 2 等分し, 左上の三角形を  $T_{jk}^+$ , 右下の三角形を  $T_{jk}^-$  と置く. 以下では各  $T_{jk}^+, T_{jk}^-$  のことを小三角形, 各  $a_{j,k}$  を頂点と呼ぶ.

**Theorem 1.1.2** (2 次元 Sperner の補題). 正方形  $R = [0, 1] \times [0, 1]$  の四隅の頂点のそれぞれについて, 左下と左上の頂点に 0, 右下の頂点に 1, 右上の頂点に 2 がラベル付けされているとする. また 四隅の頂点以外の外周部にある頂点については, その頂点が属する  $R$  の辺の 2 頂点 (勿論, 四隅の頂点である) のラベル値のどちらかになっているとする. また正方形の内部の頂点についてはラベル付けは任意とする. このとき 3 頂点に 0, 1, 2 がラベル付けされている小三角形の個数は奇数である. 特にこのような小三角形は必ず存在する.



左図にラベルを書き入れ, 3 頂点に 0, 1, 2 がラベル付けされている小三角形が存在することを確かめてみよ.

*Proof.* 小三角形の辺が性質  $l$  を持つとは

辺の両端の 2 頂点の一方で 0, もう一方で 1 がラベル付けされている

を満たすことと定義し

$t :=$  性質  $l$  を持つ辺の個数,

$h :=$  性質  $l$  を持つ辺を 1 つだけ含む小三角形の個数,

$b :=$  性質  $l$  を持つ辺を 2 つ含む小三角形の個数

と置く. (性質  $l$  を持つ辺を 1 つだけ含む小三角形, 2 つ含む小三角形とはどのようなものであるか図を描くこと.) 性質  $l$  を持つ辺を 3 つ含む小三角形は存在しないことに注意しよう. 性質  $l$  を持つ辺が無い小三角形はあり得るが, ここでは考えない. このとき 3 頂点に相異なる数 0, 1, 2 がラベル付けされている小三角形とは, 性質  $l$  を持つ辺を 1 つだけ含む小三角形に他ならない. 従って  $h$  が奇数であることを示せばよい.

さて各小三角形について性質  $l$  を持つ辺の個数は 0, 1, 2 のどれかである. その個数を小三角形の全てについて総和したものを  $S_2$  と置けば

$$(1.1.3) \quad S_2 = h + 2b$$

である.

次に性質  $l$  を持つ各辺が  $S_2$  において何回カウントされたかを考えよう. 正方形  $R$  の外周部に含まれる辺の中で性質  $l$  を持つものは仮定より底辺に含まれるもの以外になく, その個数を  $e$  と置けば 1 次元 Sperner の補題より  $e$  は奇数である. 次に  $I^2$  の内部にある辺の中で性質  $l$  を持つものは, この辺を介して隣り合う 2 つの三角形により計 2 回カウントされている. 従って

$$(1.1.4) \quad S_2 = e + 2(t - e)$$

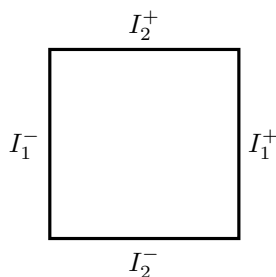
である. 等式 (1.1.3) と (1.1.4) を合わせて

$$h = 2(t - b) - e$$

を得る.  $e$  が奇数であるから  $h$  も奇数である. □

## 1.2 2次元の連結性, Poincaré-Miranda の定理と Brouwer の不動点定理

正方形  $R = [0, 1] \times [0, 1]$  において左の辺を  $I_1^- = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\}$ , 右の辺を  $I_1^+ = \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\}$ , 下の辺を  $I_2^- = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$ , 上の辺を  $I_2^+ = \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$  と置く.





**Theorem 1.2.1** (2次元の連結性定理).  $H_1^-$ ,  $H_1^+$  を正方形  $R$  の閉部分集合で  $I_1^- \subset H_1^-$ ,  $I_1^+ \subset H_1^+$  と  $H_1^- \cup H_1^+ = R$  を満たすとする. 同様に  $H_2^-$ ,  $H_2^+$  も  $R$  の閉部分集合で  $I_2^- \subset H_2^-$ ,  $I_2^+ \subset H_2^+$  と  $H_2^- \cup H_2^+ = R$  を満たすとする. このとき

$$H_1^- \cap H_1^+ \cap H_2^- \cap H_2^+ \neq \emptyset$$

が成り立つ.

*Proof.*  $F_0 = R$ ,  $F_1 = H_1^+ \setminus I_1^-$ ,  $F_2 = (H_1^+ \setminus I_1^-) \cap (H_2^+ \setminus I_2^-)$  と置くと  $F_2 \subset F_1 \subset F_0 = I^2$  が成り立つ. ここで  $\varphi: R \rightarrow \{0, 1, 2\}$  を

$$\varphi(x) = \max\{j : x \in F_j, j = 0, 1, 2\}$$

と置く. このとき

$$\begin{aligned} I_1^- \text{ 上で } \varphi &= 0, & (\because F_1 &= H_1^+ \setminus I_1^-) \\ I_2^- \text{ 上で } \varphi &\leq 1 (< 2), & (\because F_2 &= (H_1^+ \setminus I_1^-) \cap (H_2^+ \setminus I_2^-)) \\ I_1^+ \text{ 上で } \varphi &\neq 0, & (\because F_1 &= (H_1^+ \setminus I_1^-) \supset I_1^+) \\ I_2^+ \text{ 上で } \varphi &\neq 1 & (\because \text{もし } x \in I_2^+ \text{ が } x \in F_1 \text{ ならば } x \in F_1 \cap (H_2^+ \setminus I_2^-)) \end{aligned}$$

従って  $R$  の各辺を何等分かして小正方形を作り, さらに小三角形に分割し各頂点に  $\varphi$  の値でラベル付を行えば, 2次元 Sperner の補題の仮定を満たす. よって3つの頂点のそれぞれで  $\varphi = 0, 1, 2$  という値を取る小三角形が存在する.

$k \in \mathbb{N}$  について  $R$  の左右上下の各辺を  $2^k$  等分して,  $2^{2k}$  個の小正方形に分割し, さらに各小正方形について, 左下から右上に対角線を用いて2つの三角形に分割する. 3頂点において  $\varphi = 0, 1, 2$  という値を取る小三角形が存在するのでその中から1つ取り, その中心を  $a_k$  と置く.  $R$  はコンパクトであるから点列  $\{a_k\}_{k=1}^\infty$  から収束する部分列  $\{a_{k_j}\}_{j=1}^\infty$  を取ることが出来るので, その極限点を  $a = \lim_{j \rightarrow \infty} a_{k_j} \in R$  と置く. このとき  $a$  の任意の近傍の中に  $\varphi$  の値がそれぞれ  $0, 1, 2$  となる3点が存在する.

さて  $p \in R$  について

$$\varphi(p) = 0 \iff p \notin F_1 = H_1^+ \setminus I_1^- \iff p \notin H_1^+ \text{ or } p \in I_1^- \implies p \in H_1^-$$

が成り立つ. 次に

$$\varphi(p) = 1 \iff p \in F_1 = H_1^+ \setminus I_1^- \text{ and } p \notin F_2 \subset H_2^+ \setminus I_2^- \implies p \in H_1^+ \text{ and } p \in H_2^- \iff p \in H_1^+ \cap H_2^-.$$

最後に

$$\varphi(p) = 2 \implies p \in H_2^+$$

が成り立つ.

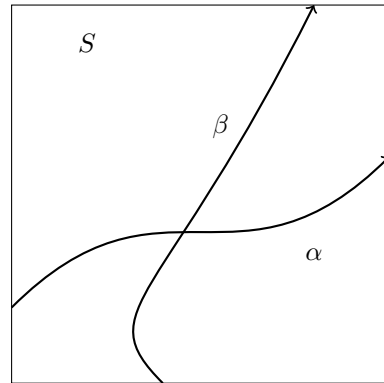
従って, 点  $a$  の任意の近傍は  $H_1^-$ ,  $H_1^+ \cap H_2^+$ ,  $H_2^-$  と交わることになり  $H_1^-$ ,  $H_1^+ \cap H_2^+$ ,  $H_2^-$  は3つとも閉集合であるから  $a \in H_1^- \cap H_1^+ \cap H_2^+ \cap H_2^-$  が成り立つ.  $\square$

**Theorem 1.2.2** (Poincaré-Miranda の定理). 連続写像  $f = (f_1, f_2): R \rightarrow \mathbb{R}^2$  が  $I_1^-$  上で  $f_1 \leq 0$  かつ  $I_1^+$  上で  $f_1 \geq 0$ , 同様に  $I_2^-$  上で  $f_2 \leq 0$  かつ  $I_2^+$  上で  $f_2 \geq 0$  を満たせば  $f(x_0, y_0) = (f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0)) = (0, 0)$  を満たす点  $(x_0, y_0) \in R$  が存在する.

*Proof.*  $i = 1, 2$  について  $H_i^- = \{(x, y) \in I^2 : f_i(x, y) \leq 0\}$ ,  $H_i^+ = \{(x, y) \in I^2 : f_i(x, y) \geq 0\}$  と置けば Theorem 1.2.1 の仮定を満たすので  $p_0 = (x_0, y_0) \in H_1^- \cap H_1^+ \cap H_2^- \cap H_2^+ (\neq \emptyset)$  を取ることが出来る. この  $p_0$  について  $f_1(p_0) = f_2(p_0) = 0$  が成り立つ.  $\square$

連続写像  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  のことを道 (path), 弧 (arc) または曲線 (curve) と呼ぶ.

**Corollary 1.2.3.** 正方形  $R$  内の 2 つの道  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow R$  が  $\alpha(0) \in I_1^-, \alpha(1) \in I_1^+, \beta(0) \in I_2^-, \beta(1) \in I_2^+$  を満たせば,  $R$  内に交点が存在する. つまり  $\alpha(s) = \beta(t)$  を満たす  $s, t \in [0, 1]$  が存在する.



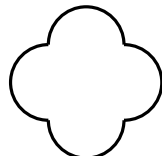
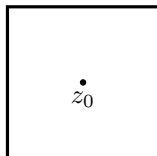
長方形を通り, 横の 2 辺を結ぶ  
曲線と縦の 2 辺を結ぶ 2 曲線  
は交点を持つ

*Proof.*  $\alpha, \beta$  を  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \beta = (\beta_1, \beta_2)$  と成分に分解し

$$f_1(s, t) = \alpha_1(s) - \beta_1(t), \quad f_2(s, t) = \beta_2(t) - \alpha_2(s)$$

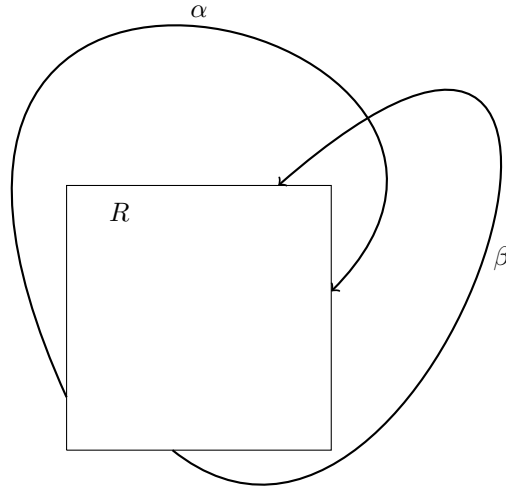
と置く.  $\alpha_1(0) = \beta_2(0) = 0, \alpha_1(1) = \beta_2(1) = 1$  より  $f = (f_1, f_2)$  は Poincaré-Miranda の定理の仮定を満たす. よって  $f(s, t) = (f_1(s, t), f_2(s, t)) = (0, 0)$  を満たす  $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$  が存在する.  $\square$

$\mathbb{R}^2$  を複素平面  $\mathbb{C}$  とみなし, さらに無限遠点  $\infty$  を加えた Riemann 球面  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  のもとで考えよう. 上の Corollary において  $R$  の中心を  $z_0$  とし変換  $z \mapsto \frac{1}{z-z_0}$  を行くと,  $R$  は円弧よりなる正方形の外部と  $\infty$  及び周に写像される. そして円弧正方形の対辺を外部及び周を通して結ぶ 2 曲線は必ず交点を持つという結果が得られる. 位相的には円弧よりなる正方形も通常正方形と同相であるから, 次の系が成り立つ.



円弧正方形

**Corollary 1.2.4.** 正方形  $R$  の外部及び周を通る 2 つの道  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \text{Int } R$  が  $\alpha(0) \in I_1^-, \alpha(1) \in I_1^+, \beta(0) \in I_2^-, \beta(1) \in I_2^+$  を満たせば,  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Int } R$  内に交点が存在する. つまり  $\alpha(s) = \beta(t)$  を満たす  $s, t \in [0, 1]$  が存在する.



正方形の外部を通り、  
横の 2 辺を結ぶ曲線  
と縦の 2 辺を結ぶ 2  
曲線も交点を持つ

**Corollary 1.2.5** (Brouwer's fixed point theorem). 正方形から自身への写像  $f : R \rightarrow R$  が連続ならば不動点, つまり  $f(p) = p$  を満たす点  $p \in R$  が存在する.

*Proof.*  $f = (f_1, f_2)$  と成分に分解し写像  $g : R \rightarrow \mathbb{R}^2$  を

$$g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y)) = (x - f_1(x, y), y - f_2(x, y))$$

と置けば,  $I_1^-$  上で  $g_1 \leq 0$  かつ  $I_1^+$  上で  $g_1 \geq 0$ , 同様に  $I_2^-$  上で  $g_2 \leq 0$  かつ  $I_2^+$  上で  $g_2 \geq 0$  を満たす. よって Poincaré-Miranda の定理を適用すれば  $g_1(x, y) = 0, g_2(x, y) = 0$  を満たす  $(x, y) \in R$  が存在する. これは  $f$  の不動点である.  $\square$

ここでは  $R$  から自身への連続写像について不動点の存在を示したが, 位相的に  $R$  と同型ならば同様に不動点定理が成り立つことは明らかであろう.

**NOTES.** この章の結果は全て高次元化されている. もともと  $n$  次元の結果である *Kulpa* [8], [9] と関連する結果が *M. Muger* [12] の *Chap.10 Higher-dimensional connectedness* にまとめられている. 本章では, これを *竹内* [23] を参考にし 1, 2 次元に簡略化して説明した.

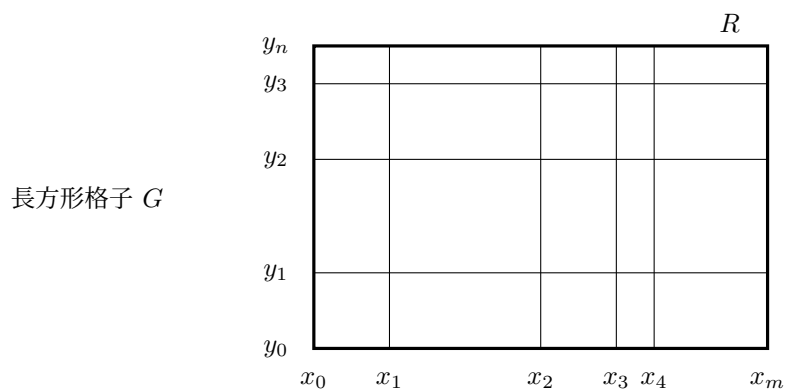
## 第 2 章

# 長方形の格子

### 2.1 cell と chain

この章では全体集合を Riemann 球面  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  として考察する.

辺が座標軸に平行な閉長方形を  $R = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ ,  $a < b, c < d$  と置く. そして区間  $[a, b]$  の分割  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ , と区間  $[c, d]$  の分割  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$  の組から定まる  $R$  の小長方形  $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : x_{j-1} \leq x \leq x_j, y_{k-1} \leq y \leq y_k\}$ ,  $j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n\}$  への分割を  $G$  と表し  $R$  の長方形格子 (rectangular grating) と呼ぶ. ただし分割を行わない ( $m = n = 1$  の) 場合も長方形格子であると考え. また  $R$  の境界  $\partial R$  のことを  $G$  の枠 (frame) と言う. 以下では長方形格子を略して単に格子と言うことにする.



枠  $\partial R$  を持つ格子  $G$  について細分された個々の小閉長方形

$$\{z = x + iy \in \mathbb{C} : x_{j-1} \leq x \leq x_j, y_{k-1} \leq y \leq y_k\}, \quad j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n$$

を  $G$  の 2-cell (胞体) と言う. また  $R$  の外側の領域と周  $\partial R$  の和集合も  $G$  の 2-cell とみなすことにし, 非有界な 2-cell と言う.  $\hat{\mathbb{C}}$  のもとで考えているので, 非有界な 2-cell は無限遠点  $\infty$  を含むことになる. 幾つかの 2-cell  $s_1, \dots, s_p$  を要素として持つ集合

$$S = \{s_1, \dots, s_p\}$$

のことを 2-chain (鎖) と呼ぶ. また  $S$  について

$$|S| = \bigcup_{j=1}^p s_j$$

と置き 2-chain  $S$  の locus (軌跡) と言う。ただし空集合  $\emptyset$  も 2-chain とみなし、記号  $0$  で表す。また  $G$  の全ての 2-cell よりなる 2-chain を  $\Omega$  で表す。  $0$  と  $\Omega$  が 2-chain であることを強調したい時は  $0^2, \Omega^2$  のように右肩に  $^2$  を付けて表す。このとき

$$|0^2| = \emptyset, \quad |\Omega^2| = \hat{C}$$

が成り立つ。

次に 2-cell の個々の辺 (閉線分) のことを  $G$  の 1-cell と言い、上と同様に幾つかの 1-cell  $\ell_1, \dots, \ell_n$  よりなる集合

$$L = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$$

のことを 1-chain と言い、

$$|L| = \bigcup_{j=1}^n \ell_j$$

と置き、1-chain  $L$  の軌跡と呼ぶ。

さらに同様に格子  $G$  の 1 つの頂点  $p$  よりなる 1 点集合  $\{p\}$  を 0-cell と言い、幾つかの 0-cell  $\{p_1\}, \dots, \{p_n\}$  よりなる集合

$$P = \{\{p_1\}, \dots, \{p_n\}\}$$

のことを 0-chain と言い、その locus を

$$|P| = \bigcup_{j=1}^n \{p_j\} = \{p_1, \dots, p_n\}$$

と置く。  $0^1, \Omega^1, 0^0, \Omega^0$  についても同様に定義する。 0-cell は頂点そのものではなく、頂点 1 つよりなる集合のことであるが、混乱を招かない限り頂点と呼ぶことを許すことにする。

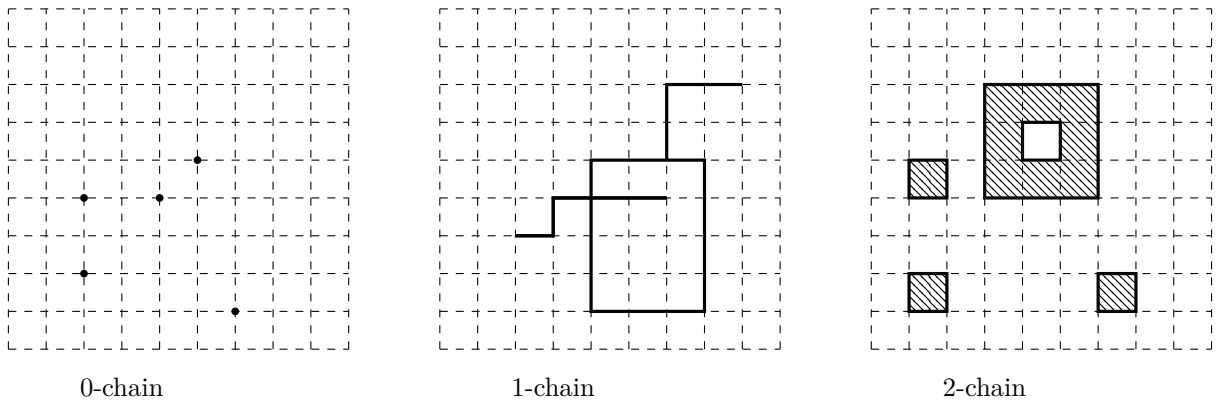


図 2.1.1

$k = 0, 1, 2$  について  $k$ -chain を表すのに  $P, L, S$  などの文字を用いたが、 $k$  に関し共通な性質について述べる時に便利なので、 $k$ -cell を記号  $c^k, d^k$  などの小文字を用いて表し  $k$ -chain は  $C^k, D^k$  などの大文字を用いて表す記法も使用する。例えば  $k$ -chain  $C^k, D^k$  について

$$(2.1.1) \quad C^k = D^k \iff |C^k| = |D^k|, \quad k = 0, 1, 2$$

が成り立つ。  $\implies$  は明らかであるが、逆の証明は演習問題としよう。

**Definition 2.1.1.**  $k=0,1,2$  について 2 つの  $k$ -chain  $C^k = \{c_1^k, \dots, c_m^k\}$ ,  $D^k = \{d_1^k, \dots, d_n^k\}$  の和 (詳しくは modulo 2 の和と言う) を, いわゆる対称差を用いて

$$\begin{aligned} C^k + D^k &= (C^k \setminus D^k) \cup (D^k \setminus C^k) \\ &= (\{c_1^k, \dots, c_m^k\} \setminus \{d_1^k, \dots, d_n^k\}) \cup (\{d_1^k, \dots, d_n^k\} \setminus \{c_1^k, \dots, c_m^k\}) \end{aligned}$$

と定義する. つまり  $C^k, D^k$  のどちらか一方のみに含まれる  $k$ -cell の全てからなる集合が  $C^k + D^k$  である.

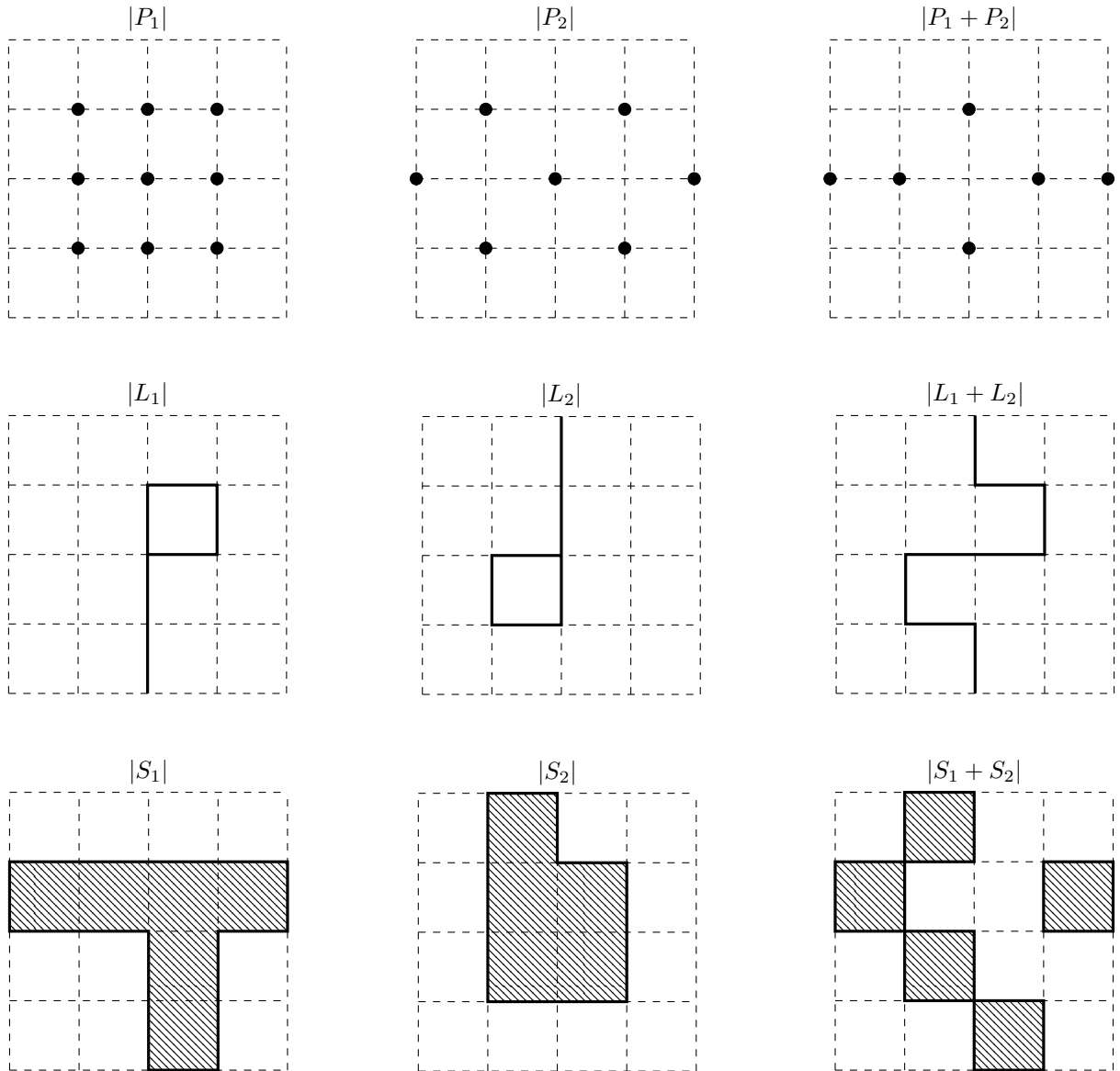


図 2.1.2

$k$ -chain の modulo 2 の和について可換法則

$$(2.1.2) \quad C^k + D^k = D^k + C^k$$

が成り立つことは定義から明らかである. また結合法則

$$(2.1.3) \quad (C_1^k + C_2^k) + C_3^k = C_1^k + (C_2^k + C_3^k)$$

も成り立つ. これは  $k$ -cell  $c^k$  が  $(C_1^k + C_2^k) + C_3^k$  に属すとは

$$\begin{aligned} & \{C_1^k + C_2^k \text{ に属す} \ \& \ C_3^k \text{ に属さない}\} \text{ or } \{C_1^k + C_2^k \text{ に属さない} \ \& \ C_3^k \text{ に属す}\} \\ \iff & \{(C_1^k \text{ に属す} \ \& \ C_2^k \text{ に属さない} \ \& \ C_3^k \text{ に属さない}) \text{ or } (C_1^k \text{ に属さない} \ \& \ C_2^k \text{ に属す} \ \& \ C_3^k \text{ に属さない})\} \\ & \text{or} \\ & \{(C_1^k \text{ に属さない} \ \& \ C_2^k \text{ に属さない} \ \& \ C_3^k \text{ に属す}) \text{ or } (C_1^k \text{ に属す} \ \& \ C_2^k \text{ に属す} \ \& \ C_3^k \text{ に属す})\} \end{aligned}$$

と同値変形される. よって  $k$ -cell  $c^k$  が  $(C_1^k + C_2^k) + C_3^k$  に属すとは  $C_1^k, C_2^k, C_3^k$  の中で 1 つまたは 3 つの  $k$ -chain に属することと同値である. 同様に  $C_1^k + (C_2^k + C_3^k)$  についても同じ結論が得られるので, 結合法則が成り立つことが分かる. 結合法則が成り立つことより  $k$ -chain の和  $C_1^k + \dots + C_n^k$  は括弧のつけ方, つまり和を取る順番に依らないことが従う. そこで以下では括弧を省略して表すことにする. このとき

$$(2.1.4) \quad c^k \in C_1^k + \dots + C_n^k \iff c^k \in C_j^k \text{ を満たす } j \text{ の個数は奇数}$$

が成り立つ. これを確かめることを読者の演習問題としよう. ( $n = 1, 2, 3$  のときに成り立つことを知っているので, 帰納法をお勧めする.)

**Theorem 2.1.2.** 格子  $G$  の  $k$ -chain の全体は modulo 2 の和に関し可換群をなし,  $0^k$  が単位元であり,  $C^k$  の逆元は  $C^k$  自身である, つまり

$$(2.1.5) \quad C^k + 0^k = 0^k + C^k = C^k, \quad C^k + C^k = 0^k$$

が成り立つ.

これも証明は読者の演習問題としよう.

## 2.2 組み合わせ的境界

**Definition 2.2.1** ( $k$ -chain の組み合わせ的境界).  $k = 1, 2$  とする.  $k$ -chain  $C^k$  について  $C^k$  の組み合わせ的境界と呼ばれる  $(k-1)$ -chain  $C^{k-1}$  を以下の条件を満たす全ての  $(k-1)$ -cell  $c^{k-1}$  がなす  $(k-1)$ -chain と定義する.

$c^{k-1}$  を含み  $C^k$  に属する  $k$ -cell の個数が奇数.

この章では  $C^k$  を単に  $C^k$  の境界と呼ぶことにし,  $\partial C^k$  の方は位相的な境界と呼ぶことにする.

下の左図において, 斜線の影がついた部分を 2-chain  $S$  とすると, その境界  $\dot{S}$  は太線で描かれた辺よりなる 1-chain である. また右図において, 太線で表された折れ線を 1-chain  $L$  とすると, その境界  $\dot{L}$  は 6 個の黒点よりなる 0-chain である.



図 2.2.1

$k = 1$  の場合を考えよう. 格子内の頂点  $\{p\}$  について  $p$  を端点とする辺は高々 4 つであるから  $\{p\} \in \dot{L}$  とは  $p$  を端点に持ち  $L$  に属する辺が 1 本または 3 本であることを意味する. このように奇数個の  $L$  の辺に共有される頂点  $\{p\}$  を 1-chain  $L$  の奇頂点と言う. 勿論  $L$  の奇頂点 (の 1 点集合) 全ての和が  $\dot{L}$  である. 後述するが奇頂点の個数はつねに偶数である.

$k = 2$  の場合では, 格子内の辺  $l$  を共有する小長方形はつねに 2 つであり, その 2 つは  $l$  を介して隣り合っている. 従って 2-chain  $S$  について  $l \in \dot{S}$  とは  $l$  を介して隣り合う 2 つの小長方形の一方が  $S$  に属し, もう一方が  $S$  に属さないことを意味する. これより特に次が従う.

**Theorem 2.2.2.** 2-chain  $S$  について  $|\dot{S}| = \partial|S|$  が成り立つ.

*Proof.* 上の注意から “ $\subset$ ” が従う. また点  $z \in \partial|S|$  ならば  $z$  が属す 2-cell  $s$  が取れる.  $z$  は小長方形  $s$  の内点ではあり得ないので  $z$  はある 1-cell  $l$  で  $s$  の辺であるものに属す.  $z$  が  $l$  の端点でなければ  $l$  を介して隣り合う 2-cell の一方は  $S$  に属し, もう一方は  $S$  に属さない. (何故か? 図を描いて考えよ!) よって  $z \in \dot{|S|}$  である. 次に  $z$  が  $l$  の端点, つまり  $z$  が頂点の場合を考えよう. この場合でも  $z$  の任意の近傍内に  $S$  に属する 2-cell の点と  $S$  に属さない 2-cell の点が存在することから,  $z$  を頂点に持つ 2-cell ( $z$  が frame の頂点ならば 2 つ, frame 上にあるが, frame の頂点でないときは 3 つ, それ以外の場合は 4 つ) の中に  $S$  に属すものと属さないものが存在する. よって  $z \in \dot{|S|}$  である.  $\square$

**Theorem 2.2.3.** 組み合わせ的境界を取る作用素と modulo 2 の和は可換である. つまり

$$(C^k + D^k)^\bullet = C^k + D^k, \quad k = 1, 2$$

が成り立つ.

*Proof.*  $(k-1)$ -cell  $e^{k-1}$  を任意に取る.  $k$ -chain  $C^k, D^k$  に含まれる  $k$ -cell で  $e^{k-1}$  を含むものの個数をそれぞれ  $n_1, n_2$  と置き,  $C^k, D^k$  の両方に含まれる  $k$ -cell で  $e^{k-1}$  を含むものの個数を  $n_0$  と置く. このとき

$$\begin{aligned} e^{k-1} \in \dot{C}^k + \dot{D}^k &\iff e^{k-1} \text{ が } \dot{C}^k \text{ と } \dot{D}^k \text{ の一方に属し, もう一方に属さない} \\ &\iff n_1 \text{ と } n_2 \text{ の一方が奇数でもう一方が偶数} \\ &\iff n_1 + n_2 \text{ が奇数} \end{aligned}$$

また  $C^k + D^k$  に属する  $k$ -cell で  $e^{k-1}$  を含むものの個数は  $(n_1 - n_0) + (n_2 - n_0) = n_1 + n_2 - 2n_0$  ゆえ

$$\begin{aligned} e^{k-1} \in (C^k + D^k)^\bullet &\iff n_1 + n_2 - 2n_0 \text{ が奇数} \\ &\iff n_1 + n_2 \text{ が奇数} \end{aligned}$$

である.  $\square$

## 2.3 $k$ -chain の連結成分

**復習** 位相空間  $X$  が連結でないとは, ともに空でない 2 つの開集合  $G_1, G_2$  で

$$X = G_1 \cup G_2 \quad \text{and} \quad G_1 \cap G_2 = \emptyset$$

を満たすものが存在するときを言う. このとき  $G_1, G_2$  を  $X$  の分割と言う.  $G_1 = X \setminus G_2, G_2 = X \setminus G_1$  より  $G_1, G_2$  は閉集合でもある. このような  $X$  の分割  $G_1, G_2$  が存在しないとき  $X$  は連結であると言う. 位相空



間  $X$  の部分集合  $A$  については部分空間位相 (相対位相とも言う) のもとで不連結, 連結を考えるものとする.  $A$  が連結ならば  $A \subset B \subset \bar{A}$  を満たす任意の集合  $B$  も連結である. また  $A_1, A_2$  が連結で  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$  ならば  $A_1 \cup A_2$  も連結である.

空でない  $k$ -chain  $C^k$  は有限個の  $k$ -cell (= 1 つの頂点よりなる集合, 閉線分, 閉長方形または開長方形の補集合) からなるので  $|C^k|$  は閉集合である. また  $k$ -cell は連結集合であるから  $C^k$  に属す  $k$ -cell  $c^k$  について  $c^k$  を含む  $|C^k|$  の連結成分, つまり  $c^k$  を含む  $|C^k|$  に含まれる最大の連結集合  $F$  が存在する.  $F$  も幾つかの  $k$ -cell の和集合であるから  $|D^k| = F$  を満たす  $k$ -chain  $D^k$  が一意的に存在する. 以後,  $k$ -chain  $D^k$  のことを  $k$ -cell  $c^k$  を含む  $k$ -chain  $C^k$  の成分と呼ぶことにする. また  $|C^k|$  が連結 のとき  $k$ -chain  $C^k$  は連結であると言うことにする.

**Theorem 2.3.1.**  $k = 1$  or  $k = 2$   $k$ -cell  $c^k$  と  $d^k$  が  $k$ -chain  $C^k$  の同一の (連結) 成分に属す為の必要十分条件は

$$c^k = c_0^k, c_1^k, \dots, c_n^k = d^k, \quad c_j^k \in C^k \quad (j = 0, \dots, n) \quad \text{and} \quad c_{j-1}^k \cap c_j^k \neq \emptyset \quad (j = 1, \dots, n)$$

のように  $C^k$  に属す  $k$ -cell の列で  $c^k$  から出発し, 1 つ前の  $k$ -cell と交わる (共通部分が空でない) ものを並べ  $d^k$  にまで到達できることである. 特に  $k$ -cell  $c^k$  を含む  $k$ -chain  $C^k$  の成分とは上のような  $C^k$  に含まれる  $k$ -cell の列で  $c^k$  から達することができる  $k$ -cell  $d^k$  の全ての和よりなる  $k$ -chain である.

*Proof.*  $D^k$  を  $c^k$  を含む  $C^k$  の連結成分と置く.  $c^k$  と  $d^k$  を結ぶ上記のような列が存在するとしよう. まず  $c_0^k \cup c_1^k$  は共有点を持つ 2 つの連結集合の和ゆえ連結である. よって以下帰納的に  $c^k \cup c_1^k \cup c_2^k, \dots, c^k \cup c_1^k \dots \cup d^k$  も連結であることが従う. ここで  $c^k$  を含む  $C^k$  の成分  $D^k$  とは,  $|D^k|$  が  $c^k$  を含む  $|C^k|$  の連結部分集合で最大となるものであるから,  $c^k \cup c_1^k \dots \cup d^k \subset |D^k|$  が成り立ち, 特に  $d^k$  は  $D^k$  に属す.

今度は  $C_1^k$  を  $c^k$  から上記のような列で達することが出来る  $C^k$  の  $k$ -cell の全てよりなる  $k$ -chain と置く. 前段で示したことより  $C_1^k \subset D^k$  が成り立つ. また  $C_2^k$  を  $c^k$  と上記のような列で結べない  $C^k$  の  $k$ -cell の全てよりなる  $k$ -chain とすれば,

$$|C_1^k| \cap |C_2^k| = \emptyset, \quad |C_1^k| \cup |C_2^k| = |C^k|$$

が成り立つ. ここで  $|C_1^k|, |C_2^k|$  は, どちらも閉集合であるから,  $|C^k|$  の部分空間の位相のもとで開集合である. 従って連結集合  $|D^k|$  について  $|D^k| \subset |C_1^k|$  または  $|D^k| \subset |C_2^k|$  のどちらか一方のみが成り立つ.  $c^k \in D^k \cap C_1^k$  であるから  $|D^k| \subset |C_1^k|$  が成り立つ. よって  $D^k \subset C_1^k$  である. これで  $D^k = C_1^k$  が成り立つことが示された. つまり Theorem の後半の主張が成り立つ. 前半の主張は後半の主張より直ちに従う.  $\square$

$k = 1, 2$  とする.  $k$ -chain  $D^k$  が  $k$ -chain  $C^k$  の連結成分とすると  $C^k$  及び, 残りの  $k$ -cell の集まりである  $C^k + D^k$  の軌跡はともに閉集合であり, 両者の距離は正である. 従って境界  $D^k$  に属す  $(k-1)$ -cell は  $C^k$  にも属す. また  $C^k$  と  $D^k$  の両方に属する  $(k-1)$ -cell は  $C^k$  も成り立つので

$$(2.3.1) \quad |D^k| = |C^k| \cap |D^k|.$$

が成り立つ.

## 2.4 $k$ -cycle

**Definition 2.4.1** ( $k$ -cycle).  $k = 1, 2$  のとき  $k$ -chain  $C^k$  で境界が空, つまり  $C^k = \emptyset$  を満たすものを  $k$ -cycle と言う. また  $k = 0$  の場合, 偶数個の頂点よりなる  $0$ -chain のことを  $0$ -cycle と定める.

$k = 2$  のときは  $\partial|S| = |\dot{S}|$  より 2-cycle は  $\Omega^2$  または  $O^2$  のみである. 実際もし  $A \subset \hat{C}$  が  $\partial A = \emptyset$  を満たせば,  $A = \text{Int } A$ ,  $\hat{C} \setminus A = \text{Ext } A$  が成り立ち

$$\hat{C} = \text{Int } A \cup \text{Ext } A, \quad \text{Int } A \cap \text{Ext } A = \emptyset$$

となる. もし  $A \neq \emptyset$ ,  $A \neq \hat{C}$  ならば  $\text{Int } A \neq \emptyset \neq \text{Ext } A$  となり  $\text{Int } A$ ,  $\text{Ext } A$  は  $\hat{C}$  の分割である. これは  $\hat{C}$  が連結であることに矛盾する. 従って  $\partial A = \emptyset$  を満たす  $\hat{C}$  の部分集合は  $\emptyset$  または  $\hat{C}$  に限る.

次に 1-cycle  $L$  とは奇頂点の集まり  $\dot{L}$  が空の 1-chain のことであるから, 頂点が全て 2 つまたは 4 つの  $L$  の辺に含まれる 1-chain のことである.

$$(2.4.1) \quad C^k, D^k \text{ が } k\text{-cycle ならば } C^k + D^k \text{ も } k\text{-cycle である} \quad k = 0, 1, 2$$

が成り立つ.  $k = 1, 2$  のときは  $k$ -cycle の定義と Theorem 2.2.3 より明らかであろう.  $k = 0$  の場合, 0-cycle とは偶数個の頂点よりなる 0-chain のことであるから  $C^0, D^0$  の頂点の個数を  $2n_1, 2n_2$  と置くことができる. また  $C^0, D^0$  に共通の頂点の個数を  $n_0$  とすると  $C^0 + D^0$  の頂点の個数は  $2n_1 - n_0 + 2n_2 - n_0 = 2(n_1 + n_2 - n_0)$  となり偶数であるから  $C^0 + D^0$  も 0-cycle である.

また 性質 (2.3.1) より

$$(2.4.2) \quad L \text{ が } 1\text{-cycle ならば } L \text{ の各連結成分も } 1\text{-cycle である}$$

が成り立つ.

**Theorem 2.4.2.**  $k = 1, 2$  について  $k$ -chain の境界は  $(k - 1)$ -cycle である.

*Proof.*  $k$ -chain  $C^k = \{c_1^k, \dots, c_n^k\}$  は

$$C^k = \{c_1^k\} + \dots + \{c_n^k\}$$

に分解できるので

$$\dot{C}^k = \{\dot{c}_1^k\} + \dots + \{\dot{c}_n^k\}$$

が成り立つ. ここで 2-cell (1 つよりなる 2-chain) の境界は 1-cycle であり 1-cell (1 つよりなる 1-chain) の境界は 0-cycle であるから, 上式の右辺は Theorem 2.4.1 より  $k - 1$ -cycle である.  $\square$

$k = 1$  の場合 Theorem の主張を換言すれば

$$(2.4.3) \quad \text{すべての } 1\text{-chain について奇頂点の個数は偶数個である.}$$

**Definition 2.4.3.** 格子の相異なる 2 頂点  $\{p\}, \{q\}$  と 1-chain  $L$  が  $\dot{L} = \{p\} + \{q\}$  を満たすとき  $\{p\}, \{q\}$  は 1-chain  $L$  を囲む (bound) という. ただし本来ならば  $\dot{L} = \{\{p\} + \{q\}\}$  と表すべきところであるが, 便宜上このような表し方も許すことにする.

次に述べる定理は一見簡単なように見えるが, 組合せ的な性質と連結性という位相的な性質との間をつなぐ, 重要な結果である.

**Theorem 2.4.4.**  $\{p\}, \{q\}$  が 1-chain  $L$  を囲むならば,  $\{p\}, \{q\}$  は  $L$  の同一の連結成分に属す. (2 点  $p, q$  が  $|L|$  の同一の連結成分に属すことと同値である.) 特に  $L$  に属す 1-cell (辺) の列  $l_1, l_2, \dots, l_n$  で, 各 1-cell は前後の 1-cell と頂点を共有し  $\{p\}, \{q\}$  がそれぞれ  $l_1, l_n$  の頂点であるものが存在する.

*Proof.*  $\{p\}$  を含む  $L$  の連結成分を  $L_1$  と置くと  $|\dot{L}_1| = |\dot{L}| \cap |L_1|$  ゆえ  $\{p\} \in \dot{L}_1$  である. また性質 (2.4.3) より  $L_1$  には  $\{p\}$  以外の奇頂点が少なくとも 1 つ存在するので, その中の 1 つを  $\{q'\}$  と置けば,  $q' \in |\dot{L}_1| = |\dot{L}| \cap |L_1| \subset \{p, q\}$  より  $q' = q$  でなければならない. 従って  $\{q\} \in L_1$  である. 後半の主張は Theorem 2.3.1 より従う.  $\square$

## 2.5 相補的 2-chain と格子の細分

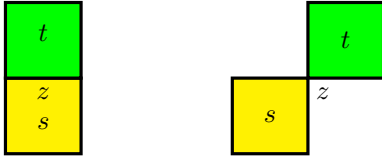
**Definition 2.5.1.** 2 つの 2-chain  $S, T$  が相補的 (*complementary*) であるとは  $S + T = \Omega^2$  が成り立つときを言う. 換言すれば任意の 2-cell  $s$  について  $s \in S$  または  $s \in T$  のどちらか一方のみが必ず成り立つことである.

**Theorem 2.5.2.** 2 つの 2-chain  $S, T$  が相補的ならば  $\dot{S} = \dot{T}$  が成り立ち, このとき

$$(2.5.1) \quad |S| \cap |T| = |\dot{S}| = |\dot{T}|$$

である. 逆に  $\dot{S} = \dot{T}$  ならば  $S = T$  であるか, または  $S, T$  は互いに相補的である.

*Proof.* 2-chain  $S, T$  が相補的と仮定しよう.  $z \in |S| \cap |T|$  ならば  $z \in s \in S$  を満たす 2-cell  $s$  を取る. このとき  $\text{Int } s \cap |T| = \emptyset$  であるから  $z \notin \text{Int } s$  であり, 従って  $z$  は  $s$  の边上にある. 同様に  $T$  に属し,  $S$  に属さない 2-cell  $t$  で  $z$  が  $t$  の边上にあるものが取れる.  $s$  と  $t$  が辺を共有するならば, その边上に  $z$  はあるので  $z \in \partial|S| \cap \partial|T|$  である. また  $s$  と  $t$  が頂点のみを共有するときは, その共有頂点が  $z$  である.



この場合も  $z \in \partial|S| \cap \partial|T|$  が成り立つ. 以上より

$$|S| \cap |T| \subset \partial|S| \cap \partial|T| = |\dot{S}| \cap |\dot{T}|$$

が成り立つ. 一方  $|\dot{S}| \cap |\dot{T}| = \partial|S| \cap \partial|T| \subset |S| \cap |T|$  より逆の包含関係も成り立つので

$$|S| \cap |T| = |\dot{S}| \cap |\dot{T}|$$

が成り立つ.

次に  $z \in |\dot{S}|$  ならば 1-cell  $l$  を  $z \in l$  でありかつ, この辺を介して隣り合う 2 つの 2-cell の一方  $s$  が  $S$  に属し, もう一方  $t$  が  $S$  に属さないように取れる.  $S, T$  は相補的であるから  $t$  は  $T$  に属する. 従って  $z \in |\dot{S}| \cap |\dot{T}|$  が成り立つ. よって

$$|\dot{S}| \subset |\dot{S}| \cap |\dot{T}| \subset |\dot{S}|$$

となり, 上式の “ $\subset$ ” は実は等号である. 全く同様にして  $|\dot{T}| = |\dot{S}| \cap |\dot{T}|$  も成り立つので  $|\dot{S}| = |\dot{T}|$  である. よって  $\dot{S} = \dot{T}$  が成り立つ. これで (2.5.1) が示された.

今度は  $\dot{S} = \dot{T}$  と仮定しよう. このとき  $(S + T)^\bullet = \dot{S} + \dot{T} = 0^1$  である. よって  $S + T$  は 2-cycle であり  $S + T = \Omega^2$  または  $S + T = 0^2$  が成り立つ. 前者の場合  $S, T$  は互いに相補的であるし, 後者の場合  $S = T$  である.  $\square$

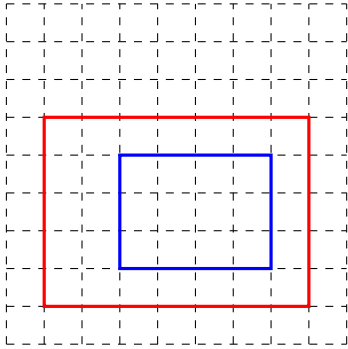
**Theorem 2.5.3.** 2-chain  $S$  について  $\dot{S}$  が連結ならば  $S$  も連結.

*Proof.* 対偶 “ $S$  が連結でないならば  $\dot{S}$  も連結でない” を示そう. これは  $S$  を連結成分に分解し  $S = S_1 + \cdots + S_n$ ,  $n \geq 2$  を得たとする. このとき相異なる連結成分  $|S_i|, |S_j|$  間の距離は正であるから  $0 < 2\delta < \min_{j \neq k} \text{dist}(|S_j|, |S_k|)$  を満す  $\delta$  を取り,  $V_j = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, |S_j|) < \delta\}$ ,  $j = 1, \dots, n$  と置けば  $V_j, j = 1, \dots, n$  は互いに交わらない開集合であり  $|\dot{S}_j| \subset |S_j| \subset V_j$  を満すので  $\dot{S} = \dot{S}_1 + \cdots + \dot{S}_n$  は連結ではない.  $\square$

上の証明中で次を示している. 2-chain  $S$  の成分への分解が  $S = S_1 + \cdots + S_n$  ならば組み合わせ的境界も

$$\dot{S} = \dot{S}_1 + \cdots + \dot{S}_n$$

と分解され, 右辺は disjoint な和である. つまり  $i \neq j$  ならば  $|\dot{S}_i| \cap |\dot{S}_j| = \emptyset$  が成り立つ, 残念ながら各項  $\dot{S}_i$  は連結であるとは限らない. 一般に Theorem 2.5.3 の逆は成り立たない. つまり 2-chain が連結であっても, その組み合わせ的境界は連結とは限らない. 例えば次の図の, 赤い長方形の内側かつ青い長方形の外側よりの 2-cell の境界は明らかに連結でない.



格子  $G$  に座標軸と平行な線分を追加し, 新しい格子  $\tilde{G}$  を作ることがある. このとき  $G$  の  $k$ -cell は  $\tilde{G}$  の  $k$ -cell となるとは限らず, 一般には  $k$ -chain となるが, modulo 2 の和は  $G$  と  $\tilde{G}$  のどちらでも結果は変わらない (正確には軌跡が変わらないという意味である). つまり  $C^k, D^k$  が  $G$  の  $k$ -chain の時に  $C^k + D^k$  を  $G$  で考えても,  $\tilde{G}$  で考えても  $|C^k + D^k|$  は同一である. また境界を取る操作を  $G, \tilde{G}$  のどちらで行っても軌跡は変わらない. 実際  $k = 2$  のときは  $|\dot{S}| = \partial|S|$  よりこれが従う.  $k = 1$  のときは線分の追加により 1-chain には新たな頂点が追加されることがあるが, この頂点は 2 つの線分に共有されるので奇頂点では無い. また  $G$  に於ける奇頂点は  $G_1$  においても奇頂点である.

線分の追加に加え, 枠を拡大して新しい格子を作ることがある. この場合  $G$  を構成する線分は全て新しい枠にぶつかるまで延長することとする. このとき modulo 2 の和, 境界を取る操作は  $G$  及び拡大された格子のどちらで行っても結果は変わらない.

**Definition 2.5.4** (格子の細分). 上記のように 1 つの格子  $G$  に, 座標軸に平行な分割線分を追加したり, 枠を拡大することにより新しい格子を得たとき, これを  $G$  の細分と呼ぶ.

いかなる 2 つの格子  $G_1, G_2$  についても共通の細分, つまり格子  $G$  で  $G_1$  の細分でありかつ  $G_2$  の細分でもあるものを作ることができる.

次の 2 つの Theorem は, ここまで読み進めて来られた読者ならば容易に証明できるであろう.

**Theorem 2.5.5.**  $V$  を  $\hat{C}$  内の開集合とし,  $p, q \in \mathbb{C}$  とする. このとき  $p, q$  が  $V$  の同一の連結成分に属す為の必要十分条件は, 格子  $G$  と  $G$  内の 1-chain  $L$  で,  $p, q$  が  $G$  の頂点であり  $\dot{L} = \{p\} + \{q\}$  を満たすものが存在すること.

**Theorem 2.5.6.**  $j = 1, 2$  について  $S_j, T_j$  は相補的な 2-chain とする. このとき

$$S_1 + S_2 = T_1 + T_2 \quad \text{and} \quad S_1 + T_2 = S_2 + T_1$$

が成り立つ.

**Exercise 2.5.7.** Theorem 2.5.5 を証明せよ.

**Exercise 2.5.8.** Theorem 2.5.6 を証明せよ.

## 2.6 $k$ -boundary

以下では  $k$ -cycle を  $\Gamma^k, \Gamma_1^k, \Gamma_2^k$  のように文字  $\Gamma$  を用いて表す. 1-cycle  $\Gamma^1$  について  $\dot{S} = \Gamma^1$  を満たす 2-chain  $S$  が存在すると仮定しよう. このとき 2-chain  $T$  も  $\dot{T} = \Gamma^1$  を満たせば

$$(S + T) \bullet = \dot{S} + \dot{T} = \Gamma^1 + \Gamma^1 = 0^1$$

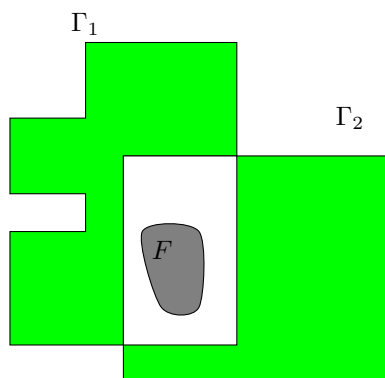
となるので,  $S + T = 0^2$  または  $S + T = \Omega^2$  のどちらかが成り立つ. 従って  $T = S$  であるかまたは  $T$  と  $S$  は互いに相補的な 2-chain である. 0-cycle  $\Gamma^0$  については  $\dot{L} = \Gamma^0$  を満たす 1-chain  $L$  は場合により 3 つ以上あり得ることは明らかであろう.

次の定義は組み合わせ的な手法を平面の部分集合 (特に開集合) に応用する際に基本となる.

**Definition 2.6.1.**  $V$  を開集合とし,  $k = 0, 1$  とする. ある格子  $G$  上の 2 つの  $k$ -chain  $C_1^k$  と  $C_2^k$  で  $|C_1^k| \subset V, |C_2^k| \subset V$  を満たすものについて,  $G$  のある細分上の  $(k+1)$ -chain  $D^{k+1}$  で

$$\dot{D}^{k+1} = C_1^k + C_2^k \quad \text{and} \quad |D^{k+1}| \subset V$$

を満たすものが存在するとき  $C_1^k$  と  $C_2^k$  は  $V$  内で homologous であると言い  $C_1^k \sim C_2^k$  in  $V$  と表す. 特に  $\Gamma^k \sim 0^k$  in  $V$  とは  $\dot{C}^{k+1} = \Gamma^k$  かつ  $|C^{k+1}| \subset V$  を満たす  $(k+1)$ -chain  $C^{k+1}$  が存在するときであり, このとき  $\Gamma^k$  は  $k$ -boundary in  $V$  であると言う.



$V$  を影をつけて示した閉集合  $F$  の補集合とすると  $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$  in  $V = \hat{C} \setminus F$ .

$\therefore$  緑色で表した部分が  $\Gamma_1 + \Gamma_2$  の囲む 2-chain の 1 つであり, これは  $F$  と交わらないので  $V$  に含まれる.

**Theorem 2.6.2.**  $k = 1, 2$  とする.

- (i) 関係 “ $\sim$  in  $V$ ” は同値関係である.
- (ii)  $k$ -cycle  $\Gamma_1^k, \dots, \Gamma_m^k$  が開集合  $V$  内の  $k$ -boundary ならば  $\Gamma_1^k + \dots + \Gamma_m^k$  も  $V$  内の  $k$ -boundary である.
- (iii)  $k$ -cycle  $\Gamma^k$  が  $|\Gamma^k| \subset V$  を満たすが  $V$  内の  $k$ -boundary でなければ,  $\Gamma^k$  の連結成分の少なくとも 1 つは  $V$  内の  $k$ -境界でない.

証明は演習問題としよう.

**Example 2.6.3.** 開集合  $V$  と 2-chain  $S$  が  $|S| \subset V$  を満たせば  $\dot{S}$  は  $V$  内の 1-boundary である.

**Example 2.6.4.** 2-chain  $S$  について  $z \in \text{Int } |S|$ ,  $w \in \hat{\mathbb{C}} \setminus |S|$  のとき

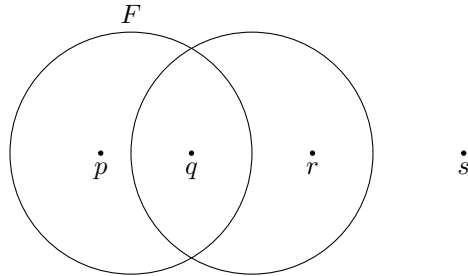
$$\dot{S} \not\sim 0 \text{ in } \hat{\mathbb{C}} \setminus \{z, w\}$$

である.

*Proof.* 実際 1-cycle  $\Gamma^1 = \dot{S}$  について  $\dot{T} = \Gamma^1$  を満たす 2-chain  $T$  は  $S$  と一致するかまたは  $S$  と相補的な  $\Omega^2 + C^2$  のみである. それぞれの場合で  $|T|$  は  $z$  または  $w$  を含む. 従ってどちらの場合も  $|T|$  は  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{z, w\}$  に含まれないので,  $\dot{S} \not\sim 0$  in  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{z, w\}$  が成り立つ.  $\square$

**Definition 2.6.5.**  $\hat{\mathbb{C}}$  の相異なる 2 点  $p, q$  が閉集合  $F \subset \hat{\mathbb{C}}$  により分離されるとは  $p, q$  が補集合  $F^c = \hat{\mathbb{C}} \setminus F$  の異なる連結成分に属するときを言い, 分離されないとは同一の連結成分に属するときを言う.

**Example 2.6.6.**  $F$  を下図において 2 つの円周の和とすれば  $p, q, r, s$  の, どの 2 点も  $F$  により分離される.



**Theorem 2.6.7.**  $p, q \in \mathbb{C}$  が閉集合  $F$  により分離されない為の必要十分条件は, ある格子上で  $\{p\} \sim \{q\}$  in  $\hat{\mathbb{C}} \setminus F$  が成り立つことである.

*Proof.* この定理は, 実のところ前節の Theorem 2.5.5 の言い換えに過ぎない. 前節では証明を演習問題とし, 読者に委ねたが, ここで解答を示しておこう.

閉集合  $F \subset \hat{\mathbb{C}}$  により 2 点  $p, q \in \mathbb{C} \setminus F$  が分離されない為の必要十分条件は  $p$  と  $q$  が  $F$  と交わらない曲線で結べることである. このときその曲線を  $F$  と交わらない折れ線で近似することが可能であり, さらにその折れ線を座標軸と平行な線分よりなる折れ線で  $F$  と交わらないもので近似が可能である. 従って  $p, q$  が  $F$  により分離されない為の必要十分条件は,  $p, q$  が有限個の座標軸と平行な線分よりなる折れ線で  $F$  と交わらないもので結べることである. またこのとき必要ならば線分または線分の一部を消去することにより折れ線を構成する線分は隣り合うもの同士以外に交点を持たないようにすることが可能である. つまりこの折れ線は単純曲線であるとしてよい. このとき折れ線を構成する全ての線分が 1-cell であるような格子  $G$  を取り, これらの 1-cell の全てよりなる 1-chain を  $L$  と置けば,  $L$  に属する 1-cell は  $F$  と交わらないので  $|L| \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus F$  が成り立つ. よって  $\dot{L} = \{p\} + \{q\}$  in  $\hat{\mathbb{C}} \setminus F$  である.

逆にある格子  $G$  上で  $\{p\} \sim \{q\}$  in  $\hat{\mathbb{C}} \setminus F$  ならば  $\dot{L} = \{p\} + \{q\}$  かつ  $|L| \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus F$  を満たす 1-chain  $L$  が存在する. このとき Theorem 2.4.4 より  $p, q$  は  $L$  の同一の連結成分に含まれる. よって  $p, q$  は  $F$  により分離されない.  $\square$

## 2.7 基本補題 –組み合わせ的な Jordan の曲線定理–

基本補題と呼ばれる重要な定理を述べる. これは Riemann 球面  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  において 1-cycle はつねに 1-boundary であることを主張するものであり, 組み合わせ的な Jordan の曲線定理と呼ぶべきものである.

**Theorem 2.7.1** (基本補題). 1-cycle  $\Gamma$  について 2 つの 2-chain  $S, T$  で

$$\dot{S} = \dot{T} = \Gamma, \quad S + T = \Omega^2$$

をみだし,  $S$  は有界で  $T$  は非有界となるものが一意的存在する. またさらに  $\hat{\mathbb{C}}$  は互いに交わらない 3 つの集号の和

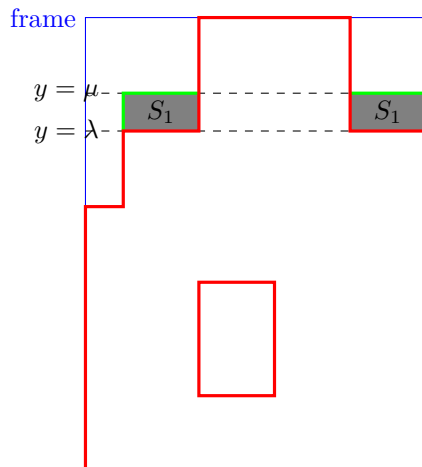
$$\hat{\mathbb{C}} = \text{Int } S \cup |\Gamma| \cup \text{Int } T$$

に分解される.

*Proof.* 2-chain が非有界であるとは非有界 2-cell を含むことであり, 有界とは非有界 2-cell を含まないことである. この事実と Theorem 2.5.2 より  $S, T$  の一意性は明らかであろう. また  $\Gamma = 0^1$  の場合は  $S = 0^2, T = \Omega^2$  となることに注意する.

それでは格子の枠を分割する縦, 横の線分の本数の和に関する帰納法を用いて  $S, T$  の存在を示そう. まず枠のみからなる格子において, 1-cycle は  $0^1$  と枠自身のみである. 実際 1-cycle  $\Gamma$  が  $R$  の辺を 1 つ含むとすると, その辺の頂点は奇頂点でないから, その辺と頂点を共有する辺も  $\Gamma$  に含まれることになり,  $R$  の 4 辺全てが  $\Gamma$  に含まれることになるからである. 前者の場合は  $0^2$  と  $\Omega^2$  が  $S, T$  を与え, 後者の場合は 2-cell  $R$  のみがなす 2-chain と外側の非有界 2-cell のみがなす 2-chain が, それぞれ  $S, T$  を与える.

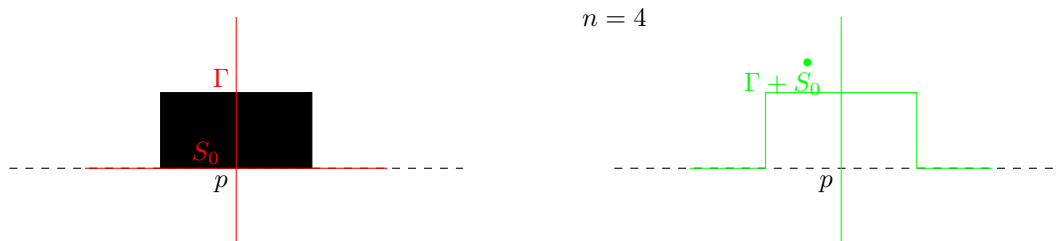
格子  $G$  については定理の主張が成り立つと仮定し,  $G$  に水平な分割線  $y = \lambda$  が追加された格子  $G'$  についても定理の主張が成り立つことを示そう. そこで  $\Gamma$  を  $G'$  の 1-cycle とする.  $G'$  の 2-cell で下の辺が  $\Gamma$  と分割線  $y = \lambda$  の両方に含まれるもの全てがなす 2-chain を  $S_1$  とする. このとき  $\Gamma + \dot{S}_1$  は,  $y = \lambda$  上にある辺を含まず  $G$  の 1-cycle とみなせることを示そう.



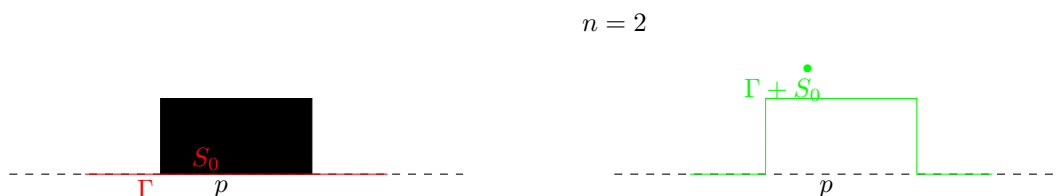
左図において,  $\Gamma$  は赤の折れ線,  $S_1$  は灰色に影をつけた部分で,  $y = \mu$  は  $y = \lambda$  のすぐ上の  $G$  の分割線である.

分割線  $y = \lambda$  上にあり  $\Gamma$  に属す辺 (このような辺が存在しなければ  $\Gamma$  は  $G$  の 1-cycle とみなせる) の頂点の 1 つを  $\{p\}$  と置く.  $\Gamma$  は  $G'$  の 1-cycle であるからすれば  $\{p\}$  を頂点に持ち  $\Gamma$  に属す辺の個数  $n$  は 2 または 4 である.  $S_0$  を  $\{p\}$  の左または右の辺が  $\Gamma$  に属す時, その辺を下辺とする (高々 2 つの) 2-cell がなす 2-chain とする.

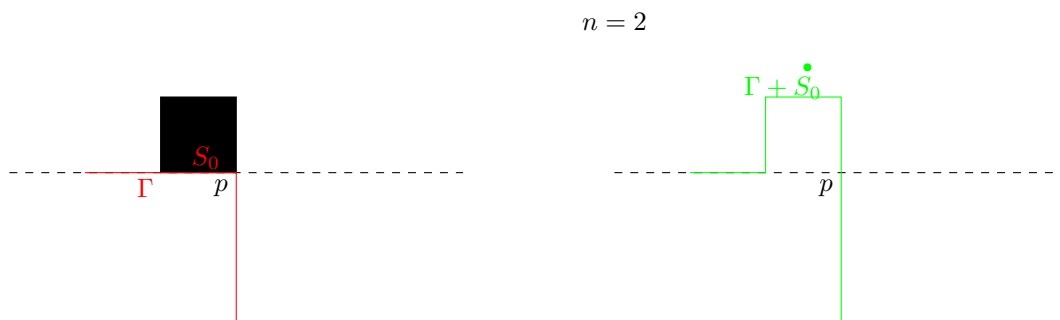
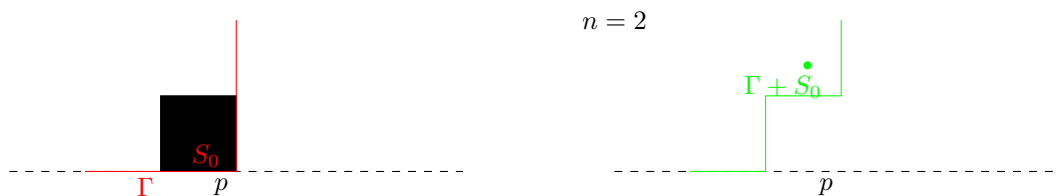
下図の左側のように  $n = 4$  の場合  $\{p\}$  の上, 下, 左, 右の辺が  $\Gamma$  に含まれる. 一方  $\Gamma$  に  $\dot{S}_0$  を加えると  $\{p\}$  の左, 右の辺が打ち消され, 上, 下の辺のみが  $p$  を共有する.



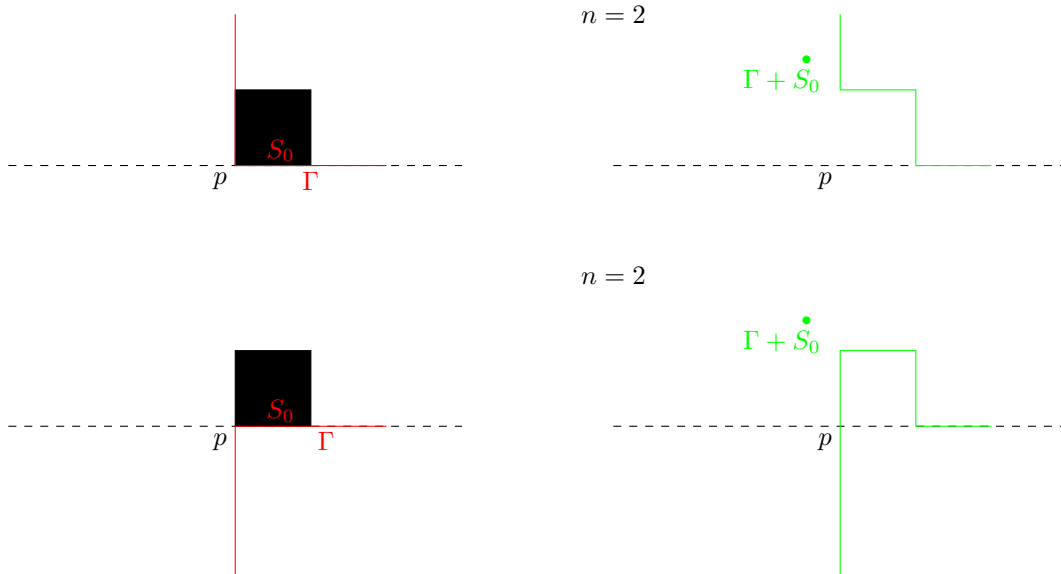
次に  $n = 2$  とし  $\{p\}$  の左右の辺が 2 つとも  $\Gamma$  に属す場合には下の図のようになる.



また  $n = 2$  で  $p$  の左, 右の辺のどちらか一方のみが  $\Gamma$  に属すときは下の図のようになる.







これら全ての場合において  $\{p\}$  は  $\Gamma + \dot{S}_0$  の頂点でなくなるか、または  $\{p\}$  の上, 下の辺の両方が  $\Gamma + \dot{S}_0$  に含まれ, 左, 右の辺の両方が  $\Gamma + \dot{S}_0$  に含まれなくなる. 分割線  $y = \lambda$  上にある  $\Gamma$  の全ての頂点について, このような操作を行ったのが  $\Gamma + \dot{S}_1$  である. (1-chain の和に関し, 結合法則が成り立つことより操作を行う順番はどのようにしても結果は同じである.) 従って  $\Gamma + \dot{S}_1$  は  $G$  の 1-cycle とみなしてよい. 従って帰納法の仮定より  $G$  の有界な 2-chain  $C$  で  $\dot{C} = \Gamma + \dot{S}_1$  をみたすものが存在することが分かる. このとき  $S = C + S_1$ ,  $T = \Omega^2 + S$  と置けば  $S, T$  は互いに相補的であり,  $S$  は有界,  $T$  は非有界である. また

$$\dot{S} = \dot{C} + \dot{S}_1 = \Gamma + \dot{S}_1 + \dot{S}_1 = \Gamma$$

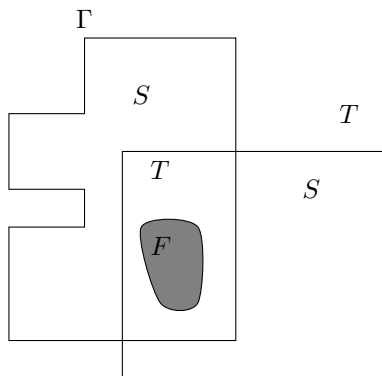
を満たす. ここで  $|S| \cup |T| = \hat{C}$  と  $|S|, |T|$  が閉集合であること及び  $\partial|S| = |\dot{S}| = |\Gamma|$ ,  $\partial|T| = |\dot{T}| = |\Gamma|$  より

$$\hat{C} = |S| \cup |T| = \text{Int } |S| \cup (\partial|S| \cup \partial|T|) \cup \text{Int } |T| = \text{Int } |S| \cup |\Gamma| \cup \text{Int } |T|$$

となり, 互いに素な和に分解される. □

次は基本補題より容易に導かれる.

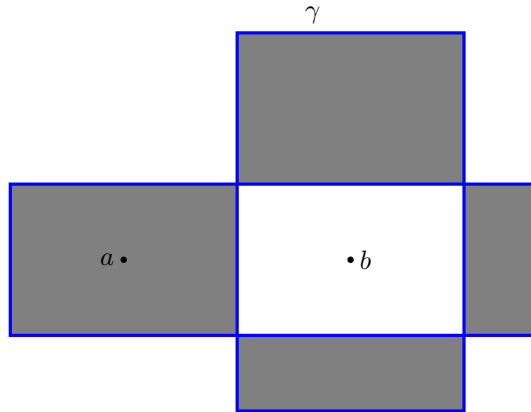
**Theorem 2.7.2.** 集合  $F \subset \hat{C}$  は連結で 1-cycle  $\Gamma$  と交わらない, つまり  $|\Gamma| \cap F = \emptyset$  を満たすとする. このとき  $\Gamma$  の囲む 2-chain の 1 つは  $F$  を含み, もうひとつは  $F$  と交わらない. 特に  $\Gamma \sim 0$  in  $\hat{C} \setminus F$  が成り立つ.



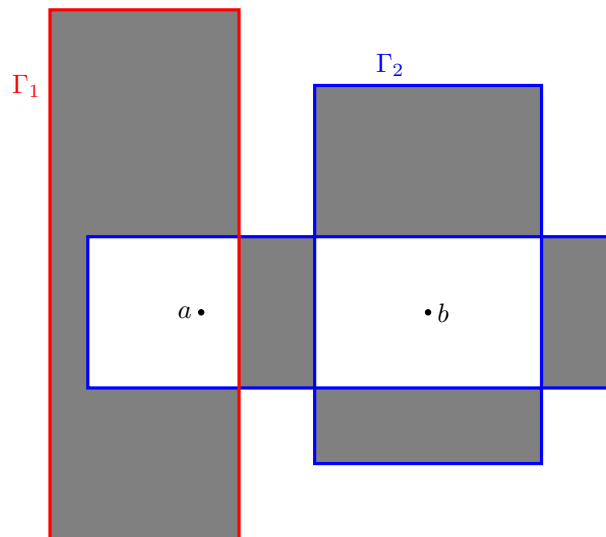
*Proof.*  $\Gamma$  の囲む 2 つの相補的な 2-chain を  $S, T$  と置けば  $\hat{C} = \text{Int } |S| \cup |\Gamma| \cup \text{Int } |T|$  (disjoint な和) と  $|\Gamma| \cap F = \emptyset$  より  $F \subset \text{Int } |S| \cup \text{Int } |T|$  (disjoint な和) が成り立つ.  $F$  は連結であるから,  $F \subset \text{Int } |S|$ , または  $F \subset \text{Int } |T|$  のどちらか一方が成り立つ.  $\square$

次は背理法を用いれば容易に証明される.

**Lemma 2.7.3.**  $a, b \in \hat{C}, a \neq b$  とする.  $\Gamma$  が  $\hat{C} \setminus \{a, b\}$  内の 1-cycle で  $\Gamma \not\sim 0$  in  $\hat{C} \setminus \{a, b\}$  ならば  $\Gamma$  の囲む 2 つの 2-chain の一方は  $a$  を内点として含み, 他方は  $b$  を内点として含む.



**Theorem 2.7.4.**  $a, b \in \hat{C}, a \neq b$  とする. このとき  $\Gamma_1, \Gamma_2$  がともに  $\hat{C} \setminus \{a, b\}$  内の 1-cycle であり  $\Gamma_j \not\sim 0$  in  $\hat{C} \setminus \{a, b\}, j = 1, 2$  ならば  $\Gamma_1 + \Gamma_2 \sim 0$  in  $\hat{C} \setminus \{a, b\}$  が成り立つ.



*Proof.*  $j = 1, 2$  について Lemma 2.7.3 より  $\Gamma_j$  の囲む 2 つの 2-chain の一方の軌跡は  $a$  を内点に持つ. それを  $S_j$  と置く. このとき  $a \notin |S_1 + S_2|$  である. また再び Lemma 2.7.3 より  $b \notin |S_j|, j = 1, 2$  であるから  $b \notin |S_1 + S_2|$  も成り立つ. ここで  $S_1 + S_2$  は  $\Gamma_1 + \Gamma_2 = (S_1 + S_2)^\bullet$  により囲まれる 2-chain であり,  $|S_1 + S_2| \subset \hat{C} \setminus \{a, b\}$  であるから  $\Gamma_1 + \Gamma_2 \sim 0$  in  $\hat{C} \setminus \{a, b\}$  である.  $\square$

**NOTES.** この章の内容は Newman の *Elements of the Topology of Plane Sets of Points* という本の第 5

章 §1 の紹介である。初版は [16] であり、第 2 版が [17] である。どちらも *show* が *shew* と書いてあったりしてビックリする。第 2 版の訳本が [18] である。同じ内容は *Henle* [7] 第 3 章 §13–16 にもあるが、明らかに *Newman* を種本としている。本章の内容は難しいわけではないが、何をやっているのかよく分からないところがあると思う。応用編である次章で、このモヤモヤした気分が解消されることを期待する。

## 第 3 章

# Alexander の補題と分離, 不分離定理

### 3.1 Alexander の補題と Janiszewski の定理

はじめに次の補題を考えよう.

**Lemma 3.1.1.**  $F_1, F_2$  をともに  $\hat{\mathbb{C}}$  内の閉集合で  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$  を満たすとする. このとき長方形格子  $G$  で  $G$  の全ての 2-cell  $s$  について  $s$  は  $F_1$  と  $F_2$  と同時に交わらない, つまり “ $s \cap F_1 = \emptyset$  または  $s \cap F_2 = \emptyset$  の少なくとも一方が成立する”ものが存在する.

*Proof.*  $F_1, F_2$  の少なくとも一方が空の時は明らかに成り立つので, 両方も空でないと仮定する.  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$  より  $F_1, F_2$  の少なくとも一方は  $\infty$  を含まない. ここでは  $\infty \notin F_1$  と仮定し議論を進めよう. このとき  $F_1$  は  $\mathbb{C}$  の有界な閉部分集合であるから, 辺が座標軸に平行な閉長方形  $R$  を  $F_1 \subset \text{Int } R$  となるように取ることが出来る. このとき  $R$  をどのように分割し格子を作っても非有界 2-cell は同一であり, この非有界 2-cell は  $F_1$  とは交わらない. また  $F_1 \cap (R \cap F_2) = \emptyset$  であり,  $F_1, R \cap F_2$  はともに有界な閉集合であるから

$$\delta = \text{dist}(F_1, R \cap F_2) (:= \inf\{|z - w| : z \in F_1, w \in R \cap F_2\}) > 0$$

である. そこで  $R$  を座標軸に平行な線分で分割し, 長方形格子  $G$  を作り  $G$  の全ての有界 2-cell  $s$  が

$$\text{diam } s := \sup\{|z - w| : z, w \in s\} < \delta$$

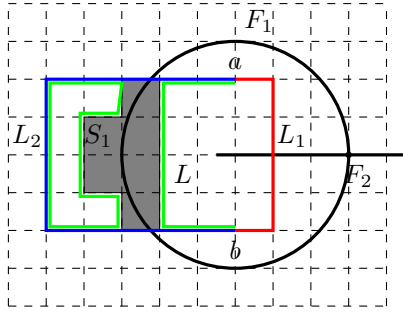
を満たすようにする. このとき  $s \cap F_1 \neq \emptyset$  かつ  $s \cap F_2 \neq \emptyset$  が成り立てば,  $\text{dist}(F_1, R \cap F_2) \leq \text{diam } s < \delta$  となり矛盾を生じる.  $\square$

次の定理の (i) は Alexander の補題と呼ばれ非常に強力な結果である. また (ii) はその部分的逆となっている.

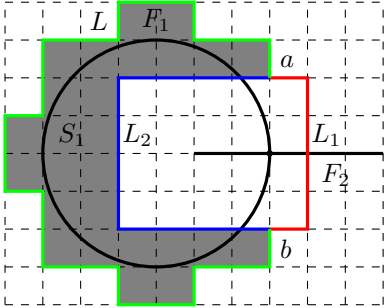
**Theorem 3.1.2.**  $F_1, F_2$  をともに  $\hat{\mathbb{C}}$  の空でない閉集合とし  $L_1, L_2$  は (ある格子  $G$  上の) 1-chain で  $\dot{L}_1 = \dot{L}_2$  をみたし,  $|L_1| \cap F_1 = |L_2| \cap F_2 = \emptyset$  とする. このとき

- (i)  $L_1 + L_2 \sim 0$  in  $\hat{\mathbb{C}} \setminus (F_1 \cap F_2)$  ならば (格子  $G$  の細分と, その細分上の) 1-chain  $L$  で  $\dot{L} = \dot{L}_1 (= \dot{L}_2)$  かつ  $|L| \cap (F_1 \cup F_2) = \emptyset$  を満たすものが存在する.
- (ii) また  $F_1, F_2$  が連結のとき 1-chain  $L$  で  $\dot{L} = \dot{L}_1 (= \dot{L}_2)$ ,  $|L| \cap (F_1 \cup F_2) = \emptyset$  を満たすものが存在すれば  $L_1 + L_2 \sim 0$  in  $\hat{\mathbb{C}} \setminus (F_1 \cap F_2)$  が成り立つ.

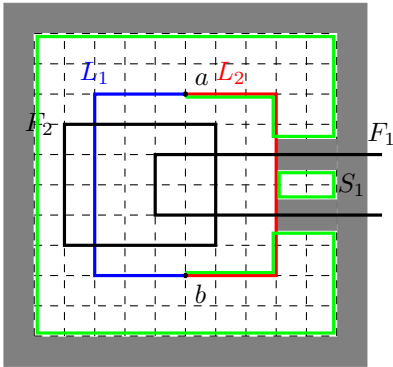
証明を読む前に, 以下のような図を自ら描いて (i) の主張を理解して頂きたい.



$F_1, F_2$  はそれぞれ黒い太線で描いた円と半直線である.  $L_1$  は赤線で示した 1-chain であり,  $L_2$  は青線で示した 1-chain である. このとき  $S$  は  $L_1$  と  $L_2$  で囲まれた長方形であり,  $F_1 \cap F_2$  (図中では 1 点よりなる) を含んでいないので  $L_1 + L_2 \sim 0$  in  $\hat{\mathbb{C}} \setminus F_1 \cap F_2$  である. 2-chain  $S_1$  は影をつけた部分で表されていて,  $S_2$  は  $S$  から  $S_1$  に属す 2-cell を取り除いて出来る 2-chain である. このとき  $L := L_2 + \dot{S}_1 = L_1 + \dot{S}_2$  となっていることと,  $L$  が  $F_1 \cap F_2$  と交わらないことを確認すること.



$F_1, F_2$  は上図と同じ, 黒太線の円と半直線である.  $L_1, L_2$  もそれぞれ 赤, 青で示した 1-chain である. この場合は  $L_1$  と  $L_2$  で囲まれた長方形の外部及び周が  $S$  であり, 非有界である. 2-chain  $S_1$  は影をつけた部分で表されていて,  $S_2$  は  $S$  から  $S_1$  に属す 2-cell を取り除いて出来る 2-chain である. 上図と同様に  $L := L_2 + \dot{S}_1 = L_1 + \dot{S}_2$  となっていることと,  $L$  が  $F_1 \cap F_2$  と交わらないことを確認すること.



$F_1, F_2$  はそれぞれ黒い太線で描いた逆コノ字型折れ線と長方形である.  $L_1$  は青線で示した 1-chain であり,  $L_2$  は赤線で示した 1-chain である.  $S$  は  $L_1$  と  $L_2$  で囲まれた長方形の外部及び周よりなり非有界である. 2-chain  $S_1$  は影をつけた部分で表されていて, 非有界 2-cell に幾つかの有界 2-cell が加わったものになる. このとき  $S_2$  が図中のどの部分になるか,  $L := L_2 + \dot{S}_1 = L_1 + \dot{S}_2$  となっていることと,  $L$  が  $F_1 \cap F_2$  と交わらないことなどを確認すること.

*Proof.* (i)  $(L_1 + L_2)^\bullet = \dot{L}_1 + \dot{L}_2 = 0^0$  であるから  $L_1 + L_2$  は 1-cycle である.  $L_1 + L_2 = 0^1$  の場合は  $L_1 = L_2$  であるから  $L = L_1$  と置けばよい. そうでないとき基本補題 (Theorem 2.7.1) より 1-cycle  $\Gamma := L_1 + L_2$  が囲む相補的な 2 つの 2-chain で両方とも  $\neq 0^2$  であるものが存在する. 仮定よりその一方は  $F_1 \cap F_2$  と交わらないので, それを  $S$  と置く. このとき  $(|S| \cap F_1) \cap (|S| \cap F_2) = |S| \cap (F_1 \cap F_2) = \emptyset$  が成り立つ. そこで Lemma 3.1.1 より格子  $G'$  を,  $G'$  の任意の 2-cell  $s$  は (有界, 非有界を問わず)  $|S| \cap F_1, |S| \cap F_2$  と同時に交わることがないように取ることが出来る.  $G''$  を  $G$  と  $G'$  の共通細分とすれば,  $G''$  の任意の 2-cell  $s$  は (有界, 非有界を問わず)  $|S| \cap F_1, |S| \cap F_2$  と同時に交わることがない. 以下, 格子  $G''$  のもとで考える.

$S$  に属する 2-cell の中で  $F_1$  と交わるもの全てがなす 2-chain を  $S_1$  と置き,  $S_2 = S + S_1$  と置く. このとき

$$S_1 + S_2 = S, \quad \dot{S}_1 + \dot{S}_2 = \dot{S} = L_1 + L_2$$

が成り立つ. ここで 1-chain  $L$  を  $L = L_2 + \dot{S}_1$  と置けば  $L_2 = \dot{S} + L_1$  と  $S_1 = S + S_2$  及び  $\dot{S} = L_1 + L_2$  より

$$L = L_2 + \dot{S}_1 = (\dot{S} + L_1) + \left( \dot{S} + \dot{S}_2 \right) = L_1 + \dot{S}_2$$

が成り立つ.  $L$  は  $\dot{L} = \dot{L}_2 + \dot{S}_1 = \dot{L}_2$  を満たすから  $|L| \cap (F_1 \cup F_2) = \emptyset$  を示せば証明は完了する.

$S_1$  の各 2-cell は  $F_1$  と交わるので、格子の取り方より  $F_2$  とは交わらない。よって  $|S_1| \cap F_2 = \emptyset$ 。また仮定より  $L_2 \cap F_2 = \emptyset$  ゆえ  $|L| \cap F_2 = |L_2 + \dot{S}_1| \cap F_2 = \emptyset$  である。次に 2-chain  $S_2 = S + S_1$  は、 $S$  から  $F_1$  と交わる 2-cell を除いたものであるから  $F_1$  とは交わらない。つまり  $|S_2| \cap F_1 = \emptyset$  が成り立つ。また仮定より  $L_1 \cap F_1 = \emptyset$  であるから  $|L| \cap F_1 = |L_1 + \dot{S}_2| \cap F_1 = \emptyset$  である。

(ii) 1-cycle  $L + L_1$  の軌跡は  $F_1$  と交わらず  $F_1$  は連結であるから  $L + L_1 \sim 0$  in  $\hat{\mathbb{C}} \setminus F_1$  である。従って特に  $L + L_1 \sim 0$  in  $\hat{\mathbb{C}} \setminus (F_1 \cap F_2)$  である。全く同様に  $L + L_2 \sim 0$  in  $\hat{\mathbb{C}} \setminus (F_1 \cap F_2)$  が成り立つので、合わせて  $L + L_2 = (L + L_1) + (L + L_2) \sim 0$  in  $\hat{\mathbb{C}} \setminus (F_1 \cap F_2)$  が成り立つ。□

Alexander の補題の主張は 1-cycle や homologous などの組み合わせ的な概念を含んでいるが、これらを消去して純位相的な主張にしたのが、次の Janiszewski の定理である。(東北大の須川先生よりヤニシェフスキーと読むと教えて頂きました。感謝致します。)

**Theorem 3.1.3** (Janiszewski の定理).  $F_1, F_2$  をともに  $\hat{\mathbb{C}}$  の空でない閉集合とする。このとき 2 点  $p, q \in \mathbb{C}$  が閉集合  $F_1, F_2$  のそれぞれにより分離されず、 $F_1 \cap F_2$  が連結または空ならば  $p, q$  は  $F_1 \cup F_2$  によっても分離されない。

*Proof.* 格子  $G$  とその上の 1-chain  $L_j, (j = 1, 2)$  を  $\dot{L}_j = \{p\} + \{q\}$  かつ  $|L_j| \cap F_j = \emptyset$  となるように取る。このとき  $\Gamma := L_1 + L_2$  は 1-cycle であり、 $|\Gamma| \cap (F_1 \cap F_2) \subset |L_1 + L_2| \cap (F_1 \cap F_2) \subset (|L_1| \cap F_1) \cup (|L_2| \cap F_2) = \emptyset$  が成り立つ。従って  $\Gamma$  の囲む 2 つの相補的な 2-chain を  $S, T$  と置けば  $F_1 \cap F_2 \subset \text{Int } |S| \cup \text{Int } |T|$  が成り立つ。 $F_1 \cap F_2$  は連結ゆえ  $F_1 \cap F_2 \subset \text{Int } |S|$   $F_1 \cap F_2 \subset \text{Int } |T|$  のどちらか一方が成り立つ。前者の場合は  $\text{Int } |T| \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus F_1 \cap F_2$  が成り立ち、後者の場合は  $\text{Int } |S| \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus F_1 \cap F_2$  が成り立つので、どちらの場合でも  $L_1 + L_2 \sim 0$  in  $\hat{\mathbb{C}} \setminus (F_1 \cap F_2)$  である。従って Alexander の補題より  $G$  の細分とその上の 1-chain  $L$  で  $\dot{L} = \dot{L}_1 = \{p\} + \{q\}$  かつ  $|L| \cap (F_1 \cup F_2) = \emptyset$  を満たすものが存在する。従って Theorem 2.6.7 より  $p, q$  は  $F_1 \cup F_2$  により分離されない。□

次の系において  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$  の場合は Phragmen-Brouwer の定理と呼ばれる。

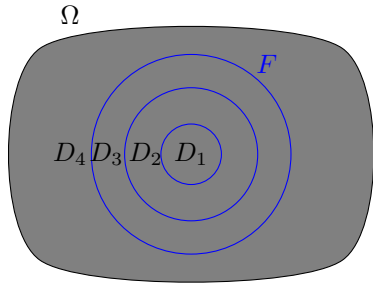
**Corollary 3.1.4.**  $\hat{\mathbb{C}}$  の 2 つの閉集合  $F_1, F_2$  について  $\hat{\mathbb{C}} \setminus F_1, \hat{\mathbb{C}} \setminus F_2$  が連結で、 $F_1 \cap F_2$  が連結または空ならば  $\hat{\mathbb{C}} \setminus (F_1 \cup F_2)$  も連結である。

*Proof.*  $\Omega_1 = \hat{\mathbb{C}} \setminus F_1, \Omega_2 = \hat{\mathbb{C}} \setminus F_2$  と置く。任意の  $a, b \in \Omega_1 \cap \Omega_2$  について  $a, b$  は  $F_1$  により分離されず、 $F_2$  によっても分離されない。そして  $F_1 \cap F_2$  が空または連結であるから Janiszewski の定理により  $a, b$  は  $F_1 \cup F_2$  により分離されない。従って  $a, b$  は  $F_1 \cup F_2$  と交わらない折れ線で結ぶことが出来る。つまり  $a, b$  は  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  内の折れ線で結ぶことが出来る。よって  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  は弧状連結な開集合であり、従って領域である。□

**Corollary 3.1.5.**  $\Omega_1, \Omega_2$  を  $\hat{\mathbb{C}}$  の部分領域としそれらの補集合  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega_1, \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega_2$  の共通部分が空または連結ならば  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  も領域である

演習問題を 2 つ与えておこう。

**Exercise 3.1.6.**

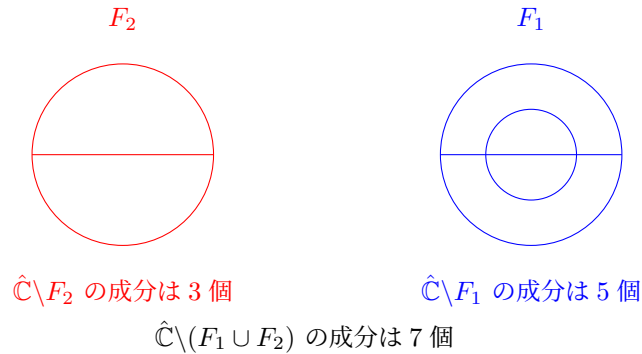


$\Omega$  を  $\hat{\mathbb{C}}$  内の領域,  $F$  を閉集合とし  $F \subset \Omega$  をみたすとする. また  $\hat{\mathbb{C}} \setminus F = \bigcup_j D_j$  を連結成分への分解とする. このとき 任意の  $j$  について  $\Omega \cap D_j \neq \emptyset$  であり,  $\Omega \cap D_j$  は  $\Omega \setminus F$  の連結成分である. さらに  $\Omega \setminus F = \bigcup_j (\Omega \cap D_j)$  が連結成分への分解を与えることを示せ.

**Exercise 3.1.7.**  $F_1, \dots, F_p, p \in \mathbb{N}$  を  $p$  個の空でない連結閉集合で互いに交わらないとする. また 各  $j = 1, \dots, p$  について  $\hat{\mathbb{C}} \setminus F_j$  の連結成分は  $n_j$  個とすると  $\hat{\mathbb{C}} \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_p)$  の連結成分の個数は

$$1 + \sum_{j=1}^p (n_j - 1)$$

であることを示せ.



### 3.2 不分離定理と分離定理

曲線  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  が  $1:1$  であるとき  $\mathbb{C}$  内の単純弧 (simple arc) または Jordan 弧 (Jordan arc) と呼ばれる.

**Theorem 3.2.1** (Jordan Arc Theorem).  $J$  が単純弧の像ならば  $\mathbb{C} \setminus J$  は連結で領域をなす.

*Proof.*  $\mathbb{C} \setminus J$  が連結でないと仮定して矛盾を導こう. このとき 2 点  $p, q$  を  $\mathbb{C} \setminus J$  の異なる成分に属すように取る. また連続な単射  $\alpha : [0, 1] \rightarrow J (\subset \mathbb{C})$  を取り  $J_0 = J$  と置く.

さて  $\alpha([0, 1/2])$  と  $\alpha([1/2, 1])$  はともに連結閉集合であり  $\alpha([0, 1/2]) \cap \alpha([1/2, 1]) = \{\alpha(1/2)\}$  は連結である. 従って Janiszewski の定理より, 少なくとも一方は  $p, q$  を分離する. 分離する方を  $J_1$  と置く.  $J_1$  についても同じ操作を行い,  $J_1$  の部分弧  $J_2$  を  $p, q$  を分離するように取る. この操作を続けると  $J_n$  は  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\alpha$  の連続性より, ある 1 点  $a$  に収束する.  $p$  と  $q$  を  $a$  を通らない曲線で結び, その曲線と  $a$  と最短距離を  $r > 0$  とすれば,  $J_n \subset \overline{\mathbb{D}}(a, r)$  を満たす  $n$  (ある番号以上の全ての番号が満たす) について  $p, q$  は  $J_n$  により分離されないことになり, 矛盾を生じる.  $\square$

Jordan Arc Theorem において  $\alpha$  の定義域が区間  $[0, 1]$  である必要はない. 証明が成立する為に必要な

は、定義域  $E = E_0$  が  $E_0 = F_1 \cup F_2$  と 2 つの閉集合で  $F_1 \cup F_2$  が連結であるように分割できること。さらに  $E_1$  を  $F_1$  または  $F_2$  の  $p, q$  を分離する方と置くとき、 $E_1$  についてもこのような分解を行なうことができ、さらにこの操作が何度でも続けて行くことが可能であり、そして  $\{E_j\}_{j=0}^\infty$  の部分列で、 $E$  の 1 点に収束するものが存在することである。例えば  $\mathbb{R}^n$  の閉立方体  $\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_k \leq 1, k = 1, \dots, n\}$  ならばこの条件を満たす。

**Theorem 3.2.2** (不分離定理).  $C$  を  $\mathbb{R}^n$  内の閉立方体とし写像  $\alpha : C \rightarrow \mathbb{C}$  が連続な単射ならば  $\mathbb{C} \setminus \alpha(C)$  は連結で領域をなす。

言うまでもないと思うが、不分離定理は閉立方体と同相な集合の連続像についても成り立つ。

Alexander の補題 (Theorem 3.1.2 (i)) は Janiszewski の定理を経由し、2 点が単純弧により分離されないことを意味する不分離定理に応用できた。同様に Alexander の補題の部分的逆 (Theorem 3.1.2 (ii)) のアイデアはある条件を満たす閉集合により分離される 2 点の存在を主張する分離性定理に応用が可能である。ここでは準備として  $k$ -chain ( $k = 1, 2$ ) の正則性の概念と 2-chain に関する肥厚の概念を導入し、その後に分離性について解説する。

**Definition 3.2.3.** 格子  $G$  上の頂点  $p$  が 1-chain  $L$  の非正則頂点であるとは  $p$  を端点に持ち  $L$  に属す辺が 3 本以上あるときを言う。1-chain  $L$  が非正則頂点を持たない時、 $L$  は正則と呼ばれる。また 2-chain  $S$  について  $\dot{S}$  の非正則頂点のことを  $S$  の非正則頂点と言うことにし、2-chain  $S$  が正則であるとは非正則頂点を持たないことと定義する。つまり 1-cycle  $\dot{S}$  が正則であるである。ここで  $\dot{S}$  は 1-cycle であり奇頂点を持たないので  $p$  が  $S$  の非正則頂点であるとは  $p$  を端点とし  $\dot{S}$  に属する辺が 4 本ある場合に他ならない。従って  $S$  の非正則頂点  $p$  は  $G$  の枠  $\partial R$  上ではなく、 $\text{Int } R$  内にあり

”  $p$  を頂点として持つ 4 つの 2-cell で対角の位置にある 2 つが  $S$  に属し、残りの 2 つが  $S$  に属さない”

が成り立つ。



図 3.2.1:  $R$  の内側にある非正則頂点

$L$  が正則な 1-cycle ならば  $L$  の連結成分は “1-cell よりなる単純弧”, または “1-cell よりなる単純閉曲線” とみなすことが出来る。この事実については第 6 章で証明し、応用を行うが、本節ではあからさまな形では用いない。

**Lemma 3.2.4.** 2-chain  $S$  が正則ならば  $S$  の任意の連結成分も正則である。また 1-chain  $L$  が正則ならば  $L$  の任意の連結成分も正則である。

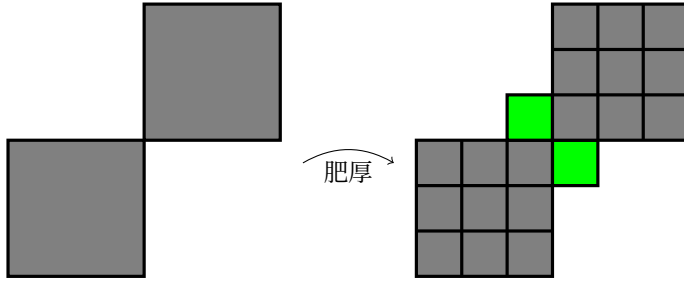
*Proof.* 後半についても同様であるから、前半のみ示しておこう。  $C$  を正則な 2-chain  $S$  の成分とする。このとき  $|C| \cap \partial R = \emptyset$  は明らかに成り立つ。そこで  $C$  が非正則頂点  $p$  を持つと仮定する。

図 3.2.1 において影のついた 2-cell が  $C$  に属し、影がつかない 2-cell が  $C$  に属さないとする。このとき影のつく 2-cell は  $S$  にも属すことは明らかであり、さらに影のつかない 2-cell  $s$  は  $S$  に属すことはない。実際



$s \in S$  ならば  $s$  は  $|C|$  と点を共有する連結集合であるから  $|C| \cup s$  も連結であり  $|C| \cup s \subset |S|$  を満たす. これは成分  $|C|$  の最大性に反する. 従って  $p$  は  $S$  の非正則頂点となり  $S$  の正則性に反する.  $\square$

$p$  が 2-chain  $S$  の非正則頂点ならば  $p$  は枠の内部にあり  $p$  を頂点とする  $G$  の 2-cell は 4 つで, 図 3.2.1 のように対角の位置の一組が  $S$  に属し, 残りは  $S$  に属さない. このとき  $p$  を頂点とする 4 つの 2-cell を 3 本以上の水平線, 同じく 3 本以上の垂直線で分割し, 格子を細分する. この細分における 2-cell で  $p$  を頂点とし, (細分上で考えた)  $S$  に属さない 2-cell が 2 つあるので, これらを  $S$  に加える. このような操作を  $S$  の非正則頂点全てに行って得られる  $G$  のある細分  $G^*$  上の 2-chain  $S^*$  を  $S$  の肥厚 (thickening) と呼ぶ. 作り方から分かるように  $S^*$  は正則である.



左の図の影のついた 2 つの長方形が  $S$  に属す 2-cell であり, 右の図の緑の小長方形が肥厚を行う際に  $S$  に新しく付け加わる 2-cell. このとき  $G$  の相異なる頂点を含む  $G^*$  の 2-cell は交わらない.

**Proposition 3.2.5.**  $F_1, F_2$  を  $\hat{C}$  の連結閉集合とし  $p_1, q_1, \dots, p_j, q_j \in \mathbb{C}, j \in \mathbb{N}$  とする. また  $L_1, L_2$  を 1-chain で

$$\dot{L}_1 = \dot{L}_2 = \{p_1\} + \{q_1\} + \dots + \{p_j\} + \{q_j\}, \quad L_1 \cap F_1 = \emptyset = L_2 \cap F_2$$

をみたすとする. このとき  $L_1 + L_2 \not\sim 0$  in  $\hat{C} \setminus (F_1 \cap F_2)$  ならば, 少なくとも 1 つの  $i = 1, \dots, j$  について  $p_i$  と  $q_i$  は  $F_1 \cup F_2$  により分離される.

*Proof.* 全ての  $i = 1, \dots, j$  について  $p_i$  と  $q_i$  が  $F_1 \cup F_2$  により分離されないとすれば 1-chain  $M_i$  で  $\dot{M}_i = \{p_i\} + \{q_i\}$  かつ  $|M_i| \cap (F_1 \cup F_2) = \emptyset$  を満たすものが取れる. このとき  $L_1 + M_1 + \dots + M_j$  は 1-cycle で  $F_1$  と交わらない. 仮定より  $F_1$  は連結であるから  $L_1 + M_1 + \dots + M_j$  の囲む 2 つの相補的な 2-chain の一方に  $F_1$  は含まれ, もう一方は  $F_1$  と交わらない. つまり  $L_1 + M_1 + \dots + M_j \sim 0$  in  $\hat{C} \setminus F_1$  が成り立つ. これより特に

$$L_1 + M_1 + \dots + M_j \sim 0 \quad \text{in} \quad \hat{C} \setminus (F_1 \cap F_2)$$

が従う. 全く同様に

$$L_2 + M_1 + \dots + M_j \sim 0 \quad \text{in} \quad \hat{C} \setminus (F_1 \cap F_2)$$

が成り立つので, これらを合わせて

$$L_1 + L_2 = (L_1 + M_1 + \dots + M_j) + (L_2 + M_1 + \dots + M_j) \sim 0 \quad \text{in} \quad \hat{C} \setminus (F_1 \cap F_2)$$

が成り立つことになり, 矛盾を生じる.  $\square$

Proposition 3.2.5 の仮定のように  $\dot{L}_1 = \dot{L}_2 = \{p_1\} + \{q_1\} + \dots + \{p_j\} + \{q_j\}, L_1 \cap F_1 = \emptyset = L_2 \cap F_2$  という状況はいささか考え難いであろうが, 次の定理の証明中の図を見れば了解できるであろう.

**Theorem 3.2.6 (分離定理).**  $\hat{C}$  における 2 つの連結閉集合  $F_1, F_2$  の共通部分  $F_1 \cap F_2$  が空でなく連結でなければ,  $F_1$  (または  $F_2$ ) で分離されず,  $F_1 \cup F_2$  で分離される 2 点が存在する. 特に開集合  $\hat{C} \setminus (F_1 \cup F_2)$  は 2 つ以上の連結成分を持つ.

*Proof.* はじめに  $F_i \subsetneq \hat{C}$ ,  $i = 1, 2$  を示しておこう. 実際, 例えば  $F_1 = \hat{C}$  とすると  $F_2 = F_1 \cap F_2$  は連結でありかつ連結でないことになり矛盾を生じる.

$F_1 \cap F_2$  は空でなく連結でない閉集合であるから分割が存在する. つまり 2 つの空でない閉集合  $H_1, H_2$  で  $F_1 \cap F_2 = H_1 \cup H_2$ ,  $H_1 \cap H_2 = \emptyset$  を満たすものが存在する.  $H_1, H_2$  の少なくとも一方は有界であるから, 以下では  $H_1$  が有界であるとし, 座標軸と平行で長さが  $\ell$  の 4 辺を持つ正方形  $R$  を  $H_1 \subset \text{Int } R$  となるように取る. そして

$$\frac{\ell}{n} < \min\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}} \text{dist}(H_1, H_2), \text{dist}(H_1, \partial R)\right\}$$

を満たす  $n$  を用いて  $n$  等分した格子  $G$  を作る. このとき非有界 2-cell は  $H_1$  とは交わらない. また有界 2-cell の直径は  $\frac{\sqrt{2}\ell}{n}$  であり  $\text{dist}(H_1, H_2)$  より小さいので  $H_1$  と  $H_2$  に同時に交わることはない. 従って  $G$  のどの 2-cell も  $H_1, H_2$  と同時に交わることはない.

$S$  を  $H_1$  と交わる 2-cell 全てがなす 2-chain とし,  $T = \Omega_2 + S$  と置く.  $\frac{\ell}{n} < \text{dist}(H_1, \partial R)$  より  $S$  に属する 2-cell は  $\partial R$  とは交わらず,  $S \subset \text{Int } R$  が成り立つ. また  $\frac{\ell}{n} < \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{dist}(H_1, H_2)$  より

(3.2.1) 各  $s \in S$  と点を共有する 8 つの 2-cell は  $H_2$  と交わることはない.

ここで  $S$  が非正則頂点を持てば肥厚を行い  $G$  の細分  $G^*$  と  $S$  の肥厚である  $G^*$  上の正則 2-chain  $S^*$  を得たとする. 新しく  $S$  に付け加わった 2-cell は (3.2.1) より  $H_1$  と  $H_2$  とも交わらない.  $T^* = \Omega^2 + S^*$  と置く. このとき  $S$  の作り方から

$$H_1 \subset \text{Int } |S| \subset \text{Int } |S^*| \quad \text{and} \quad H_2 \subset \text{Int } |T|$$

が成り立つ. また肥厚の操作により追加された 2-cell は  $H_1 \cup H_2$  と交わらないので

$$H_2 \subset \text{Int } |T^*|$$

が成り立つ.

ここで  $\Gamma = \overset{\bullet}{S^*} = \overset{\bullet}{T^*}$  と置けば  $H_1 \subset \text{Int } |S^*|$ ,  $H_2 \subset \text{Int } |T^*|$  より  $|\Gamma| \cap (H_1 \cup H_2) = \emptyset$  であり

$$\Gamma \not\sim 0 \quad \text{in} \quad \hat{C} \setminus (H_1 \cup H_2) = \hat{C} \setminus (F_1 \cap F_2)$$

が成り立つ. このとき Theorem 2.6.2 (iii) より  $\Gamma$  の連結成分  $\Gamma_0$  で

$$\Gamma_0 \not\sim 0 \quad \text{in} \quad \hat{C} \setminus (H_1 \cup H_2) = \hat{C} \setminus (F_1 \cap F_2)$$

となるものが存在する. ここで  $\Gamma_0$  の囲む相補的な 2 つの 2-chain を  $S_0, T_0$  と置けば  $\Gamma_0 = \overset{\bullet}{S_0} = \overset{\bullet}{T_0}$  であり,  $|\Gamma_0| \cap (F_1 \cap F_2) \subset |\Gamma| \cap (F_1 \cap F_2) = \emptyset$  より  $F_1 \cap F_2 \subset \text{Int } |S_0| \cup \text{Int } |T_0|$  であるが

(3.2.2)  $\text{Int } |S_0| \cap (F_1 \cap F_2) \neq \emptyset \quad \text{and} \quad \text{Int } |T_0| \cap (F_1 \cap F_2) \neq \emptyset$

が成り立つ. 何故ならば, 少なくとも一方が空になれば  $\Gamma_0 \not\sim 0$  in  $\hat{C} \setminus (F_1 \cap F_2)$  に反するからである.

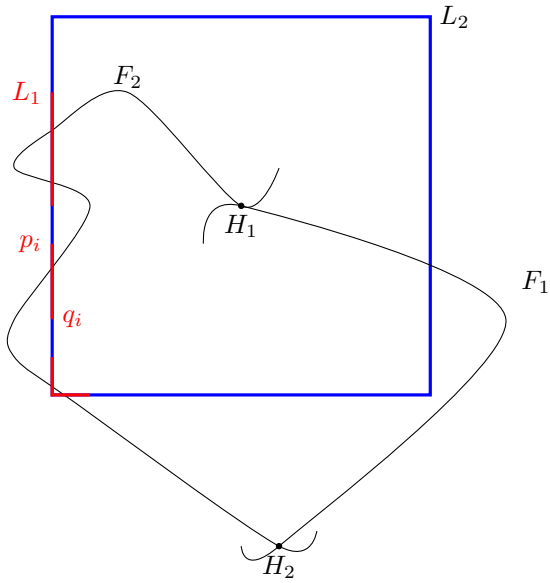


図 3.2.2

さて  $|\Gamma_0| \cap (F_1 \cap F_2) = \emptyset$  であるから,  $G^*$  の細分  $\tilde{G}$  を  $\tilde{G}$  上のどの 2-cell も  $|\Gamma_0| \cap F_1$ ,  $|\Gamma_0| \cap F_2$  と同時に交わらないように取れる. 以下では  $\tilde{G}$  のもとで考えることにする.

$L_1$  を  $\Gamma_0$  に属す 1-cell で  $F_2$  と交わるものの全てよりなる 1-chain とし,  $L_2 = \Gamma_0 + L_1$  と置く. このとき

$$|L_1| \cap F_1 = \emptyset, \quad |L_2| \cap F_2 = \emptyset \quad \text{and} \quad L_1 + L_2 = \Gamma_0 \not\sim 0 \quad \text{in} \quad \hat{\mathbb{C}} \setminus (F_1 \cap F_2)$$

が成り立つ. また  $F_2$  の連結性と (3.2.2) より  $F_2 \cap |\Gamma| \neq \emptyset$  であるから  $L_1 \neq 0^1$  であり, 同様に  $F_1$  の連結性と (3.2.2) より  $L_2 \neq 0^1$  である. これより

$$\dot{L}_1 \neq 0^0$$

が次のようにして分かる. まず  $S^*$  は正則な 2-chain であるから  $\Gamma = \dot{S}^*$  は正則な 1-cycle である. そして  $\Gamma_0$  は  $\Gamma$  の成分であるから, やはり正則な 1-cycle であり, 連結である. よって  $L_1$  に属す辺  $e_0$  から出発し  $L_2$  に属す辺  $e_n$  で終わるように  $\Gamma_0$  の辺を並べ, 隣り合うもの同士が頂点を共有するように出来る.

$$L_1 \ni e_0, e_1, \dots, e_n \in L_2, \quad e_{k-1} \cap e_k \neq \emptyset, \quad k = 1, \dots, n$$

このとき少なくとも 1 つの  $k$  について  $e_{k-1} \in L_1$ ,  $e_k \in L_2$  を満たすものが存在する.  $\Gamma_0$  の正則性より  $e_{k-1}$  と  $e_k$  の共有頂点  $p$  を端点を持つ  $\Gamma_0$  の辺は  $e_{k-1}$  と  $e_k$  の他には存在しない. 従って  $p \in \dot{L}_1 \cap \dot{L}_2$  である.

さて 1-chain の奇頂点の個数は偶数個であるから

$$\dot{L}_1 = \{p_1\} + \{q_1\} + \dots + \{p_j\} + \{q_j\}$$

と並べられたとする. 但し必要ならば  $L_1$  を成分に分解してから境界を取ることににより各  $i = 1, \dots, j$  について  $\{p_i\}$ ,  $\{q_i\}$  は  $L_1$  の同一の成分に属するとしてよい. ここで  $|L_1| \cap F_1 = \emptyset$  であるから  $p_i, q_i$  は  $\hat{\mathbb{C}} \setminus F_1$  の同一の成分に属する, つまり  $F_1$  で分離されない. しかしながら Proposition 3.2.5 より, 少なくとも 1 つの  $i$  について  $p_i, q_i$  は  $F_1 \cup F_2$  により分離される.  $\square$

さて上の証明において  $F_1 \cap F_2$  が連結でなければ  $\hat{\mathbb{C}} \setminus (F_1 \cup F_2)$  は空でないことも示している. 従って次の定理が成り立つ.

**Theorem 3.2.7.**  $\hat{\mathbb{C}}$  における 2 つの空でない連結閉集合  $F_1, F_2$  について  $F_1 \cup F_2 = \hat{\mathbb{C}}$  ならば  $F_1 \cap F_2$  は連結である.

Jordan Arc Theorem (Theorem 3.2.1) と分離定理 (Theorem 3.2.6) があれば, Jordan の曲線定理の証明まではもう一息であるが, それは次章にしよう.

**NOTES.** この章の内容は *Newman* の著書 [16] (初版) [17] (第 2 版) と訳本 [18] の第 5 章 §2 の紹介である. 同じ内容は *Henle* [7] 第 3 章 §17–16 にもある. *Janiszewski* の定理のように一見ただけでは当たり前に見えるものの, どうやって証明したらよいか道筋がさっぱり見えない結果が, 組み合わせ的手法により鮮やかに導かれる部分を味わって頂きたい.

## 第 4 章

# 領域の不変性と Jordan の曲線定理

### 4.1 領域の不変性

次の定理は中間値の定理を応用することにより示される。証明は演習問題とする。

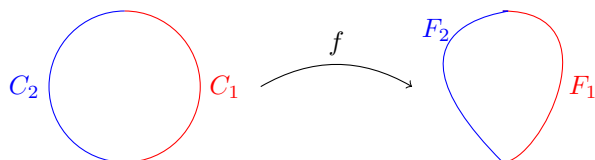
**Theorem 4.1.1.**  $(a, b)$  を空でない开区間とし  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  を連続な単射とすれば  $f$  は開写像である。これより特に  $f((a, b))$  も連結開集合であり  $(c, d) = f((a, b))$  の形に表すことができ  $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$  は同相写像である。

**Exercise 4.1.2.** *Theorem 4.1.1* を証明せよ。

$\mathbb{C}$  においても領域の不変性 (invariance of domain) と呼ばれ、上と同様な定理が成り立つ。その証明には Jordan の曲線定理の主張の 1 部分をなす次の結果が必要である。連続な単射  $f : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  のことを単純閉曲線または Jordan 曲線と呼ぶ。また定義域を  $\partial\mathbb{D}$  から  $[0, 1]$  に取り替えた場合、連続写像  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  が  $\gamma(0) = \gamma(1)$  であり、かつ  $0 \leq s < t < 1$  を満たす任意の  $s, t$  について  $\gamma(s) \neq \gamma(t)$  が成り立つとき Jordan 曲線と呼ぶことにする。

**Theorem 4.1.3** (Jordan の分離定理). 集合  $J$  が Jordan 曲線の像ならば  $\mathbb{C} \setminus J$  の連結成分は 2 つ以上である。

*Proof.* 連続な全単射  $f : \partial\mathbb{D} \rightarrow J$  を取り、 $\partial\mathbb{D}$  を右側の閉半円弧  $C_1$  と左側の閉半円弧  $C_2$  に分け  $F_j = f(C_j)$  と置く。このとき  $J = F_1 \cup F_2$  であり、 $F_1, F_2$  は連結であるが  $F_1 \cap F_2$  は 2 点よりなり連結ではない。そこで分離定理 (Theorem 3.2.6) を適用すれば直ちに従う。



□

**Theorem 4.1.4** (Invariance of Domain).  $V$  を  $\mathbb{C}$  の空でない開集合とし、写像  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$  は連続な単射とする。このとき  $f$  は開写像であり、特に  $f(V)$  は開集合で  $f : V \rightarrow f(V)$  は同相写像である。

*Proof.*  $f$  が開写像であること示せば、主張の後半部分は直ちに従う。実際、単射性より  $f^{-1} : f(V) \rightarrow V$  が定

義されるが任意の開集合  $U \subset V$  について  $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$  も開集合であるから  $f^{-1}$  は連続であり、従って  $f$  は同相写像である。

$f$  が開写像であることを示すには  $\bar{D} \subset V$  を満たす任意の開円板  $D$  について  $f(D)$  が開集合であることを示せば十分である。まず  $f$  の単射性より  $f(\partial D)$  と  $f(D)$  は交わらない。従って連結集合  $f(D)$  について  $f(D) \subset G$  を満たす  $\mathbb{C} \setminus f(\partial D)$  の成分  $G$  が存在する。このとき  $f(D) = G$  が成り立つことを示そう。これが示されれば  $\mathbb{C}$  の開集合の連結成分は開集合であるから  $G = f(D)$  も開集合である。

さて  $a \in G \setminus f(D)$  が存在すれば  $a \notin f(D)$  と  $a \notin f(\partial D)$  より  $a \notin f(\bar{D})$  である。ここで  $f|_{\partial D} : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$  は Jordan 曲線とみなせるので Theorem 4.1.3 より  $\mathbb{C} \setminus f(\partial D)$  には  $G$  以外の成分  $G'$  が存在する。そこで点  $b \in G'$  を任意に取れば 2 点  $a, b$  を含む  $\mathbb{C} \setminus f(\partial D)$  の連結な部分集合は存在しない。一方、 $b \notin f(\bar{D})$  であるから  $a, b \in A := \mathbb{C} \setminus f(\bar{D})$  であるが不分離定理 (Theorem 3.2.2) より  $A = \mathbb{C} \setminus f(\bar{D})$  は  $\mathbb{C}$  は連結であり

$$a, b \in A = \mathbb{C} \setminus f(\bar{D}) \subset \mathbb{C} \setminus f(\partial D)$$

を満たす。これは上の下線部に矛盾する。従って  $G \setminus f(D) = \emptyset$  であり  $f(D) = G$  が成り立つ。  $\square$

## 4.2 Jordan の曲線定理

それでは Jordan の曲線定理を証明しよう。

**Theorem 4.2.1** (Jordan Curve Theorem).  $J$  が単純閉曲線の像ならば、開集合  $\mathbb{C} \setminus J$  の成分は非有界なもの 1 つと有界なもの 1 つの丁度 2 つであり、 $J$  は各々の境界と一致する。

*Proof.* 相異なる 2 点  $a, b \in J$  を任意にとり、 $J$  を単純弧  $J_1, J_2$  に分ける。

1.  $\mathbb{C} \setminus J$  の成分が 2 つ以下であることを背理法により示そう。3 点  $p, q, r$  が  $\mathbb{C} \setminus J$  の相異なる成分に属すと仮定する。不分離定理より  $\mathbb{C} \setminus J_i, i = 1, 2$  は領域であるから  $i = 1, 2$  について 1-chain  $L_i$  を  $\dot{L}_i = \{p\} + \{q\}$  かつ  $|L_i| \cap J_i = \emptyset$  となるように取れる。このとき Alexander の補題 (Theorem 3.1.2 (i)) より

$$L_1 + L_2 \not\sim 0 \text{ in } \hat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b\}$$

が成り立つ。実際もし  $\sim 0$  ならば  $J = J_1 \cup J_2$  と交わらない 1-chain  $L$  で  $\dot{L} = \{p\} + \{q\}$  を満たすものが存在することになり  $p, q$  が  $\mathbb{C} \setminus J$  の異なる成分に属するという仮定に反する。同様に  $i = 3, 4$  についても 1-chain  $L_i$  を  $\dot{L}_i = \{q\} + \{r\}$  かつ  $|L_i| \cap J_{i-2} = \emptyset$  が成り立つように取れ

$$L_3 + L_4 \not\sim 0 \text{ in } \hat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b\}$$

が成り立つ。よって Theorem 2.7.4 より

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \sim 0 \text{ in } \hat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b\}$$

が成り立つ。ここで 2 つの 1-chain  $L_1 + L_3, L_2 + L_4$  は  $(L_1 + L_3)^\bullet = \{p\} + \{r\} = (L_2 + L_4)^\bullet$  を満たすので Alexander の補題より 1-chain  $L'$  で  $J$  と交わらず  $\dot{L}' = \{p\} + \{r\}$  を満たすものが存在する。これは  $p, r$  が  $\mathbb{C} \setminus J$  の異なる成分に属するという仮定に反する。

2.  $\mathbb{C} \setminus J$  が少なくとも 2 つの成分を持つことを示そう。 $\Gamma$  を  $a, b$  を分離し座標軸と平行な辺を持つ正方形よりなる 1-cycle とする。ただし格子  $G$  は、その上の任意の 2-cell が  $|\Gamma| \cap J_1, |\Gamma| \cap J_2$  と同時に交わらないように取って置く。 $L_1$  を  $\Gamma$  に属す 1-cell で  $J_2$  と交わるもの全てよりなる 1-chain とし  $L_2 = \Gamma + L_1$  と置

く. このとき  $L_i \neq 0^1, i = 1, 2$  が成り立つ. 実際もし  $L_1 = 0^1$  ならば  $\Gamma$  は  $J_2$  と交わらないことになり  $J_2$  の連結性より  $\Gamma \sim 0$  in  $\hat{\mathbb{C}} \setminus J_2$  が成り立つことになる. これよりさらに  $\Gamma \sim 0$  in  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b\}$  を得るが, これは  $\Gamma$  の取り方に矛盾する.  $L_2 = 0^1$  と仮定しても同様な議論により矛盾を生じる. よって  $L_1 \neq 0^1, L_2 \neq 0^1$  かつ  $L_1 + L_2 = \Gamma$  が成り立つこと及び  $G$  が正則かつ連結な 1-cycle であるから  $\dot{L}_1 = \dot{L}_2 \neq 0^0$  が従う. (詳細は分離定理 (Theorem 3.2.6) の証明を参照せよ) 奇頂点は偶数個であるから

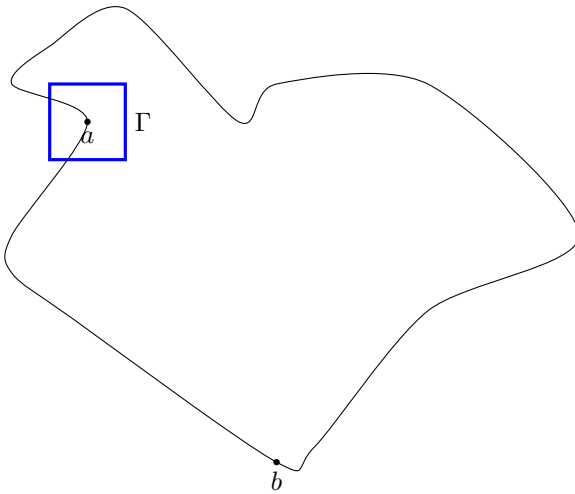
$$\dot{L}_1 = \dot{L}_2 = \{p_1\} + \{q_1\} + \cdots + \{p_j\} + \{q_j\}$$

と置くことが出来る. Proposition 3.2.5 よりこの中の少なくとも 1 組  $p_i, q_i$  は  $J = J_1 \cup J_2$  により分離される. 従って  $\mathbb{C} \setminus J$  が少なくとも 2 つの成分を持つ.

さて  $J$  はコンパクトゆえ十分大きな  $R > 0$  について  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \subset \mathbb{C} \setminus J$  が成り立つ.  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$  は連結であるから, これを含む  $\mathbb{C} \setminus J$  の連結成分が存在する. これを  $D_o$  と置くと,  $\mathbb{C} \setminus D_o \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$  が成り立つ. よって  $D_o$  以外の成分を  $D_i$  と置けば  $D_i$  は有界である.

3.  $\partial D_o \subset J, \partial D_i \subset J$  を背理法により示そう. 同様であるから前者のみ考える. これは  $z \in \partial D_o \setminus J$  が存在すれば  $\mathbb{D}(z, r) \cap J = \emptyset$  となる  $r > 0$  を取ることが出来るが,  $\mathbb{D}(z, r) \cap D_o \neq \emptyset$  より  $D_o \cup \mathbb{D}(z, r)$  は  $J$  と交わらない連結集合となる. これは  $\mathbb{C} \setminus J$  の成分  $D_o$  の最大性に反する.

最後に  $J \subset \partial D_o$  と  $J \subset \partial D_i$  を示そう. 上の  $a, b \in J$  について正方形の周  $\Gamma$  を  $a$  の任意の近傍内にとることができ,  $\Gamma$  の中に  $J$  により分離される 2 点が存在することから  $a \in \overline{D_o} \setminus D_o = \partial D_o$  と  $a \in \overline{D_i} \setminus D_i = \partial D_i$  が成り立つ.  $a \in J$  は任意に取れるので  $J \subset \partial D_o$  と  $J \subset \partial D_i$  が成り立つ.



□

### 4.3 Jordan 曲線の回転数

曲線  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  の  $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$  における回転数 (winding number) は複素線積分  $n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$  で定義されることがあるが, ここでは長さ有限の曲線でないとも都合が悪い. ここでは  $\rho = \min_{0 \leq t \leq 1} |\gamma(t) - z| > 0$  と置いて  $\delta > 0$  を  $|t - s| < \delta$  ならば  $|f(t) - f(s)| < \rho$  が成り立つように取る. このとき  $\max_{j=1, \dots, n} |t_j - t_{j-1}| < \delta$  を満たす分割  $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$  をについて

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \text{Arg} \frac{\gamma(t_k) - z}{\gamma(t_{k-1}) - z}$$

という定義を採用する. ただし  $\text{Arg}$  は  $\mathbb{C}$  から負の実軸を除いたところで定義された偏角であり  $(-\pi, \pi)$  に値を持つ. 上式の右辺において

$$\left| \frac{\gamma(t_k) - z}{\gamma(t_{k-1}) - z} - 1 \right| = \left| \frac{\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})}{\gamma(t_{k-1}) - z} \right| < 1$$

より  $-\frac{\pi}{2} < \text{Arg} \frac{\gamma(t_k) - z}{\gamma(t_{k-1}) - z} < \frac{\pi}{2}$  となっていて,  $z$  の周りを  $\gamma$  が何周回っているかを計っている. 実際には定義式の右辺が分割の取り方に依らないことなどを確かめる必要がある. 詳細は例えば Ahlfors-Sario [3] Chap.1 §2 の index of a curve を参照せよ.

$n(\gamma, z)$  は  $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$  について連続であり,  $\gamma$  が閉曲線の場合, 整数値を取るので  $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$  の各成分で一定である. 以下では  $\gamma$  が単純閉曲線の場合を考えよう. ( $\gamma$  の定義域が  $\partial\mathbb{D}$  の場合も回転数は同様に定義される).

**Theorem 4.3.1.**  $\gamma: \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  を Jordan 曲線とすると,  $J = \gamma(\partial\mathbb{D})$  の内側の領域上で  $n(\gamma, z) \equiv 1$  または  $n(\gamma, z) \equiv -1$  のどちらかが成立する. また  $\gamma$  の外側の領域上では  $n(\gamma, z) \equiv 0$  が成立する.

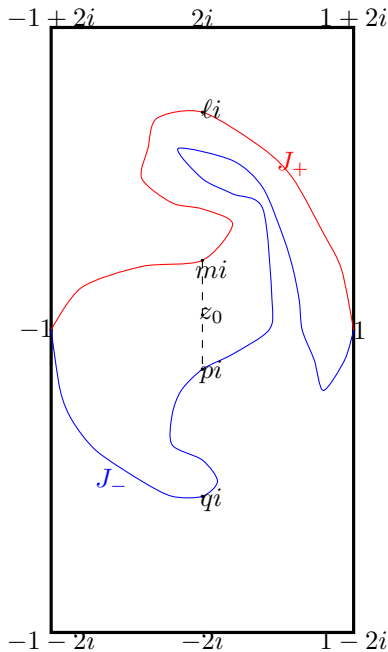
以下では混乱が生じない限り曲線の像のことも曲線と呼ぶことにする. また  $[z, w], (z, w)$  で, それぞれ 2 点  $z, w$  を結ぶ閉線分, 開線分を表すとし,  $(1-t)z + tw$  というパラメータ表示を持つ曲線とも考える.

*Proof.*  $z \rightarrow \infty$  のとき  $n(\gamma, z) \rightarrow 0$  であるから  $\mathbb{C} \setminus J$  の外側つまり非有界な成分  $D_o(\gamma)$  上で  $n(\gamma, z) \equiv 0$  が成り立つ.

像  $J$  はコンパクトであるから,  $\max_{\zeta_1, \zeta_2 \in J} |\zeta_1 - \zeta_2| = |z_1 - z_2|$  を満たす  $z_1, z_2 \in J$  が存在する. 必要ならば平行移動, 回転, 拡大を施すことにより  $z_1 = -1, z_2 = 1$  と仮定してよい. このとき

$$J \subset E := \{z \in \mathbb{C} : |\text{Re } z| \leq 1, |\text{Im } z| \leq 2\} \quad \text{and} \quad J \cap \partial E = \{\pm 1\}$$

が成り立つ.



さて  $J$  の部分単純弧で  $-1$  と  $1$  を端点とするものは 2 つあり, それぞれは  $E$  の左右の 2 辺を結ぶ. 従って Corollary 1.2.3 より, それぞれと上下の 2 辺を結ぶ線分  $[-2i, 2i]$  は交点を持つ. そこで交点の中で  $y$  座標が最大になるものを考え  $l = \max\{y \in [-2, 2] : yi \in J\}$  とおく.  $\pm 1$  で分けられる  $J$  の 2 つの部分単純弧のうち  $il$  が属す方を  $J_+$  と置き, もう一方を  $J_-$  と置く. そして  $m = \min\{y \in [-2, 2] : yi \in J_+\}$  とおく. このとき  $m \leq l$  であるが  $l$  と  $m$  は一致することもあり得ることに注意しておこう. また明らかに次が成り立つ.

- (i) 線分  $[2i, li]$  は  $J$  と交わらない.
- (ii) 線分  $(mi, -2i]$  は  $J_+$  と交わらない.

線分  $(mi, -2i]$  と  $J_-$  が交わることを示そう. 記号  $\widehat{li, mi}$  で  $J_+$  の部分単純弧の像で  $li$  と  $mi$  を結ぶものを表す. また  $+$  で曲線の像をつなぐ操作を表すことにする.

このとき  $[2i, li] + \widehat{li, mi} + [mi, -2i]$  の像と  $J_-$  は Corollary 1.2.3 より交わるが,  $[2i, li]$  は  $J$  と交わらないので, 当然  $J_-$  とは交わらない. また  $\widehat{li, mi}$  は  $J_+$  の部分弧の像であり端点  $\pm 1$  を含まないので  $J_-$  とは交わ



らない。従って  $[2i, li] + \widehat{li, mi} + [mi, -2i]$  と  $J_-$  との交点は線分  $(mi, -2i]$  上のみ存在する。従って

$$p = \max\{y : yi \in J_- \cap [mi, -2i]\}, \quad q = \min\{y : yi \in J_- \cap [mi, -2i]\}$$

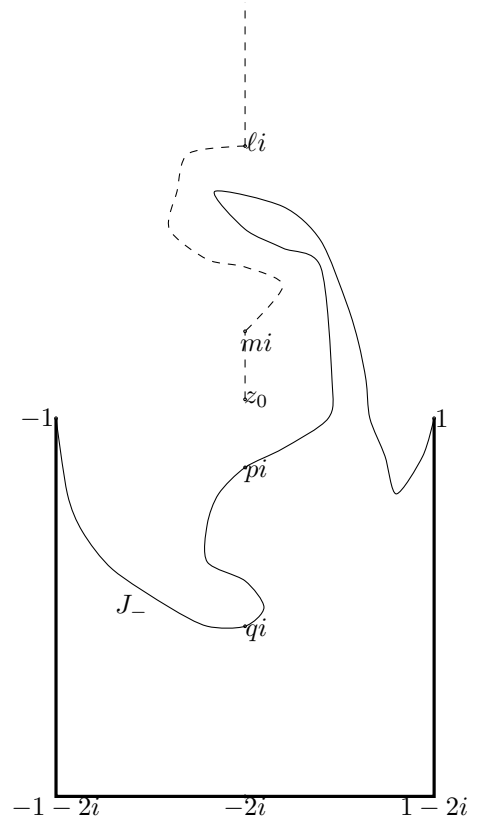
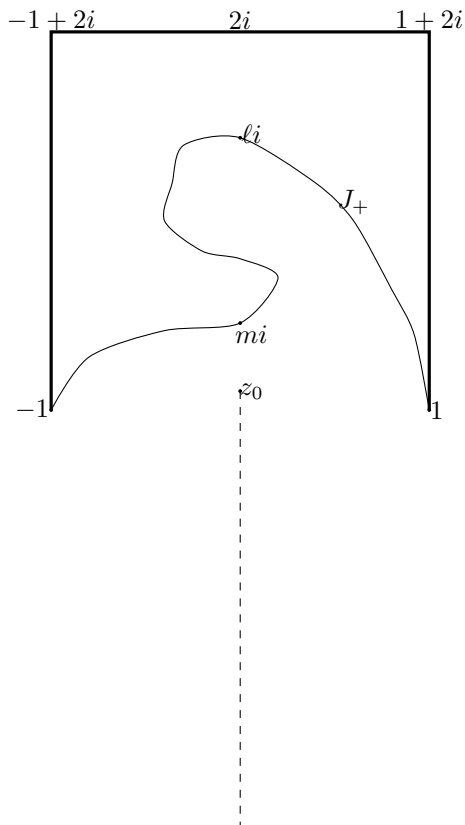
と置けば  $m > p$  であり、開線分  $(mi, pi)$  は  $J$  と交わることはない。そこで中点を  $z_0 = \frac{m+p}{2}i$  と置けば、 $z_0 \notin J$  である。

必要ならばパラメータを取り替えることにより写像  $\gamma : \partial\mathbb{D} \rightarrow J$   $\gamma(1) = 1$  かつ  $\gamma(-1) = -1$  が成り立ち、1 から出発して  $-1$  へ向かう反時計回りの上半円周に  $J_+$  が対応し (このとき  $J_+$  の始点は 1 で終点は  $-1$  になる),  $-1$  から出発して  $1$  へ向かう反時計回りの下半円周に  $J_-$  が対応する (このとき  $J_-$  の始点は  $-1$  で終点は  $1$  になる) と仮定してよい。このとき  $n(\gamma, z_0) = 1$  が成り立つことを証明する。(対応が逆の場合は  $n(\gamma, z_0) = -1$  となる.)

まず  $\delta_+$  で線分  $[-1, -1+2i]$ ,  $[-1+2i, 1+2i]$ ,  $[1+2i, 1]$  よりなる,  $-1$  と  $1$  を結ぶ折れ線とする。このとき  $J_+ + \delta_+$  は Jordan 曲線であり,  $z_0$  から  $z_0 - i\infty$  へ向かう半直線 (下図の点線部) と交わらない。従って  $z_0$  は  $\mathbb{C} \setminus (J_+ + \delta_+)$  の非有界成分に属す。よって  $n(J_+ + \delta_+, z_0) = 0$  である。次に  $\delta_-$  を  $[1, 1-2i]$ ,  $[1-2i, -1-2i]$ ,  $[-1-2i, -1]$  よりなる,  $1$  と  $-1$  を結ぶ折れ線とする。このとき  $J_+$  の部分弧で  $mi$  と  $li$  を結ぶものを  $\widehat{mi, li}$  とし,  $[li, li + i\infty)$  で  $li$  から真上にのびる半直線を表せば,  $[z_0, mi] + \widehat{mi, li} + [li, li + i\infty)$  は Jordan 曲線  $J_- + \delta_-$  と交わらない。よって  $n(J_- + \delta_-, z_0) = 0$  である。以上より

$$0 = n(J_+ + \delta_+, z_0) + n(J_- + \delta_-, z_0) = n(\gamma, z_0) + n(\delta_+ + \delta_-, z_0)$$

を得る。ここで  $n(\delta_+ + \delta_-, z_0) = -1$  である (各自で計算せよ!) から  $n(\gamma, z_0) = 1$  となる。  $D_o$  上で  $n(\gamma, z) \equiv 0$  であるから  $z_0 \in D_i$  であり,  $D_i$  上で  $n(\gamma, z)$  は一定値であるから  $n(\gamma, z) \equiv 1$  on  $D_i$  が成り立つ。  $\square$



**Definition 4.3.2** (Jordan 曲線の向き). Jordan 曲線  $\gamma$  について  $\gamma$  の像で囲まれた領域上で  $n(\gamma, z) \equiv 1$  が成り立つとき  $\gamma$  は正の向きを持つと言い,  $n(\gamma, z) \equiv -1$  が成り立つとき  $\gamma$  は負の向きを持つと言う.

$\Omega_1, \Omega_2$  を複素平面内の領域とし  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  を同相写像とする. 各  $a \in \Omega$  について  $\mathbb{D}(a, r) \subset \Omega_1$  を満たす  $r > 0$  を取り  $\partial\mathbb{D}(a, r)$  を中心  $a$  半径  $r$  の円周を反時計回りに回る閉曲線とみなす. このとき  $f(\mathbb{D}(a, r)) = D_i(f(\partial\mathbb{D}(a, r)))$  が成り立つことを領域の不変性 (Theorem 4.1.4) の証明中で示している. 従って

$$n(f(\partial\mathbb{D}(a, r)), f(a)) = 1 \quad \text{or} \quad n(f(\partial\mathbb{D}(a, r)), f(a)) = -1$$

のどちらかが成り立つ. 曲線の回転数の定義より  $n(f(\partial\mathbb{D}(a, r)), f(a))$  は  $a, r$  について連続である. 従って  $a, r$  の取り方に依らず  $n(f(\partial\mathbb{D}(a, r)), f(a))$  は  $+1$  または  $-1$  の一定値を取る. そこで

**Definition 4.3.3** (Jordan 曲線の向き).  $\Omega_1, \Omega_2$  を複素平面内の領域とし同相写像  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  について

$$n(f(\partial\mathbb{D}(a, r)), f(a)) \equiv 1$$

のとき  $f$  は正の向きを持つと言い,

$$n(f(\partial\mathbb{D}(a, r)), f(a)) \equiv -1$$

のとき  $f$  は負の向きを持つと言う.

## 4.4 Jordan 曲線の内と外

この章の最後に, 後章で利用する結果を述べておこう.

**Theorem 4.4.1.**  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  を Jordan 曲線,  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  を単純弧とし,  $(s_0, t_0) \in (0, 1) \times (0, 1)$  とする. もし  $\gamma$  と  $\alpha$  が  $(s_0, t_0) \in (0, 1) \times (0, 1)$  のみで交わる, つまり

$$\gamma(s_0) = \alpha(t_0) \quad \text{and} \quad \gamma(s) \neq \alpha(t) \quad \text{for} \quad (s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

が成り立つとし, さらに  $\gamma$  は  $s_0$  を含むある开区間で  $C^1$ -級,  $\alpha$  は  $t_0$  を含むある开区間で  $C^1$ -級, そして接ベクトル  $\frac{d\gamma}{ds}(s_0)$  と  $\frac{d\alpha}{dt}(t_0)$  はともに  $\neq 0$  であり, 平行でない (お互いがもう一方の実数倍ではない) とする. このとき  $\alpha$  の始点  $\alpha(0)$  と終点  $\alpha(1)$  は,  $J := \gamma(\partial\mathbb{D})$  により分離される, つまり始点と終点のどちらか一方が  $J$  の内側にあり, もう一方は外側にある.

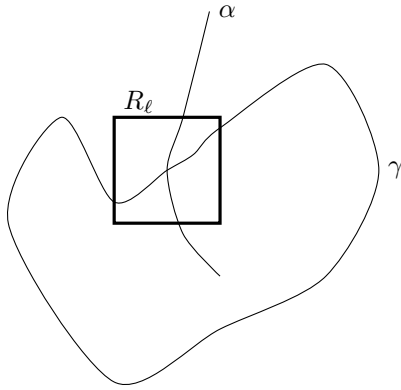
*Proof.* 必要ならば平行移動と線形写像を施したり, パラメータの取り替えを行うことにより  $\gamma, \alpha$  の定義域はともに閉区間  $[-1, 1]$  であり, かつ

$$(4.4.1) \quad \gamma(0) = \alpha(0) = 0 \quad \text{and} \quad \gamma(s) \neq \alpha(t) \quad \forall (s, t) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \setminus \{(0, 0)\}$$

また

$$\gamma'(0) = 1 \quad \text{and} \quad \alpha'(0) = i$$

が成り立つと仮定してよい.



以下の議論は  $\ell > 0$  について  $R_\ell = \{a = x + iy : |x| \leq \ell, |y| \leq \ell\}$  と置くと, 十分小さな  $\ell > 0$  について  $\gamma$  は  $R_\ell$  の左の辺, 右の辺と  $s$  それぞれ 1 点のみで交わり  $R_\ell$  内にある部分弧 1 つと  $R_\ell$  の外部にある部分弧 1 つの 2 つの部分弧に分けられること, 及び  $\alpha$  については  $R_\ell$  の上の辺, 下の辺とそれぞれ 1 点のみで交わり,  $R_\ell$  内にある部分弧 1 つと  $R_\ell$  の外部にある部分弧 2 つの 3 つの部分弧に分けられることを示すことにある.

$\gamma(s) = x(s) + iy(s)$  とおいて  $s = 0$  の近傍において

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_0^s x'(\tau) d\tau = s + \int_0^s \{x'(\tau) - 1\} d\tau = s + s\varepsilon_1(s) \\ y(s) &= \int_0^s y'(\tau) d\tau = s\varepsilon_2(s) \end{aligned}$$

と表しておく. このとき  $\gamma'(0) = 1$  より  $x'(0) = 1, y'(0) = 0$  であるから  $s \rightarrow 0$  のとき  $\varepsilon_j(s) \rightarrow 0, j = 1, 2$  が成り立つ. そこで  $\delta > 0$  を

$$|\varepsilon_1(t)| < \frac{1}{2}, \quad |\varepsilon_2(t)| < \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad x'(t) > 0 \quad \text{for } |s| \leq \delta$$

が成り立つように取る. このとき  $x(s)$  は閉区間  $[-\delta, \delta]$  において狭義増加であり,

$$\left| \frac{y(s)}{x(s)} \right| = \left| \frac{\varepsilon_2(s)}{1 + \varepsilon_1(s)} \right| < \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1, \quad s \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\}$$

が成り立つので  $\gamma(s), s \in [-\delta, \delta]$  は集合  $\{z = x + iy : |y| < |x|\} \cup \{0\}$  内にある.

$$\rho = \min\{|\gamma(t)| : \delta \leq |t| \leq 1\} > 0 \quad (\because \gamma \text{ は単純で } \gamma(0) = 0)$$

と置く. ここで  $|s| \leq \delta$  について  $|x(s)| = |s||1 + \varepsilon_1(s)| > \frac{|s|}{2}$  より  $|x(\pm \frac{\delta}{2})| > \frac{\delta}{4}$  が成り立つ. よって  $0 < \ell < \ell_0 := \min\left\{\frac{\delta}{4}, \frac{\rho}{\sqrt{2}}\right\}$  を満たす任意の  $\ell$  について原点中心で座標軸と平行な辺を持ち 1 辺の長さが  $2\ell$  での正方形を  $R_\ell = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |x| \leq \ell, |y| \leq \ell\}$  と置けば, 部分曲線  $\gamma(s), |s| \leq \frac{\delta}{2}$  と  $\partial R_\ell$  は左右の辺において 1 点ずつ交点を持つ. ( $\because x'(s) > 0$ ) さらに

$$\gamma(s) \notin R_\ell \quad \forall |s| \geq \frac{\delta}{2}$$

が成り立つ. 実際  $\frac{\delta}{2} < |s| \leq \delta$  においては  $x(s)$  の狭義増加性より  $\gamma(s) \notin R_\ell$  が従い,  $\delta \leq |s| \leq 1$  においては  $|\gamma(s)| \geq \rho > \sqrt{2}\ell$  より従う. 以上により, ある  $\ell_0 > 0$  で任意の  $\ell \in (0, \ell_0)$  について

$$(4.4.2) \quad \gamma \text{ と } \partial R_\ell \text{ は左右の辺においてそれぞれ 1 点でのみ交わり, 他に交点はない.}$$

が成り立つ.

$\alpha$  についても同じ議論を行うことにより十分小さな全ての  $\ell > 0$  について

$$(4.4.3) \quad \alpha \text{ と } \partial R_\ell \text{ は上下の辺において, それぞれ 1 点でのみ交わり, 他に交点はない.}$$

$\alpha$  の端点  $\alpha(-1), \alpha(1)$  が  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  の同じ成分に属すとすれば  $\alpha(1)$  と  $\alpha(-1)$  を結び  $\gamma$  と交わらない曲線  $\beta$  が存在する.  $\gamma(0) = 0$  より  $\beta$  は原点を通らない. そこで (4.4.2) と (4.4.3) の性質を同時に持ち, さらに  $\beta$  と  $R_\ell$

が交わらないように  $l$  を十分小さく取り, 固定する. 次に  $\gamma(s_1), \gamma(s_2)$  がそれぞれ  $\partial R_\ell$  の左右の辺と  $\gamma$  の唯一の交点となるように  $s_0, s_1$  を取る. このとき  $-1 < s_0 < s_1 < 1$  が成り立つ. 同様に  $\alpha(t_1), \alpha(t_2)$  がそれぞれ  $\partial R_\ell$  の下と上の辺と  $\alpha$  の唯一の交点となるように  $t_0, t_1$  を取ると  $-1 < t_0 < t_1 < 1$  が成り立つ.

閉区間  $[t_2, 1]$  に対応する  $\alpha$  の部分弧と  $\beta$  を結び, さらに閉区間  $[-1, t_1]$  に対応する  $\alpha$  部分弧をつないだ曲線を  $\tilde{\alpha}$  と置く. また  $\tilde{\gamma}$  を  $\gamma$  から  $(s_1, s_2)$  に対応する部分を取り除いた部分弧と置く. このとき  $\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}$  はそれぞれ  $R_\ell$  の左右の辺, 及び下と上の辺を  $\mathbb{C} \setminus \text{Int } R_\ell$  内を通り結ぶ曲線であり両者は交わらない. このような 2 曲線は Corollary 1.2.4 により存在しない. 従って  $\alpha(-1), \alpha(1)$  は  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  の異なる成分に属す.  $\square$

次は交わらない 2 つの Joran 曲線  $\gamma_1$  と  $\gamma_2$  の関係について考えよう.  $j \neq k$  のとき  $\gamma_j \cap \gamma_k = \emptyset$  より

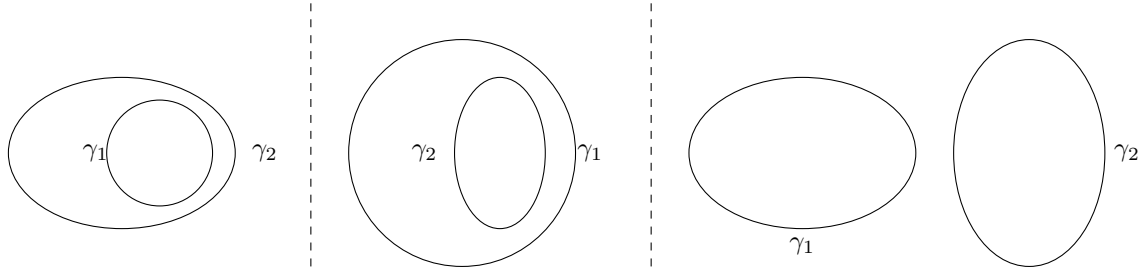
$$\gamma_j \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \gamma_k = D_i(\gamma_k) \cup D_o(\gamma_j)$$

を得るが,  $\gamma_j$  は連結であるから  $\gamma_j \subset D_i(D_k)$  または  $\gamma_j \subset D_o(\gamma_k)$  のどちらか一方のみが成り立つ.

**Theorem 4.4.2.** 交わらない 2 つの Joran 曲線  $\gamma_1, \gamma_2$  について次のどれか 1 つのみが必ず成り立つ.

- (a)  $\gamma_1 \subset D_i(\gamma_2)$ . このとき  $\overline{D_o(\gamma_2)} \subset D_o(\gamma_1)$  と  $\overline{D_i(\gamma_1)} \subset D_i(\gamma_2)$  が成り立つ.
- (b)  $\gamma_2 \subset D_i(\gamma_1)$ . このとき  $\overline{D_o(\gamma_1)} \subset D_o(\gamma_2)$  と  $\overline{D_i(\gamma_2)} \subset D_i(\gamma_1)$  が成り立つ.
- (c)  $\gamma_1 \subset D_o(\gamma_2)$  かつ  $\gamma_2 \subset D_o(\gamma_1)$ . このとき  $\overline{D_i(\gamma_1)} \subset D_o(\gamma_2)$ ,  $\overline{D_i(\gamma_2)} \subset D_o(\gamma_1)$  と  $\overline{D_i(\gamma_1)} \cap \overline{D_i(\gamma_2)} = \emptyset$  が成り立つ.

*Proof.*



(a)  $\gamma_1 \subset D_i(\gamma_2)$  のときは 両辺の補集合を取れば

$$\overline{D_o(\gamma_2)} = D_o(\gamma_2) \cup \gamma_2 \subset D_i(\gamma_1) \cup D_o(\gamma_1)$$

を得る.  $\overline{D_o(\gamma_2)}$  は連結集合  $D_o(\gamma_2)$  の閉包であるから自身も連結である. よって  $\overline{D_o(\gamma_2)} \subset D_i(\gamma_1)$  または  $\overline{D_o(\gamma_2)} \subset D_o(\gamma_1)$  のどちらか一方が成り立つ.  $\overline{D_o(\gamma_2)}$  は非有界,  $D_i(\gamma_1)$  は有界であるから  $\overline{D_o(\gamma_2)} \subset D_o(\gamma_1)$  が成り立ち, さらに両辺の補集合を取れば  $\overline{D_i(\gamma_2)} \subset D_i(\gamma_1)$  が成り立つことが分かる.. (a) において 1, 2 を入れ替えれば (b) が成り立つとき  $\overline{D_o(\gamma_1)} \subset D_o(\gamma_2)$  と  $\overline{D_i(\gamma_2)} \subset D_i(\gamma_1)$  が成り立つことが従う. また (a) と (b) は両立することはない. 何故ならば (a), (b) を仮定すると

$$\gamma_1 \subset D_i(\gamma_2) \subset \overline{D_i(\gamma_2)} \subset D_i(\gamma_1)$$

となり矛盾を生じる.

“(a) または (b)” の否定は (c) であるから, これで (a), (b), (c) のどれか 1 つのみが必ず起こることが分かった. そこで (c) が成り立つと仮定しよう.  $\gamma_1 \subset D_o(\gamma_2)$  の両辺の補集合を取り

$$\overline{D_i(\gamma_2)} \subset D_i(\gamma_1) \cup D_o(\gamma_1)$$

が成り立つ. 左辺は連結であるから  $\overline{D_i(\gamma_2)} \subset D_i(\gamma_1)$  または  $\overline{D_i(\gamma_2)} \subset D_o(\gamma_1)$  のどちらか一方のみが成り立つが  $\gamma_2 \subset D_o(\gamma_1)$  より  $\overline{D_i(\gamma_2)} \subset D_o(\gamma_1)$  が成り立つ. 1, 2 を入れ替えて同じ議論を行えば  $\overline{D_i(\gamma_1)} \subset D_o(\gamma_2)$  も成り立つ. またこれらより  $\overline{D_i(\gamma_1)} \cap \overline{D_i(\gamma_2)} = \emptyset$  も直ちに従う.  $\square$

**NOTES.** 第 2, 3 章の結果を踏まえ, この章では領域の不変性と *Jordan* の曲線定理を *Newman* の著書に従い証明した. *Jordan* の曲線定理については, 琉球大の前原先生 ([10] を参照) が極めて短い証明を発表している. それを紹介しても良かったのだが, 後の応用を考え, ここでは組み合わせ的な証明を採用した. しかしながら前原先生の手法 (*Moise* [11] にも似たような議論がある) では, 閉曲線の内側にある区間を具体的に構成出来るところが非常に強力である. これを *Jordan* 曲線の回転数へ応用できることを思いついたので §4.3 で解説した. また等角写像の連続拡張に関する *Carathéodory* の定理の証明に必要なので, §4.4 では *Jordan* 曲線を 1 点のみで横切る弧の始点と終点は *Jordan* 曲線により分離されることを示した.

## 第 5 章

# PL-Schönflies の定理

### 5.1 単純多角形に関する Jordan の定理

以下では  $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$  について  $[z_0, z_1]$  で  $a, b$  を端点とする (閉) 線分を表す. つまり

$$[z_0, z_1] = \{(1-t)z_0 + tz_1 : 0 \leq t \leq 1\}$$

である. また開線分

$$(z_0, z_1) = \{(1-t)z_0 + tz_1 : 0 < t < 1\}$$

を  $[z_0, z_1]$  の内部と言う.

Jordan 曲線  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  が単純多角形 (simple polygon) であるとは, 区間  $[0, 1]$  の分割  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ , と複素定数  $\alpha_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $\beta_k \in \mathbb{C}$ ,  $k = 1, \dots, n$  により

$$\gamma(t) = \alpha_k t + \beta_k, \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad k = 1, \dots, n$$

と表せる時を言う. つまり piecewise linear (PL と略す) すなわち区分的に affine 写像 (= 線形写像 + 平行移動) となっていることである. ここでは追加として  $\alpha_{k+1}/\alpha_k \notin \mathbb{R}$  も仮定しておく. このように有限個の線分をつないでできる Jordan 曲線が単純多角形である. 単純多角形のことを Jordan 多角形と呼ぶこともある.

以下では

$$\begin{aligned} z_k &= \gamma(t_k), \quad k = 0, 1, \dots, n \\ E_k &= \{\gamma(t) : t_{k-1} \leq t \leq t_k\} = [z_{k-1}, z_k], \quad k = 1, \dots, n \end{aligned}$$

と置く.  $z_n = z_0$  に注意しよう. また

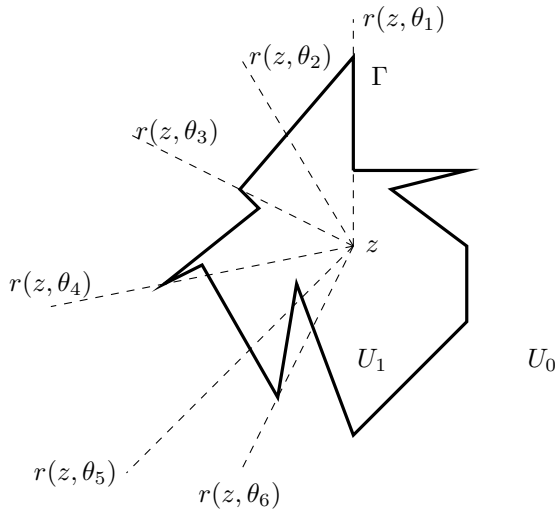
$$z_{n+1} = z_1, \quad E_0 = E_n, \quad E_{n+1} = E_1$$

と置く. 各  $z_k, E_k$  はそれぞれ  $\gamma$  の頂点, 辺と呼ばれる. 混乱が生じない限り像  $\gamma(\partial D)$  も  $\gamma$  で表して, 曲線とその像を区別せずに書き表すことを許す.

既に前章で Jordan の曲線定理を証明済みであるが, もう一度, それも単純多角形に限定し証明を行う. これは途中で導入する交点数などの概念が非常に重要だからである.

**Theorem 5.1.1** (単純多角形に関する Jordan の曲線定理).  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  を単純多角形とすれば, 開集合  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  の連結成分は非有界なものが 1 つと, 有界なものが 1 つの 2 つよりなる. また成分のそれぞれを  $U_0, U_1$  と置けば  $\partial U_0 = \partial U_1 = \gamma$  が成り立つ.

*Proof.* 点  $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$  より伸び、実軸の正の向きと角  $\theta$  をなす半直線を  $r(z, \theta)$  と置く。また  $r(z, \theta)$  と  $\gamma$  の交点の個数を  $n(z, \theta)$  と表し、交点数と呼ぶ。但し交点数の数え方は次のようにする。



- (a)  $r(z, \theta)$  が辺  $E_k$  を内部の点 (端点以外の点) において横切るときは 1 と数える。
- (b)  $r(z, \theta)$  が頂点  $z_k$  を通り、 $z_k$  を共有する 2 つの辺  $E_k, E_{k+1}$  が  $r(z, \theta)$  の左右の同じ側にあるときは 2 と数え、左右異なる側にあるときは 1 と数える。
- (c)  $r(z, \theta)$  が辺  $E_k$  を含む場合、 $E_k$  の前後の 2 つの辺  $E_{k-1}, E_{k+1}$  が  $r(z, \theta)$  の左右の同じ側にあるときは 2 と数え、左右異なる側にあるときは 1 と数える。

(上図において  $r(z, \theta_1) = 1, r(z, \theta_2) = 1, r(z, \theta_3) = 1, r(z, \theta_4) = 3, r(z, \theta_5) = 3, r(z, \theta_6) = 3$  となることを確かめて見よ。)

$n(z, \theta)$  は非負整数値を取る。また  $z$  を固定し  $n(z, \theta)$  を  $\theta \in \mathbb{R}$  の関数と考えると、 $\theta$  が動く時、取る値  $n(z, \theta)$  は変化するかも知れないが、偶数か奇数かは一定である。この事実は文章では説明し難いが、(a), (b), (c) のそれぞれの場合で  $\theta$  を少し動かしたときの変化を上図を眺めたり、自分で図を描くことにより感得して頂きたい。

各  $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$  について  $n(z, \theta)$  が偶数のとき  $n(z) = 0, n(z, \theta)$  が奇数のとき  $n(z) = 1$  と定義する。このとき  $n(z)$  は  $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$  の関数とみなし、連続である。実際  $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$  について半直線  $r(z, \theta)$  が頂点  $z_1, \dots, z_n$  を通らないように  $\theta$  を取れば、 $z$  の十分小さな近傍  $V$  で  $n(z^*, \theta) = n(z, \theta), z^* \in V$  となるものが存在する。以上より

$$U_0 = \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma : n(z) = 0\}, \quad U_1 = \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma : n(z) = 1\}$$

と置けば、 $U_0, U_1$  は開集合であり

$$\mathbb{C} \setminus \gamma = U_0 \cup U_1, \quad U_0 \cap U_1 = \emptyset$$

が成り立つ。特に

(5.1.1)  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  内の連結集合 (曲線など) は  $U_0, U_1$  のどちらか一方に含まれる。

が成り立つ。何故ならば、連結集合  $E$  についてもしそうでないと仮定すれば  $E \cap U_0, E \cap U_1$  が  $\alpha$  の分割を与えることになり  $E$  の連結性に矛盾する。従って  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  の成分は  $U_0, U_1$  のどちらか一方に含まれる。

次に  $U_0, U_1$  がともに空でない連結集合であることを示すために、辺  $E_k$  の適当 (都合の良い) な近傍を考えよう。はじめに  $n = 3$  のときは重心  $\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$  と各辺を延長した直線との最短距離を取り、3 辺との最短距離の最小値を  $\delta$  と置く。  $n \geq 4$  のときは  $\delta$  を隣り合わない辺同士の最短距離とする。つまり

$$\delta = \min\{\text{dist}(E_k, E_\ell) : 2 \leq \ell - k \leq n - 2\}$$

と置く。  $n = 3$  のときは  $0 < \rho < \delta$  を満たす  $\rho$  を、そして  $n \geq 4$  のときは  $0 < \rho < \frac{\delta}{2}$  を満たす  $\rho$  について

$$N = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, \gamma) < \rho\},$$

$$N_k = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, E_k) < \rho\}, \quad k = 1, \dots, n$$

と置く. ( $n = 3$  のとき  $\rho < \delta$  とする理由は,  $\frac{z_1+z_2+z_3}{3} \notin N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$  のように三角形の内部に  $N$  に属さない点があることを保証するためである.)

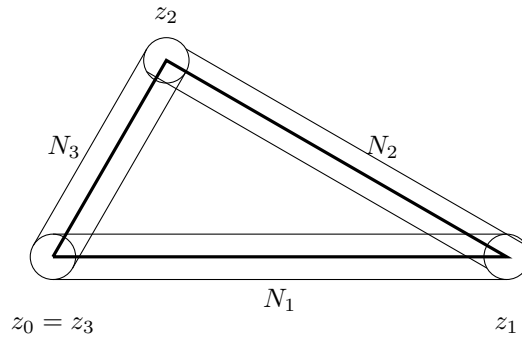


図 5.1.1:  $n = 3$  の場合

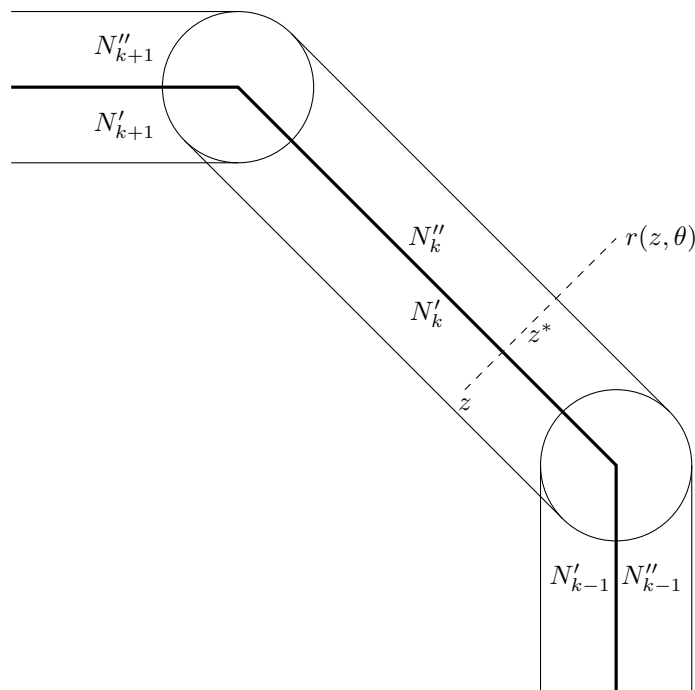
このとき  $k = 1, 2, \dots, n$  について  $N_k$  は  $N_{k-1}, N_{k+1}$  とのみ交わり, 他の  $N_\ell$  とは交わらない. そして

$$N_k \cap \gamma \subset E_{k-1} \cup E_k \cup E_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n \quad (E_0 = E_n, E_{n+1} = E_1 \text{ に注意})$$

であり  $N_k \setminus \gamma$  は 2 つの成分よりなる. そこでこれらの成分を  $N'_k, N''_k$  と置くが, 各  $k = 1, 2, \dots, n$  について

$$N'_k \cap N'_{k+1} \neq \emptyset, \quad N''_k \cap N''_{k+1} \neq \emptyset, \quad k = 1, \dots, n-1$$

となるように取っておく.



さて空でない共通部分を持つ 2 つの連結集号の和集合は再び連結であることに注意すれば  $N'_k, N''_k$  のとり方より

$$N' := N'_1 \cup \dots \cup N'_n, \quad N'' := N''_1 \cup \dots \cup N''_n$$

は連結な開集合である. この段階では論理的に 2 つの可能性がある.



- (i)  $N'_n \cap N'_1 \neq \emptyset$  かつ  $N''_n \cap N''_1 \neq \emptyset$ .  
(ii)  $N'_n \cap N''_1 \neq \emptyset$  かつ  $N''_n \cap N'_1 \neq \emptyset$ .

(ii) の場合が起こりえないことを示そう。  $N'$  の任意の 2 点は  $N'$  内の曲線で結べ、  $N''$  の任意の 2 点も  $N''$  内の曲線で結べるので (ii) が起こると仮定すれば  $N' \cup N''$  の任意の 2 点も  $N' \cup N''$  内の曲線で結べることになり、前半で示したことにより

$$(5.1.2) \quad N' \cup N'' \subset U_0 \quad \text{or} \quad N' \cup N'' \subset U_1$$

のどちらか一方が成り立つ。しかしながら  $z \in N'_k$  を取り、  $r(z, \theta)$  が頂点を通らずに辺  $E_k$  を横切るように  $\theta$  について  $r(z, \theta)$  上で  $N''_k$  内にある点  $z^*$  を取れば  $n(z, \theta) = n(z^*, \theta) + 1$  である。従って “ $z \in U_0$  かつ  $z^* \in U_1$ ” または “ $z \in U_1$  かつ  $z^* \in U_0$ ” のどちらか一方が起こる。  $z \in N'_k, z^* \in N''_k$  であったから、これは (5.1.2) に反する。

これで  $U_0, U_1$  はともに空でないことが分かった。必要ならば ' と '' を取り替えることにより、以後  $N' \subset U_1, N'' \subset U_0$  が成り立つと仮定する。

$U_0, U_1$  がともに連結であることを示そう。これは任意の  $\zeta_0 \in U_0$  について  $\zeta_0$  と  $\gamma$  の任意の点とを線分で結べば、  $\zeta_0$  から出発し、この線分上を進めば  $\gamma$  の点とぶつかる前に  $N'$  または  $N''$  のどちらかの点  $\zeta$  とぶつかる。しかしながら (5.1.1) より  $[\zeta_0, \zeta]$  は  $U_0$  に含まれるので  $\zeta \in N''$  である。以上より  $U_0$  の任意の点は  $U_0$  中の曲線で  $N''$  の点と結べることになり、これより  $U_0$  が連結であることが分かる。  $U_1$  の連結性も全く同様な議論により示される。これで  $U_0, U_1$  はともに空でない連結な開集合であり  $\mathbb{C} \setminus \gamma = U_0 \cup U_1$  が成分への分解を与えることが分かった。

最後に  $\partial U_0 = \partial U_1 = \gamma$  を示そう。まず  $\gamma$  の任意の点の任意の近傍内に  $N'$  と  $N''$  の点が必要に含まれるので  $\gamma \subset \partial U_0, \gamma \subset \partial U_1$  が成り立つ。逆に  $U_0 \cap U_1 = \emptyset$  より  $U_0 \subset \mathbb{C} \setminus U_1$  であり  $\mathbb{C} \setminus U_1$  が閉集合であることより  $\overline{U_0} \subset \mathbb{C} \setminus U_1$  が成り立つ。よって  $\partial U_0 = \overline{U_0} \setminus U_0 \subset \mathbb{C} \setminus U_1$  であるから  $\partial U_0 \subset \mathbb{C} \setminus (U_0 \cup U_1) = \gamma$  である。  $\partial U_1 \subset \gamma$  についても同様である。  $\square$

単純多角形  $\gamma$  について  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  の非有界な成分を  $D_o(\gamma)$  で表し、有界な成分を  $D_i(\gamma)$  で表す。  $D_i(\gamma)$  のことを  $\gamma$  で囲まれた領域と呼ぶ。

**Corollary 5.1.2.**  $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$  について

$$\begin{aligned} z \in D_i(\gamma) &\iff n(z, \theta) \text{ が奇数} \\ z \in D_o(\gamma) &\iff n(z, \theta) \text{ が偶数} \end{aligned}$$

が成り立つ。

*Proof.*  $\gamma \subset \mathbb{D}(0, R)$  となる  $R > 0$  を取る。このとき各  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}(0, R)$  について  $\theta = \text{Arg } z$  と置けば  $r(z, \theta)$  は  $\gamma$  と交わらない。よって  $n(z, \theta) = 0$  であり、  $n(z) = 0$  である。よって  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}(0, R) \subset U_0$  である。従って  $U_0$  は非有界な成分であるので  $D_o(\gamma) = U_0$  が成り立つ。  $\square$

## 5.2 単純多角形に関する Schönflies の定理

“Jordan 曲線  $\gamma : \partial \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  について位相同型  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  で  $\varphi|_{\partial \mathbb{D}} = \gamma$  を満たすものが存在する” ということを主張するのが Schönflies の定理である。この定理をこのままの形で証明するのは本書の程度を超えるの

で、この節では  $\gamma$  が単純多角形の場合に限定して証明を行う。後章での応用にはこのような限定を行っても差し支えない。

前節まで単純多角形とは区分的に線形な単射連続写像  $\gamma: \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  としてきたが、この節ではこれに加えて次の見方も行う。  $n$  個の相異なる点

$$p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{C}$$

が次の条件を満たすとき、これらの点をこの順につないで、最後に  $p_n$  と  $p_1$  をつないで、できる曲線が単純閉曲線となるので、これを  $p_1, \dots, p_n$  により定まる単純多角形と言い  $P = P(p_1, \dots, p_n)$  と表す。

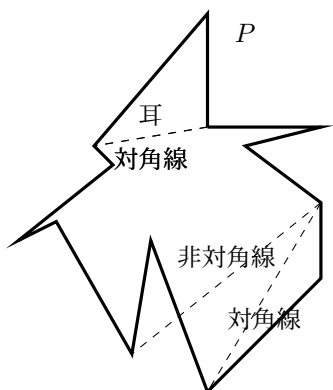
その条件とは

$$E_1 = [p_0, p_1], E_2 = [p_1, p_2], \dots, E_n = [p_{n-1}, p_n], E_0 = E_1, E_{n+1} = E_1$$

と置いて、

- (i) “ $E_1$  と  $E_2$ ”, “ $E_2$  と  $E_3$ ”, ..., “ $E_n$  と  $E_{n+1}(= E_1)$ ” のように番号が連続する線分が平行でない。(このとき特に、番号が連続する線分同士は 1 頂点のみを共有する)
- (ii)  $E_k, E_\ell$  を番号が連続しない 2 線分とすれば  $E_k \cap E_\ell = \emptyset$

これらの条件を満たすとき  $E_1, \dots, E_n$  をつないで得られる曲線が単純曲線になることは容易に分かる。これが  $P = P(p_1, \dots, p_n)$  である。各  $p_k, E_k$  を  $P$  の頂点と辺と呼ぶのは前節と同様である。 $P$  の頂点が 3 つで三角形をなすときは  $P(p, q, r)$  の代わりに  $T(p, q, r)$  と表すことにする。



**Definition 5.2.1.** 単純多角形  $P(p_1, \dots, p_n)$  の対角線 (diagonal) とは  $P$  の 2 つの頂点を端点とする線分で、端点以外は  $P$  で囲まれた領域  $D_i(P)$  に含まれるものを言う。また  $p, q, r$  が  $P$  の番号が連続する 3 頂点であり、 $[p, r]$  が対角線であるならば  $p, q, r$  を 3 頂点に持つ三角形  $T(p, q, r)$  (これも Jordan 多角形である) のことを  $P(p_1, \dots, p_n)$  の耳 (ear) と言う。

**Theorem 5.2.2.**  $p_1, \dots, p_n$  を頂点とする単純多角形  $P$  について線分  $[p_1, p_i]$  が  $P$  の対角線であるとする。このとき  $P^+$  を  $p_1, \dots, p_i$  を頂点に持つ単純多角形とし、 $P^-$  を  $p_1, p_i, \dots, p_n$  を頂点に持つ単純多角形とすれば

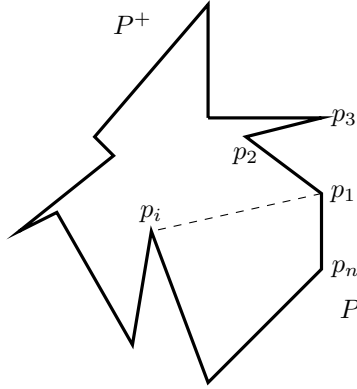
$$D_i(P) = D_i(P^+) \cup [p_1, p_i] \cup D_i(P^-)$$

と分解される。

*Proof.* 仮定より  $(p_1, p_i) \subset D_i(P)$  であるから隣り合うもの以外の他の辺と交わることはないので  $P^\pm$  ともに単純多角形である。また  $(p_1, p_i) \cap D_o(P) = \emptyset$  が成り立つ。よって  $P^\pm \cap D_o(P) = \emptyset$  が成り立つ。従って

$$D_o(P) \subset D_i(P^\pm) \cup D_o(P^\pm) \quad (\text{複合同順})$$

となるが  $D_o(P)$  の連結性より  $D_o(P) \subset D_i(P^\pm)$  または  $D_o(P) \subset D_o(P^\pm)$  のどちらか一方が成り立つ。



$D_o(P)$  は非有界で,  $D_i(P^\pm)$  は有界であるから  $D_o(P) \subset D_o(P^\pm)$  が成り立つ. 両辺の閉包を取ると

$$D_o(P) \cup P = \overline{D_o(P^\pm)} \subset \overline{D_o(P^\pm)} = D_o(P^\pm) \cup P^\pm \quad (\text{複合同順})$$

が成り立つ. 両辺の補集合を取れば  $D_i(P^\pm) \subset D_i(P)$  が従う. 以上より  $D_i(P^+) \cup (p_1, p_i) \cup D_i(P^-) \subset D_i(P)$  が成り立つ.

逆の包含関係を示すために  $z \in D_i(P) \setminus (p_1, p_i)$  とする. そして  $P, P^+, P^-$  に関する交点数を  $n(z, \theta), n^+(z, \theta), n^-(z, \theta)$  とし,  $r(z, \theta)$  と  $(p_1, p_i)$  の共有点の個数 (0 または 1 である) を  $n_0(z, \theta)$  と置く. このとき半直線  $r(z, \theta)$  が  $P$  のいかなる頂点も通らないような  $\theta$  について (頂点の個数は  $n$  個であるから, このような  $\theta$  は明らかに存在する)

$$n(z, \theta) = n^+(z, \theta) + n^-(z, \theta) - 2n_0(z, \theta)$$

が成り立つ.  $z \in D_i(P)$  であるから Corollary 5.1.2 より  $n(z, \theta)$  は奇数であるが, この場合上式より  $n^+(z, \theta), n^-(z, \theta)$  のどちらか一方, そして一方のみが奇数である. 従って再び Corollary 5.1.2 より  $z \in D_i(P^+)$  か  $z \in D_i(P^-)$  のどちらか一方が成り立つ. よって  $D_i(P) \setminus (p_1, p_i) \subset D_i(P^+) \cup D_i(P^-)$  が成り立つ. 両辺に  $(p_1, p_i)$  を加えれば  $D_i(P) \subset D_i(P^+) \cup (p_1, p_i) \cup D_i(P^-)$  が成り立つ.  $\square$

**Corollary 5.2.3.**  $T = T(p, q, r)$  が単純多角形  $P$  の耳ならば  $D_i(T) \subset D_i(P)$  が成り立つ.

**Lemma 5.2.4.** 頂点を 4 つ以上持つ単純多角形は対角線を持つ.

*Proof.*  $q$  を単純多角形  $P$  の最も右にある頂点 (複数あればその中の最も上) とし, 直前の番号の頂点を  $p$ , 直後の番号の頂点を  $r$  とする. また  $T$  を  $p, q, r$  を頂点に持つ (単純) 三角形とする.

(I) はじめに線分  $[p, r]$  が端点以外で  $P$  と交わらないと仮定する. このとき開線分  $(p, r)$  は連結集合で  $P$  と交わらないから, “ $(p, r) \subset D_i(P)$ ” または “ $(p, r) \subset D_o(P)$ ” のどちらか一方が成り立つ.

(I-i)  $(p, r) \subset D_i(P)$  の場合は,  $[p, r]$  は対角線であり,  $T(p, q, r)$  は  $P$  の耳である.

(I-ii) 次に  $(p, r) \subset D_o(P)$  のときを考えよう.  $(p, r) \cap D_i(P) = \emptyset$  であり

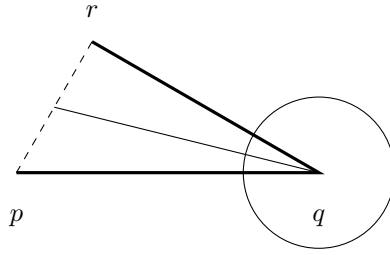
$$([p, q] \cup [q, r]) \cap D_i(P) \subset P \cap D_i(P) = \emptyset$$

より  $T \cap D_i(P) = \emptyset$  である. よって

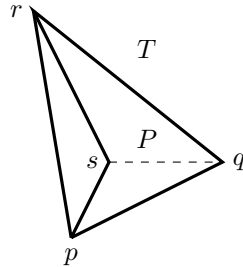
$$D_i(P) \subset D_i(T) \cup D_o(T)$$

となるが  $D_i(P)$  の連結性より “ $D_i(P) \subset D_i(T)$ ” または “ $D_i(P) \subset D_o(T)$ ” のどちらか一方が成り立つ.

$D_i(P) \subset D_o(T)$  は起き得ない. 実際  $\varepsilon > 0$  を  $\mathbb{D}(q, \varepsilon)$  は  $[p, q], [q, r]$  以外の  $P$  の辺と交わらないように取る.  $r, p$  の中点から  $q$  へのびる半直線を取る. 中点から  $q$  までの開線分と  $\mathbb{D}(q, \varepsilon)$  の共通部分にある点  $z$  について,  $q$  が  $P$  の最も右にある頂点であることより  $P$  に関する交点数は 1 である. また明らかに  $T$  に関する交点数も 1 である. 従って  $D_i(T) \cap D_i(P)$  に属する点が存在する. よって  $D_i(P) \subset D_i(T)$  が成り立つ.



$D_i(P) \subset D_i(T)$  の場合は  $P$  の頂点の個数は 4 以上であるから  $p, q, r$  以外の頂点で  $\overline{D_i(T)} = D_i(T) \cup T$  内にあるものが少なくとも 1 つ存在する.  $P$  は単純多角形であるから, このような頂点は  $[p, q] \cup [q, r]$  上にはないので  $(p, r)$  上または  $D_i(T)$  内にある.  $s$  をこのような頂点の中で最も右にあるもの (の 1 つ) とする.  $s$  から  $q$  へ伸びる半直線を取ると, この半直線上の  $(s, q)$  の部分には  $P$  の点は存在せず,  $q$  から先にも  $P$  の点は存在しない. 従って  $z \in (s, q)$  に対し,  $n(z) = 1$  であり  $(s, q) \subset D_i(P)$  である. よって  $[s, q]$  は  $P$  の対角線である.



(II) 最後に線分  $[p, r]$  が端点以外で  $P$  と交わる場合を考えよう. この場合も  $p, q, r$  以外の頂点で  $D_i(T) \cup (p, r)$  内にあるものが少なくとも 1 つ存在するので, その中の最も右にあるものを  $s$  とすれば上と同様に  $[s, q]$  が対角線を与える. □

**Theorem 5.2.5.** 頂点を 4 つ以上持つ単純多角形は  $P$  の辺を共有しない 2 つの耳を持つ.

*Proof.* 頂点の個数  $n$  に関する帰納法を用いて証明する.  $n = 4$  の場合  $P$  は Lemma 5.2 より対角線  $[p, r]$  を持つので, そこで  $P$  を分解すれば 2 つの三角形に分解でき, それぞれが  $P$  の耳であり,  $P$  の辺を共有しない. (勿論  $[p, r]$  は 2 つの三角形に共有されるが, これは  $P$  の辺ではない.)

次に  $n - 1$  まで正しいと仮定し  $P$  を  $n$  個の頂点よりなる単純多角形とする. Lemma 5.2 より対角線が存在するので  $[p, p']$  を対角線と置く. このとき Theorem 5.2.2 で行ったように  $P$  を 2 つの Jordan 多角形  $P^+, P^-$  で 1 つの辺  $[p, p']$  を共有するものに分解できる.  $P^+$  が三角形ならば,  $P^+$  自身が  $P$  の耳である.  $P^+$  が三角形でないとする. このとき  $P^+$  の耳で  $[p, q]$  を辺に持つものは高々 2 つであるが, 帰納法の仮定より, これ以外の  $P^+$  の耳で  $[p, q]$  を辺に持たないものが少なくとも 1 つ存在する. これは  $P$  の耳になる. 以上どちらの場合でも  $P^+$  の耳で  $P$  の耳でもあるものが存在する.  $P^-$  についても同様であるから, 結局  $P$  には  $P$  の辺を共有しない 2 つの耳が存在する. □

これで単純多角形に関する Schönflies の定理を証明する準備が 1 つのトピックを除いて整った. 最後の 1 つはアフィン写像 (線形写像と平行移動の合成である写像) に関するものである.

$p, q$  を相異なる 2 点とし, これらをこの順に, 相異なる 2 点  $p', q'$  に写像するアフィン写像は一意ではないが, 線分  $[p, q]$  から線分  $[p', q']$  への写像に制限すれば一意である. 実際そのようなアフィン写像が線形写

像  $\varphi$  と点  $r_0$  により  $\varphi + r_0$  と表されたとする

$$\varphi((1-t)p + tq) + r_0 = (1-t)\{\varphi(p) + r_0\} + t\{\varphi(q) + r_0\}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

となるからである.

次に 2 つの三角形  $T(p, q, r), T(p', q', r')$  について  $p, q, r$  をこの順に  $p', q', r'$  に写像するアフィン写像は一意的に定まり,  $\mathbb{C}$  から自身への位相写像である. この写像は上で述べたことから  $[p, q], [q, r], [r, p]$  を対応する  $[p', q'], [q', r'], [r', p']$  の上に 1:1 に写像する. さらに  $T(p, q, r)$  の内側の領域を  $T(p', q', r')$  の内側の領域の上に 1:1 に写像する. これは  $T(p, q, r)$  と  $T(p, q, r)$  で囲まれた領域の和集合が

$$z = t_1p + t_2q + t_3r, \quad t_1 + t_2 + t_3 = 1, \quad t_1, t_2, t_3 \in [0, 1]$$

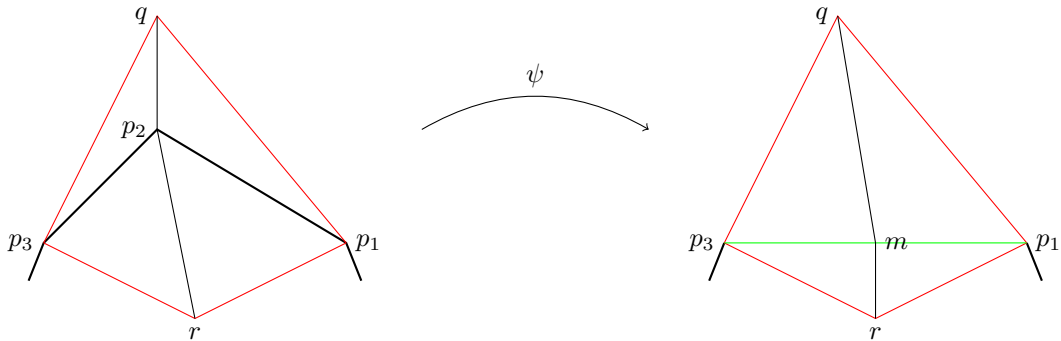
と表されることと, 上と同様な考察より従う.  $(t_1, t_2, t_3)$  を  $z$  の重心座標 (barycentric coordinate) と呼ぶ.

$$z \in D_i(T(p, q, r)) \iff t_1, t_2, t_3 \in (0, 1)$$

であることに注意する.

**Theorem 5.2.6.**  $P = P(p_1, p_2, \dots, p_n)$  を単純多角形とすれば位相写像  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  で  $P$  をある三角形の上に, そして  $P$  で囲まれた領域を三角形で囲まれた領域の上に写像するものが存在する.

*Proof.* 頂点の個数  $n$  に関する帰納法を用いて証明する.  $n = 3$  の場合は明らかであるから  $n \geq 4$  とする. 一般性を失うことなくまた  $T(p_1, p_2, p_3)$  が  $P$  の耳であると仮定してよい. このとき  $P(p_1, p_3, \dots, p_n)$  もまた単純多角形になる.



頂点  $p_2$  の近くに点  $q$  を  $P$  の外側にあるように取る. また  $[p_1, p_3]$  の中点を  $m$  とし,  $m$  の近くに点  $r$  を  $T(p_1, p_2, p_3)$  の外側でかつ  $P$  の内側にあるように取る. このとき  $p_1, q, p_3, r$  を 4 頂点として持つ四角形を  $Q$  とし, 写像  $\psi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  を以下のように定義する. まず  $Q$  及び  $Q$  の外側では  $\psi$  は恒等写像とし,  $\bar{Q}$  の各三角形において

$$\begin{aligned} T(p_2, q, p_3) &\text{ を } T(m, q, p_3) \text{ にうつすアフィン写像,} \\ T(p_2, p_1, q) &\text{ を } T(m, p_1, q) \text{ にうつすアフィン写像,} \\ T(p_2, p_3, r) &\text{ を } T(m, p_3, r) \text{ にうつすアフィン写像,} \\ T(p_2, r, p_1) &\text{ を } T(m, r, p_1) \text{ にうつすアフィン写像} \end{aligned}$$

をつないで写像を作る. 定理の主張の直前に述べた注意により, このようなアフィン写像達は各三角形の共有辺上で一致し, 特に  $Q$  上では恒等写像に一致するので,  $\psi$  は位相写像である. そして  $\psi$  は  $P$  を

$P' = P(p_1, p_3, \dots, p_n)$  の上に写像し, また  $P$  の内側の領域を  $P' = P(p_1, p_3, \dots, p_n)$  の内側の領域の上に写像する.

帰納法の仮定より  $P'$  を三角形の上に, そして  $P'$  の内側の領域を, その三角形の内側の領域の上につす位相写像  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  が存在する. このとき合成写像  $h \circ \psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  が要求される性質を持つ位相写像である.  $\square$

**Theorem 5.2.7** (PL Schönflies の定理).  $P$  を Jordan 多角形とし,  $\gamma : \partial\mathbb{D} \rightarrow P$  を連続な全単射とすると, 同相写像  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  で  $f|_{\partial\mathbb{D}} = \gamma$  を満たすものが存在する.

*Proof.* Theorem 5.2.6 における  $\mathbb{C}$  から自身への同相写像で  $P$  をある三角形に写像するものを取り, さらにこの三角形を  $\partial\mathbb{D}$  に写像する  $\mathbb{C}$  から自身への同相写像を適当に取り (読者自らこのような同相写像を作ることを試みよ), 合成したものを  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  と置く. このとき  $h \circ \gamma(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$  であり  $h \circ \gamma$  は  $\partial\mathbb{D}$  から自身への同相写像であるから

$$H(z) = \begin{cases} |z|h \circ \gamma\left(\frac{z}{|z|}\right), & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

は  $\mathbb{C}$  から自身への同相写像である. このとき  $f = h^{-1} \circ H$  と置けば  $\mathbb{C}$  から自身への同相写像であり  $f|_{\partial\mathbb{D}} = \gamma$  を満たす  $\square$

### 5.3 単純多角形による単純曲線の近似

この節では Riemann 多様体上の単純曲線に関する Boedihardjo and Geng [4] の内容を, (複素) 平面に限定して紹介する.

はじめに単純弧が補間的な単純折れ線により近似が出来ることを示そう.

**Theorem 5.3.1.**  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  を単純弧とし,  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  とする. このとき区間  $[0, 1]$  の分割  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$  で次の性質を持つものが存在する.

$$(i) \max\{t_k - t_{k-1} : k = 1, \dots, n\} \leq \delta.$$

$\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)$  を結ぶ折れ線  $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  を

$$(5.3.1) \quad \hat{\gamma}(t) = \left(1 - \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\right) \gamma(t_{k-1}) + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \gamma(t_k), \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad k = 1, \dots, n$$

と置くとき,

$$(ii) |\hat{\gamma}(t) - \gamma(t)| \leq \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

(ii)  $\hat{\gamma}$  は単純.

*Proof.* 必要ならば  $\delta$  を小さく取り直すことにより

$$(5.3.2) \quad |t - s| \leq \delta \implies |\gamma(t) - \gamma(s)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つと仮定する.  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \gamma([0, 1]) (\subset \mathbb{C})$  はコンパクト空間から Hausdorff 空間の上への連続な単射であるから, 逆写像も連続である. 従って  $\eta \in (0, \varepsilon)$  を

$$(5.3.3) \quad |\gamma(t) - \gamma(s)| \leq \eta \implies |t - s| \leq \delta$$

が成り立つように取れる. 次に  $t_0 = 0$  とおいて帰納的に  $t_{k-1}$  まで取れたとして

$$t_k = \sup \left\{ t \in [t_{k-1}, 1] : |\gamma(t) - \gamma(t_{k-1})| \leq \frac{\eta}{2} \right\}$$

と定義する. このとき  $t_{k-1} < 1$  ならば  $\gamma$  の連続性より  $t_{k-1} < t_k \leq 1$  が成り立ち, 特に  $t_k < 1$  ならば  $|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \frac{\eta}{2}$  が成り立つ. ここで  $t_k < 1$  を満たす  $t_k$  が有限個であり, 従ってある  $n \in \mathbb{N}$  について

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = t_{n+1} = \cdots = 1$$

となることを示そう. まず  $\gamma$  の一様連続性より

$$|t - s| < \rho \implies |\gamma(t) - \gamma(s)| < \frac{\eta}{2}$$

を満たす  $\rho > 0$  が取れる.  $t_k < 1$  ならば  $|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \frac{\eta}{2}$  であるから  $t_k - t_{k-1} \geq \rho$  が成り立つ. よって  $t_k < 1$  を満たす  $k$  について  $t_k \geq k\rho$  が成り立つので結局  $t_k < 1$  となる  $k$  は有限個である. このとき

$$(5.3.4) \quad |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \frac{\eta}{2},$$

$$(5.3.5) \quad |\gamma(t) - \gamma(t_{k-1})| > \frac{\eta}{2} \text{ for } t \in (t_k, 1], \quad k = 1, \dots, n-1,$$

$$(5.3.6) \quad |\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})| \leq \frac{\eta}{2}$$

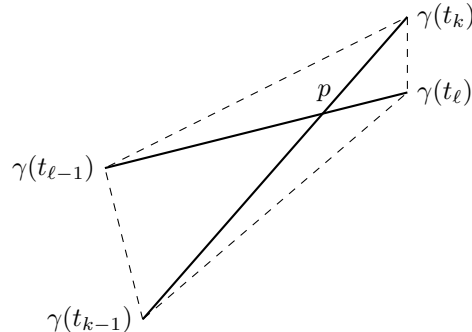
が成り立つことに注意しよう.

このように取った分割  $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$  が (i) を満たすことは上の評価式と (5.3.3) より従う. また  $t \in [0, 1]$  について  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$  を満たす  $k$  を取れば (5.3.2) より

$$\begin{aligned} |\hat{\gamma}(t) - \gamma(t)| &\leq |\hat{\gamma}(t) - \gamma(t_{k-1})| + |\gamma(t) - \gamma(t_k)| \\ &\leq \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| + |\gamma(t) - \gamma(t_{k-1})| \leq \frac{\eta}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

となるので (ii) が成り立つ.

残るは (iii)  $\hat{\gamma}$  の単射性である. まず折れ線  $\hat{\gamma}$  において隣り合う 2 つの線分  $[\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)]$ ,  $[\gamma(t_k), \gamma(t_{k+1})]$  の共有点は  $\gamma(t_k)$  のみである. 実際もし  $\gamma(t_k)$  以外に共有点を持てば  $k \leq n-2$  のときは (5.3.4) より  $|\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_k)| = |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1})| = \frac{\eta}{2}$  より 2 つの線分は一致し,  $\gamma(t_{k-1}) = \gamma(t_{k+1})$  が成り立つ. これは  $\gamma$  の単射性に矛盾する.  $k = n-1$  のときは (5.3.6) より  $|\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})| \leq \frac{\eta}{2} \leq |\gamma(t_{n-1}) - \gamma(t_{n-2})|$  より  $[\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)] \subset [\gamma(t_{n-2}), \gamma(t_{n-1})]$  が成り立つが, これより  $|\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-2})| \leq \frac{\eta}{2}$  を得る. 一方  $t_{n-1}$  の定義より  $t \in (t_{n-1}, 1]$  について  $|\gamma(t) - \gamma(t_{n-1})| > \frac{\eta}{2}$  が成り立つので矛盾を生じる.



最後に隣り合わない 2 つの線分  $[\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)]$ ,  $[\gamma(t_{\ell-1}), \gamma(t_\ell)]$ ,  $1 \leq k < k+2 \leq \ell \leq n$  が共有点を持たないことを背理法で示そう. そこで 2 つの線分  $[\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)]$  と  $[\gamma(t_{\ell-1}), \gamma(t_\ell)]$  が交わると仮定する. この

とき図のような  $\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k), \gamma(t_{\ell-1}), \gamma(t_\ell)$  を頂点に持つ四角形を考えよう. (5.3.5) より, 四角形の全ての辺について長さは  $\frac{\eta}{2}$  を越えることに注意しよう. しかしながら 2 本の対角線の長さは  $\frac{\eta}{2}$  以下であるから 4 つの辺の中で長さが  $\frac{\eta}{2}$  より小さいものが存在する! これを示せば証明は完了する. 実際, 対角線の交点を  $p$  とおけば,

$$\min\{|\gamma(t_{k-1}) - p|, |\gamma(t_k) - p|\} \leq \frac{\eta}{4}, \quad \min\{|\gamma(t_{\ell-1}) - p|, |\gamma(t_\ell) - p|\} \leq \frac{\eta}{4}$$

が成り立つ. 例えば  $|\gamma(t_k) - p| \leq \frac{\eta}{4}, |\gamma(t_\ell) - p| \leq \frac{\eta}{4}$  の場合は三角不等式より  $|\gamma(t_k) - \gamma(t_\ell)| < \frac{\eta}{2}$  を得る. 他の 3 つの場合も同様に矛盾を導くことが出来る.  $\square$

単純閉曲線についても同様な補間近似曲線が存在するが, 単純弧の場合よりも証明の難度は高い.

**Theorem 5.3.2.**  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  を Jordan 閉曲線とし,  $\varepsilon > 0, \delta > 0$  とする. このとき区間  $[0, 1]$  の分割  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  で,  $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)$  を結ぶ折れ線  $\hat{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  を

$$\hat{\gamma}(t) = \left(1 - \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\right) \gamma(t_{k-1}) + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \gamma(t_k), \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad k = 1, \dots, n$$

と置くととき次の性質を持つものが存在する.

- (i)  $\max\{t_k - t_{k-1} : k = 1, \dots, n\} < \delta$ .
- (ii)  $|\hat{\gamma}(t) - \gamma(t)| < \varepsilon, 0 \leq t \leq 1$ .
- (ii)  $\hat{\gamma}$  は単純多角形.

*Proof.*  $\delta_1 > 0$  を

$$(5.3.7) \quad |t - s| < \delta_1 \implies |\gamma(t) - \gamma(s)| < \varepsilon$$

が成り立つように取り,  $\eta_1 \in (0, \varepsilon)$  を

$$(5.3.8) \quad |\gamma(t) - \gamma(s)| < \eta_1 \implies |t - s| < \min\{\delta, \delta_1\}$$

が成り立つように取る.

$$M = \max_{0 \leq t \leq 1} |\gamma(t) - \gamma(0)|$$

と置いて  $M = |\gamma(s_0) - \gamma(0)|$  を満たす点  $s_0 \in (0, 1)$  を取り

$$0 < \eta < \min\left\{\eta_1, \frac{\varepsilon}{2}, \frac{M}{2}\right\}$$

を満たす  $\eta$  を取る.

以上の準備のもとで

$$t_1 = \sup\{t \in [0, s_0] : |\gamma(t) - \gamma(0)| \leq \eta\}$$

$$t^* = \inf\{t \in [s_0, 1] : |\gamma(t) - \gamma(0)| \leq \eta\}$$

と置けば  $0 < t_1 < s_0 < t^* < 1$  が成り立つ. また  $\eta \leq \eta_1 < \varepsilon$  であるから  $t_1 < \delta, 1 - t^* < \delta$  が成り立つ. さらに

$$(5.3.9) \quad |\gamma(t) - \gamma(0)| > \eta, \quad t_1 < t < t^*, \quad |\gamma(t_1) - \gamma(0)| = |\gamma(t^*) - \gamma(0)| = \eta$$

が成り立つ.



さて  $\gamma|_{[t_1, t^]}$  は単純曲線であるから帰納的に

$$t_k = \sup \left\{ t \in [t_{k-1}, 1] : |\gamma(t) - \gamma(t_{k-1})| \leq \frac{\eta}{2} \right\}, \quad k \geq 2$$

と定義すれば, Theorem 5.3.1 の証明と同様にして有限回で  $t^*$  に達し, 以降の全ての番号について  $t_k = t^*$  となる. そこで

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-2} < t_{n-1} = t^*$$

が成り立つように  $n \geq 2$  を取りあらためて  $t_n = 1$  と置く. このとき

$$(5.3.10) \quad |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \frac{\eta}{2}, \quad k = 2, \dots, n-2 \quad |\gamma(t_{n-1}) - \gamma(t_{n-2})| \leq \frac{\eta}{2},$$

$$(5.3.11) \quad |\gamma(t_1) - \gamma(t_0)| = \eta, \quad |\gamma(t_{n-1}) - \gamma(t_0)| = \eta$$

が成り立つ. また  $\eta < \eta_1$  より

$$(5.3.12) \quad \max\{t_1 - t_0, t_2 - t_1, \dots, t_{n-1} - t_{n-2}, t_n - t_{n-1}\} < \min\{\delta, \delta_1\} \leq \delta$$

が成り立つ. 特に  $2 \leq k \leq n-2$  ならば

$$(5.3.13) \quad |\gamma(t) - \gamma(t_{k-1})| > \frac{\eta}{2}, \quad t_k < t < t_{n-1} = t^*$$

が成り立つ. このように取った区間  $[0, 1]$  の分割  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} = t^* < t_n = 1$  について  $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \gamma(t_2), \dots, \gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n) = \gamma(t_0)$ , を結ぶ閉じた折れ線を

$$\hat{\gamma}(t) = \left(1 - \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\right) \gamma(t_{k-1}) + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \gamma(t_k), \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad k = 1, \dots, n$$

と定義する.

このとき (5.3.12) より (i) が成り立つ. また  $t \in [0, 1]$  について  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$  を満たす  $k$  を取れば

$$\begin{aligned} |\hat{\gamma}(t) - \gamma(t)| &\leq |\hat{\gamma}(t) - \gamma(t_{k-1})| + |\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_k)| \\ &\leq \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| + |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leq 2\eta < \varepsilon \end{aligned}$$

より (ii) が成り立つ.

最後に  $\hat{\gamma}$  が単純であることを背理法で示そう. 作り方から区間  $[t_1, t_{n-1}]$  と  $[0, t_1] \cup [t_{n-1}, t_n]$  のそれぞれで単射である. また (5.3.9) より  $[\gamma(t_0), \gamma(t_1)]$  と  $[\gamma(t_1), \gamma(t_2)]$  は  $\gamma(t_1)$  以外に共有点を持たない. 同様に  $[\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)]$  と  $[\gamma(t_{n-2}), \gamma(t_{n-1})]$  は  $\gamma(t_{n-1})$  以外に共有点を持たない. 従って  $\hat{\gamma}$  が単純でないとする, 次の少なくとも一方が起こる.

(I) ある  $k \in \{3, \dots, n-1\}$  について 2 線分  $[\gamma(0), \gamma(t_1)], [\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)]$  は共有点を持つ

(II) ある  $k \in \{2, \dots, n-2\}$  について 2 線分  $[\gamma(0), \gamma(t_{n-1})], [\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)]$  は共有点を持つ

(I) が起きたとして 2 線分の交点を  $p$  と置くと  $\min\{|\gamma(t_k) - p|, |\gamma(t_{k-1}) - p|\} \leq \frac{1}{2} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \frac{\eta}{4}$  である. そこで  $|\gamma(t_k) - p| \leq \frac{\eta}{4}$  と仮定して証明を進めよう. ( $|\gamma(t_{k-1}) - p| \leq \frac{\eta}{4}$  の場合も同様である.) まず  $|\gamma(t_0) - p| > \frac{3\eta}{4}$  が成り立つ. 実際そうでないと  $|\gamma(t_0) - p| \leq \frac{3\eta}{4}$  が成り立つならば

$$\eta < |\gamma(t_0) - \gamma(t_k)| \leq |\gamma(t_0) - p| + |p - \gamma(t_k)| \leq \frac{3\eta}{4} + \frac{\eta}{4} = \eta$$

となり矛盾を生じる. 従って  $|\gamma(t_0) - p| > \frac{3\eta}{4}$  が成り立つ. これより  $|\gamma(t_1) - p| < \frac{\eta}{4}$  が成り立ち, さらに

$$|\gamma(t_k) - \gamma(t_1)| \leq |\gamma(t_k) - p| + |p - \gamma(t_1)| < \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{4} = \frac{\eta}{2}$$

が成り立つことになるが, これは (5.3.13) より得られる

$$|\gamma(t) - \gamma(t_1)| \geq \frac{\eta}{2}, \quad t_2 \leq t \leq t_{n-1}$$

に反する.  $|\gamma(t_{k-1}) - p| \leq \frac{\eta}{4}$  の場合も同様な議論により

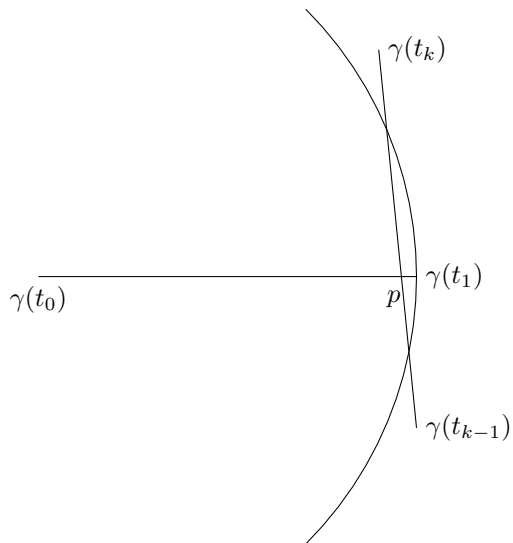
$$|\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_1)| < \frac{\eta}{2}$$

が成り立つことが示されるので, やはり矛盾を生じる,

(II) が起きた場合も同様に

$$|\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_{n-1})| < |\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_k)| = \frac{\eta}{2} \quad \text{または} \quad |\gamma(t_k) - \gamma(t_{n-1})| < |\gamma(t_k) - \gamma(t_k)| = \frac{\eta}{2}$$

が成り立つので矛盾を生じる.



$$\begin{aligned} |\gamma(t_1) - \gamma(t_0)| &= \eta, \\ |\gamma(t_k) - \gamma(t_0)| &> \eta, \\ |\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_0)| &> \eta, \\ |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| &= \frac{\eta}{2}. \end{aligned}$$

□

## 第 6 章

# 単連結領域

函数論の学習の初等的な段階では Jordan の曲線定理を知っておけば十分であるが, 等角写像論などに進むと単連結領域についての知識も要求される. 領域  $\Omega$  が単連結であることの位相的な定義は “ $\Omega$  内の任意の閉曲線が, 始点に留まったままで動かない曲線に  $\Omega$  内で連続変形出来ること” である. しかしながら函数論の教科書に依っては “ $\Omega$  内の任意の Jordan 曲線  $\gamma$  について  $D_i(\gamma) \subset \Omega$ ” という定義を採用したり, “ $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  が連結であること” を採用するものもある. そこでこの章では,  $\mathbb{C}$  内の領域に関して, これら 3 つの定義が同値であることを証明する. まず準備の為に  $\varepsilon$ -連結の概念を導入する.

### 6.1 $\varepsilon$ -連結性

この節では  $X$  を距離  $d$  を持つ距離空間とする. また  $x \in X$  と  $\varepsilon > 0$  について  $N_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$  と置く.

**Definition 6.1.1.**  $E$  を  $X$  部分集合とする.  $\varepsilon > 0$  について 2 点  $x, y \in E$  が  $E$  内の  $\varepsilon$ -鎖 ( $\varepsilon$ -chain 長方形格子の  $k$ -chain とは全く別の概念である) で結べるとは  $x = a_0, y = a_n$  を満たす有限個の点の列  $\{a_k\}_{k=0}^n \subset E$  で

$$d(a_{k-1}, a_k) \leq \varepsilon, \quad k = 1, \dots, n$$

を満たすものが存在するときを言う. 全ての  $x, y \in E$  が  $E$  内の  $\varepsilon$ -鎖で結べるとき  $X$  は  $\varepsilon$ -連結であると言う.

**Theorem 6.1.2.**  $X$  を距離空間とし,  $E \subset X$  とする.

- (i)  $E$  が連結ならば, 全ての  $\varepsilon > 0$  について  $\varepsilon$ -連結である.
- (ii)  $E$  がコンパクトならば

$$E \text{ は連結} \iff \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ について } E \text{ は } \varepsilon\text{-連結}$$

が成り立つ.

*Proof.*  $x_0 \in X$  を任意に取り固定し,

$$E_\varepsilon = \{x \in E : x \text{ は } x_0 \text{ と } E \text{ 内の } \varepsilon\text{-鎖で結べる}\}, \quad \varepsilon > 0$$

と置く. このとき任意の  $x \in E_\varepsilon$  について  $N_\varepsilon(x) \cap E \subset E_\varepsilon$  が成り立つので  $E_\varepsilon$  は  $E$  の開集合である. また  $E \setminus E_\varepsilon$  も同様に  $E$  の開集合である. 従って  $E = E_\varepsilon \cup (E \setminus E_\varepsilon)$  において右辺は交わらない集合の和である.

よって  $E$  の連結性より  $E = E_\varepsilon$  または  $E = E \setminus E_\varepsilon$  のどちらか一方が成り立つことになるが  $x_0 \in E_\varepsilon$  より前者が成り立つ。

(ii) の " $\Leftarrow$ " の部分については対偶を証明する。  $E$  がコンパクトであると仮定する。もし  $E$  が連結でなければ  $H_1 \cap H_2 = \emptyset$  を満たす 2 つの空でない閉集合  $H_1, H_2$  で共通部分を持たないものにより  $X = H_1 \cup H_2$  と分解される。このとき  $H_1, H_2$  もコンパクトであるから  $d(H_1, H_2) > 0$  が成り立つ。このとき任意の  $x \in H_1, y \in H_2$  について  $0 < \varepsilon < d(H_1, H_2)$  ならば  $x, y$  が  $E$  内の  $\varepsilon$ -鎖で結ぶことが出来ないことは明らかである。  $\square$

**Lemma 6.1.3.**  $\{F_n\}_{n=1}^\infty$  を距離空間  $X$  の空でないコンパクトな集合の減少列とする。このとき  $F = \bigcap_{n=1}^\infty F_n$  は空でない。

*Proof.* もし空ならば開被覆  $F_1 \subset \bigcup_{n=1}^\infty (X \setminus F_n) (= X)$  が得られるが、 $F_1$  はコンパクトゆえ、十分大きな全ての  $N$  について  $F_1 \subset \bigcup_{n=1}^N (X \setminus F_n) = X \setminus F_N$  となる。よって  $F_N \subset X \setminus F_1$  が成り立つが、これと  $F_N \subset F_1$  を合わせて  $F_N = \emptyset$  となり矛盾を生じる。  $\square$

**Theorem 6.1.4.**  $\{F_n\}_{n=1}^\infty$  を距離空間  $X$  の  $\varepsilon$ -連結かつ空でないコンパクトな集合の減少列とする。このとき  $F = \bigcap_{n=1}^\infty F_n$  も  $\varepsilon$ -連結である。

*Proof.* Lemma 6.1.3 より  $F = \bigcap_{n=1}^\infty F_n$  は空でないことに注意する。  $x_0 \in F$  を任意に取り固定し

$$F_0 = \{x \in F : x \text{ は } x_0 \text{ と } F \text{ 内の } \varepsilon\text{-鎖で結べる}\}$$

と置く。勿論  $x_0 \in F_0$  であるから  $F_0$  は空でない。

それでは  $F \setminus F_0 \neq \emptyset$  と仮定し矛盾を導こう。Theorem 6.1.2 の証明中で示したように  $F_0$  及び  $F \setminus F_0$  はコンパクト集合  $F$  内の開部分集合であり、共通部分を持たない。従ってともに閉集合でもあり、コンパクト集合  $F$  の閉部分集合であるからコンパクトである。よって  $\delta = d(F_0, F \setminus F_0) > 0$  であり、 $d(a, b) = \delta$  を満たす  $a \in F_0, b \in F \setminus F_0$  が存在する。

もし  $\delta \leq \varepsilon$  ならば  $a$  と  $b$  は  $F$  内の  $\varepsilon$ -鎖で結べることになり、従って  $x_0$  と  $b$  も  $F$  内の  $\varepsilon$ -鎖で結べる。これは  $b \notin F_0$  に矛盾する。よって  $\delta > \varepsilon$  が成り立つ。そこで

$$F_n \subset N_{\frac{\delta-\varepsilon}{2}}(F) := \left\{ y \in X : \text{ある } x \in F \text{ について } d(x, y) < \frac{\delta-\varepsilon}{2} \right\}$$

を満たす番号  $n$  を取る。このような番号が存在することは次のようにして分かる。もし存在しないと仮定すれば、全ての  $n \in \mathbb{N}$  について  $F_n \not\subset N_\eta(F)$  ( $\eta = \frac{\delta-\varepsilon}{2}$  と置いた) であるから  $F_n \setminus N_\eta(F)$  は空でない。さらに  $F_n \setminus N_\eta(F)$  はコンパクトであり  $n$  について減少列であるから Lemma 6.1.3 と  $F \subset N_\eta(F)$  より

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^\infty (F_n \setminus N_\eta(F)) = \left( \bigcap_{n=1}^\infty F_n \right) \setminus N_\eta(F) = F \setminus N_\eta(F) = \emptyset$$

となり矛盾を生じる。

ここで任意の  $p \in F_0, q \in F \setminus F_0$  について  $p, q \in F_n$  より  $p, q$  を結ぶ  $F_n$  内の  $\varepsilon$ -鎖  $p = a_0, \dots, a_n = q$  が存在する。これら  $\{a_k\}$  の各点と  $F = F_0 \cup (F \setminus F_0)$  との距離は  $\frac{\delta-\varepsilon}{2}$  より小であるから、各  $a_k$  について  $d(a_k, F_0) < \frac{\delta-\varepsilon}{2}$  または  $d(a_k, F \setminus F_0) < \frac{\delta-\varepsilon}{2}$  の少なくとも一方が成り立つが、両方成り立つことはない。実際、両方成り立てば  $d(F_0, F \setminus F_0) \leq d(a_k, F_0) + d(a_k, F \setminus F_0) < \delta - \varepsilon$  となり矛盾を生じる。

さて  $a_0 = p \in F_0$ ,  $a_n = q \in F \setminus F_0$  であるから  $d(a_0, F_0) = 0 < \frac{\delta - \varepsilon}{2}$ ,  $d(a_n, F \setminus F_0) = 0 < \frac{\delta - \varepsilon}{2}$  が成り立つ。従って  $k = 1, \dots, n$  の中に

$$d(a_{k-1}, F_0) < \frac{\delta - \varepsilon}{2}, \quad d(a_k, F \setminus F_0) < \frac{\delta - \varepsilon}{2}$$

が成り立つものが存在する。これと  $d(a_{k-1}, a_k) < \varepsilon$  を合わせて

$$d(F_0, F \setminus F_0) \leq d(a_{k-1}, F_0) + d(a_{k-1}, a_k) + d(a_k, F \setminus F_0) < \frac{\delta - \varepsilon}{2} + \varepsilon + \frac{\delta - \varepsilon}{2} = \delta$$

となり矛盾を生じる。 □

2 点以上を含むコンパクトかつ連結な集合のことを連続体と呼ぶ。

**Theorem 6.1.5.**  $X$  を距離空間とし,  $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$  を  $X$  の連続体の減少列とする。このとき  $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$  は連続体であるか, 1 点である。

*Proof.*  $F \neq \emptyset$  は Lemma 6.1.3 より従う。そして  $F$  は閉集合の列の共通部分ゆえ閉集合であり, コンパクト集合  $F_1$  に含まれるのでコンパクトである。また任意の  $\varepsilon > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  について  $F_n$  は  $\varepsilon$ -連結であるから  $F$  もそうであり,  $\varepsilon$  の任意性より  $F$  は連結である。よって  $F$  は 1 点よりなるか, さもなければ連続体である。 □

**Theorem 6.1.6.** 距離空間  $X$  のコンパクト部分集合  $F$  と  $x \in F$  について  $x$  を含む  $F$  の連結成分  $C$  は

$$C = \{y \in F : \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ について } x \text{ と } y \text{ は } F \text{ 内の } \varepsilon\text{-鎖で結ばれる}\}$$

と表せる。これより特に  $y \in F$  について  $x, y$  が  $F$  の同一の成分に含まれる為の必要十分条件は  $x, y$  が任意の  $\varepsilon > 0$  について  $F$  内の  $\varepsilon$ -鎖で結ばれることである。

*Proof.* “ $\subset$ ” を示そう。  $y \in C$  ならば  $C$  の連結性と Theorem 6.1.2 より任意の  $\varepsilon > 0$  について  $x$  と  $y$  は  $C$  内の  $\varepsilon$ -鎖で結ばれる。従って  $F$  内の  $\varepsilon$ -鎖で結ばれる。

“ $\supset$ ” を示そう。

$$F_n = \{y \in F : y \text{ は } x \text{ と } F \text{ 内の } \frac{1}{n}\text{-鎖で結べる}\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

と置くと,

$$\{y \in F : \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ について } x \text{ と } y \text{ は } F \text{ 内の } \varepsilon\text{-鎖で結ばれる}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

であるから,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subset C$  を示せばよい。Theorem 6.1.2 の証明中で示したように  $F_n$  は閉集合であり, コンパクト集合  $F$  に含まれるので  $F_n$  はコンパクトである。また明らかに  $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$  は減少列であり任意の  $k \in \mathbb{N}$  について

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=k}^{\infty} F_n$$

が成り立つ。ここで上式の右辺はコンパクトかつ  $\frac{1}{k}$ -連結集合の減少列の共通部分ゆえ Theorem 6.1.4 よりコンパクトかつ  $\frac{1}{k}$ -連結である。さらに  $k \in \mathbb{N}$  の任意性より  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$  は連結であり  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subset C$  が成り立つ。  $C$  は  $x$  を含み  $F$  に含まれる最大の連結集合であったから  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subset C$  が成り立つ。 □

**Theorem 6.1.7.**  $X$  を距離空間とし,  $F$  を  $X$  のコンパクト部分集合とする。このとき  $F$  の相異なる成分  $C_1, C_2$  について  $C_1 \subset H_1, C_2 \subset H_2$  を満たす  $F$  の分割  $H_1, H_2$  が存在する。

*Proof.*  $x \in C_1, y \in C_2$  を任意にとると,  $x, y$  は  $F$  の異なる成分に属するので, ある  $\varepsilon > 0$  について  $F$  内の  $\varepsilon$ -鎖で結ばれない. そこで

$$H_1 = \{a \in F : x \text{ と } a \text{ は } F \text{ 内の } \varepsilon\text{-鎖で結ばれる}\}, \quad H_2 = F \setminus H_1$$

と置く. 明らかに  $x \in H_1, y \in H_2$  が成り立つ. このとき Theorem 6.1.2 の証明中で示したように  $H_1, H_2$  はともに開集合であり, 明らかに共通部分を持たない. また  $x \in H_1, y \in H_2$  であるから, ともに空でない. よって  $H_1, H_2$  は  $F$  の分割である. また Theorem 6.1.6 より  $C_1 \subset H_1$  が成り立つ.  $C_2 \subset H_2$  が成り立つことを背理法により示そう. 実際  $C_2 \setminus H_2 \neq \emptyset$  ならば  $H_1 \cup H_2 = F \supset C_2$  より  $C_2 \cap H_1 \neq \emptyset$  が成り立つが  $y \in H_2$  より  $C_2 \cap H_2 \neq \emptyset$  も成り立つ. よって  $C_2 \cap H_1, C_2 \cap H_2$  は  $C_2$  の分割を与えることになり  $C_2$  の連結性に反する.  $\square$

Theorem 6.1.7 は次のように一般化できる.

**Theorem 6.1.8.**  $F$  を距離空間  $X$  のコンパクト部分集合とする. また  $E_1, E_2$  を  $F$  の空でない閉部分集合とし,  $F$  の任意の成分は  $E_1, E_2$  と同時に交わらないとする. このとき  $E_1 \subset H_1, E_2 \subset H_2$  を満たす  $F$  の分割  $H_1, H_2$  が存在する.

*Proof.*  $\eta > 0$  で  $E_1$  の任意の点と  $E_2$  の任意の点が  $F$  内の  $\eta$ -鎖で結べないようなものが存在することを示そう. これが示されたとして

$$H_1 = \{x \in F : x \text{ はある } a \in E_1 \text{ と } F \text{ 内の } \eta\text{-鎖で結べる}\}, \quad H_2 = F \setminus H_1$$

と置けば  $H_1, H_2$  はともに  $F$  の開集合である. そして定義より  $E_1 \subset H_1$  が成り立ち, 上で述べた  $\eta$  の性質より  $E_2 \subset H_2$  が成り立つ.

さてもしこのような  $\eta > 0$  が存在しないとすると  $x_n \in E_1, y_n \in E_2$  で  $F$  内の  $\frac{1}{n}$ -鎖で結べるものが存在する. このとき  $E_1, E_2$  のコンパクト性より  $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in E_1, y_{n_k} \rightarrow y_0 \in E_2$  となる部分列が取れる. 任意の  $\varepsilon > 0$  について

$$\frac{1}{n_k} < \varepsilon, \quad d(x_0, x_{n_k}) < \varepsilon, \quad d(y_0, y_{n_k}) < \varepsilon$$

を満たすように十分大きな  $k$  を取れば,  $x_{n_k}$  と  $y_{n_k}$  は  $\frac{1}{n_k}$ -鎖, 従って  $\varepsilon$ -鎖で結べるので,  $x$  と  $y$  も  $F$  内の  $\varepsilon$ -鎖で結べることになる. よって Theorem 6.1.6 より  $x, y$  は同一の  $F$  の成分に属することになり仮定に反する.  $\square$

Theorem 6.1.8 において  $E_1, E_2$  として,  $F$  の成分や, 成分の有限和などとすることができる.

**Theorem 6.1.9.**  $X$  を距離空間とし,  $F$  を  $X$  のコンパクト部分集合とする. また  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  を  $F$  内の収束点列とし, 各  $n \in \mathbb{N}$  に対し  $x_n, y_n$  は  $F$  の同一の成分に属すとす. このとき  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  も  $F$  の同一の成分に属す.

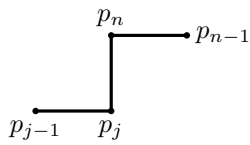
*Proof.* 任意の  $\varepsilon > 0$  について  $d(x_0, x_n) < \varepsilon, d(y_0, y_n) < \varepsilon$  を満たす  $n$  を取る.  $x_n, y_n$  は  $F$  の同一の成分に属するので  $\varepsilon$ -鎖  $a_1 = x_n, \dots, a_k = y_n$  が取れる. これに  $x_0, y_0$  を追加すれば  $a_0 = x_0, a_1 = x_n, \dots, a_k = y_n, a_{k+1} = y_0$  は  $x_0, y_0$  を結ぶ  $F$  内の  $\varepsilon$ -鎖である. よって  $x_0, y_0$  は任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $F$  内の  $\varepsilon$ -鎖で結ばれるので,  $F$  の同一の成分に属す.  $\square$

## 6.2 有界かつ正則な連結 2-chain の境界

この節では第 2 章で導入した長方形  $R = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Re} z \leq b, c \leq \operatorname{Im} z \leq d\}$  とその分割  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b, c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$  よりなる格子  $G$  の概念を用いる.  $k$ -cell,  $k$ -chain ( $k = 0, 1, 2$ ) modulo 2 の和, 及び境界作用素などの定義を思い出しておこう. また正則な 1-chain, 2-chain の定義と, 非正則な 2-chain を正則化する肥厚の操作, そして  $k = 1, 2$  について  $k$ -chain  $K$  の (連結) 成分は,  $k$ -cell の連結性より, やはり  $k$ -chain であることなどを思い出しておこう.

**Theorem 6.2.1.**  $L$  を連結正則な 1-chain とする. このとき  $L$  が 1-cycle ならば  $|L|$  は単純閉曲線であり, 1-cycle でなければ単純弧である.

*Proof.* はじめに  $L$  が 1-cycle の場合を考えよう. このとき  $L$  は奇頂点を持たないので格子  $G$  の頂点  $p$  について  $p \in |L|$  ならば  $p$  を端点に持つ  $L$  の辺は丁度 2 つである. まず  $e_1 \in L$  を任意に取り  $p_0, p_1$  を  $e_1$  の端点とする.  $p_1$  を端点とし  $L$  に属する 1-cell で  $e_1$  以外のものがただ 1 つ存在するので, それを  $e_2$  とし,  $e_2$  の  $p_1$  以外の端点を  $p_2$  とする. このように順序対  $p_0, p_1$  に対して  $p_2$  が一意に定まることを注意する. 次に  $p_1, p_2$  に対して  $p_3$  を取り, 以下同様に続け, 相異なる頂点の列  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$  が得られたとする. 格子上の頂点の個数は有限個であるから  $p_n$  の次の  $p_{n+1}$  が  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$  のどれかに一致したと仮定してよい. このとき  $p_{n+1} = p_0$  であることを示そう. 作り方から  $p_{n+1} \neq p_{n-1}, p_n$  であることに注意する.



ある  $j \in \{1, 2, \dots, p_{n-2}\}$  について  $p_{n+1} = p_j$  と仮定すると順序対  $p_{n-1}, p_n$  に対して  $p_j$  が定まることになる. 順序対  $p_{j-1}, p_j$  について  $p_{j+1}$  が定まることと合わせて考えれば  $p_n = p_{j+1}$  が得られるが, これは  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$  が相異なることに矛盾する. 従って  $p_{n+1} = p_0$  が成り立つ. この

ようにして相異なる頂点の列と  $L$  の 1-cell の列  $e_k = [p_{k-1}, p_k], k = 1, \dots, n$  が得られた. これらをこの順につないだ単純閉曲線を  $\Gamma$  と置く. もし  $L$  に属す 1-cell  $e$  で,  $e_1, \dots, e_n$  以外のものがあれば  $e$  の両端点を  $p'_0, p'_1$  と置いて同様に 1-cell の列をつなぎ単純閉曲線  $\Gamma'$  を取ることが出来る. このとき  $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$  である. 実際, そうでないと仮定し  $\Gamma$  と  $\Gamma'$  が 1-cell を共有すれば接続の一意性から  $\Gamma$  と  $\Gamma'$  は一致するか, 向きが異なるかになりどちらにしても  $e$  が  $e_1, \dots, e_n$  以外であることに矛盾する.  $\Gamma$  と  $\Gamma'$  が 1 頂点  $p$  を共有し, 1-cell を共有しなければ  $p$  を頂点に持ち  $L$  に属す 1-cell は 4 つとなり非正則性に反する. 従って  $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$  であるが, これは  $L$  の連結性に反する. よって  $L$  に属す 1-cell は  $e_1, \dots, e_n$  で尽くされる.

$L$  が 1-cycle でない時は  $\dot{L} \neq 0^0$  であるから  $p_0 \in \dot{L}$  を 1 つ取る. そして  $p_0$  を端点とし  $L$  に属する 1-cell がただ一つ存在するので, それを  $e_1 = [p_0, p_1]$  と置く. 上と同じように頂点を共有する 1-cell をつなぐ操作を行うが, 今度は途中で止まる可能性がある. そこで  $p_0, p_1, \dots, p_n$  まで相異なる点を 1-cell でつなぐことが可能で, これ以上は (i) 点が重複するか, (ii) つなぐ操作が不可能になったとする.

(i) の場合は上で示したように  $p_{n+1} = p_0$  が成り立つが,  $e_1 = [p_0, p_1]$  と  $e_{n+1} = [p_n, p_0]$  が  $p_0$  を共有し, 正則性から  $p_0$  を端点とする  $L$  の 1-cell は存在しない. しかしながらこれは  $p_0 \in \dot{L}$  に矛盾する. 従って (i) が起こることはない.

(ii) の場合  $p_n$  を端点とする  $L$  の 1-cell が 1 本のみで  $e_n = [p_{n-1}, p_n]$  に他ならない. 従って  $p_n \in \dot{L}$  であり,  $e_1, \dots, e_n$  をつないで単純弧を得る.  $L$  に属す 1-cell が  $e_1, \dots, e_n$  で尽くされることも上と同様に示すことが出来る. □

**Corollary 6.2.2.**  $L$  が正則な 1-chain ならば, その成分は階段単純弧または階段単純閉曲線である.

**Definition 6.2.3.** 上の Lemma のようにある格子上的 1-chain であり, 端点を共有する 1-cell をつないで出来る単純弧とみなせるものを階段単純弧と呼び, 同様に 1-cell をつないで出来る単純閉曲線とみなせるものを階段単純閉曲線 (または階段 Jordan 曲線) と呼ぶ.

**Lemma 6.2.4.** 2-chain  $S$  が正則で連結ならば  $\text{Int } |S|$  も連結である.

*Proof.* 点  $p, q \in \text{Int } |S|$  について  $p \in |s|, q \in |t|$  を満たす 2-cell  $s, t \in S$  を取る. このとき  $p \in \text{Int } |S|$  より  $p$  と  $s$  の中心を結ぶ閉線分は  $\text{Int } |S|$  に含まれる. 同様に  $q$  と  $t$  の中心を結ぶ閉線分も  $\text{Int } S$  に含まれる.  $S$  は連結であるから Theorem 2.3.1 より  $s$  から出発し,  $t$  に達する 2-cell の列で  $s = s_1, \dots, s_n = t$  で各 2-cell は全て  $S$  に属し, 列において隣り合う 2-cell 同士が点を共有するものが存在する.  $S$  は正則であるから, 必要ならば 2-cell を追加することにより隣り合う 2-cell は辺を共有すると仮定してよい. このとき, 各 2-cell の中心を線分で結び, つないでゆけば  $s$  の中心と  $t$  の中心を結ぶ折れ線が出来る. そしてこの折れ線は  $\text{Int } S$  に含まれる.  $p$  と  $s$  の中心を結ぶ線分に, この折れ線をつなぎ, さらに  $t$  の中心を  $q$  を結ぶ線分をつなげば,  $p$  と  $q$  を結び  $\text{Int } S$  内を通る折れ線が出来上がる. よって  $\text{Int } S$  は弧状連結であり, 従って連結である.  $\square$

**Theorem 6.2.5.**  $S$  が有界, 正則かつ連結な 2-chain のとき  $\dot{S}$  の各成分は階段単純閉曲線であり, その中にただ一つ  $\text{Int } |S| \subset D_i(\Gamma)$  を満たす階段単純閉曲線  $\Gamma$  が存在する.  $\Gamma$  以外に成分が存在しなければ

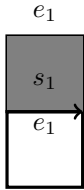
$$\text{Int } |S| = D_i(\Gamma) \quad \text{and} \quad |S| = \overline{D_i(\Gamma)}$$

が成り立ち. また  $\Gamma$  以外の成分が存在すれば  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$  と置く時

$$(6.2.1) \quad \text{Int } S = D_i(\Gamma) \cap \bigcap_{j=1}^k D_o(\Gamma_j) \quad \text{and} \quad |S| = \overline{D_i(\Gamma)} \cap \bigcap_{j=1}^k \overline{D_o(\Gamma_j)}$$

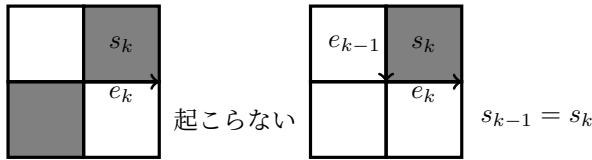
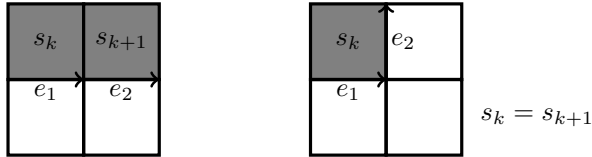
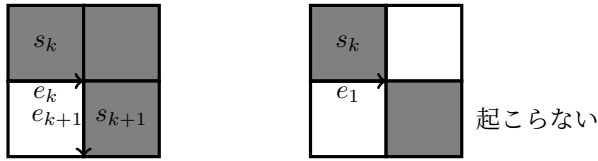
が成り立つ.

*Proof.* Step 1.  $\dot{S}$  の各成分は正則な 1-cycle であるから, Theorem 6.2.1 より階段単純閉曲線である. これら成分の単純閉曲線の中に  $\text{Int } |S|$  をその内側に含むものが存在することを示そう.



$S$  に属す 2-cell で, 最も下にあり, さらにその中で一番左にあるものを  $s_1$  と置き,  $s_1$  の下の辺である 1-cell を  $e_1$  と置く.  $e_1$  の下の 2-cell は  $S$  に含まれない.  $e_1$  には  $s_1$  の内側が進行方向に向かって左に見える向きを付けておく. 以下ではこのような向きのついた 1-cell を帰納的に取っていくが, その方法は Theorem 6.2.1 と同じである. が, ここでは冗長を厭わず説明することにする.





1-cell  $e_k$  で進行方向に向かって左側の 2-cell が  $S$  に属し, 右側の 2-cell が  $S$  に属さないものが取れたとする. このとき  $e_k$  に引き続き, 1-cell  $e_{k+1}$  で進行方向に向かって左側の 2-cell が  $S$  に属し, 右側の 2-cell が  $S$  に属さないものが一意的存在する. 実際, 例えば  $e_k$  が左から右へ向かう 1-cell で  $s_k$  を  $e_k$  の左側の 2-cell とする.  $S$  に属す 2-cell に影をつけて表せば, 下図のように, 4 つの場合がある. この中で下図の右上の場合は  $S$  が正則であることより起こらず, この場合以外は  $e_{k+1}$  が一意的に取れることが図から了解できる.

逆に  $e_k$  の前の辺  $e_{k-1}$  も一意的に取れることは, 同様に左図より分かる.

さて  $e_1$  から出発し,  $\dot{S}$  に属す辺で進行方向に向かって左側の 2-cell が  $S$  に属すのを一意的に次々に取って行けば,  $\dot{S}$  に含まれる辺は有限個しかないから, いつかは重複が起こる. そこで

$$e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}$$

に於いて,  $e_1, \dots, e_n$  が相異なり,  $e_{n+1}$  が  $e_1, \dots, e_n$  のどれかに一致するとしよう. もし  $e_j = e_{n+1}$  を満たす  $j \in \{2, \dots, n\}$  があれば 1-cell の取り方に関する逆向きの一意性より  $e_{j-1}$  と  $e_n$  が一致することになるので矛盾である. 従って  $e_{n+1} = e_1$  である. そこで  $\Gamma$  を折れ線  $e_1, e_2, \dots, e_n$  よりなる閉曲線と置けば,  $\Gamma$  は単純である. 実際, 単純であることは次のように示される.  $e_1, e_2, \dots, e_n$  の中に隣り合う辺以外に共有点を持つ 2 つの辺があるとする. 適当に辺の番号をずらせば  $e_1$  と  $e_j, j \in \{3, \dots, n-1\}$  が  $e_1$  の終点を共有すると仮定して一般性を失わない. しかしながら  $S$  は非正則頂点を持たないので  $e_2$  以外に,  $e_1$  の終点を共有する  $\dot{S}$  の辺は存在しない.

以上より  $e_1, e_2, \dots, e_n$  をつないで出来た曲線を  $\Gamma$  とおけば  $\Gamma \subset |\dot{S}| = \partial|S|$  より  $\text{Int } S \cap \Gamma = \emptyset$  である. Lemma 6.2.4 より  $\text{Int } S$  は連結であるから

$$(6.2.2) \quad \text{Int } S \subset D_i(\Gamma), \quad \text{Int } S \subset D_o(\Gamma) \quad \text{のどちらか一方のみが成り立つ.}$$

ここで  $e_1$  の下の 2-cell を  $t$  と置けば  $\text{Int } t \subset D_o(\Gamma)$  が成り立つ. 実際  $e_1$  を含む水平線より下側に,  $S$  に含

まれる 2-cell はない. 従って  $t$  の任意の内点から下方に垂直の半直線を引けば, この半直線は  $S$  を通らず, 従って  $\Gamma \subset \partial S \subset S$  も通らない. 半直線の連結性より, この半直線は  $D_i(\Gamma)$  または  $D_o(\Gamma)$  のどちらか一方のみに含まれる. 半直線は非有界であるから  $D_o(\Gamma)$  に含まれる. よって  $\text{Int } t \subset D_o(\Gamma)$  である. 次に  $e_1$  の上の 2-cell  $s$  についても  $\text{Int } s \cap \Gamma = \emptyset$  と連結性より  $\text{Int } s \subset D_i(\Gamma)$  または  $\text{Int } s \subset D_o(\Gamma)$  のどちらか一方が成り立つ. もし  $\text{Int } s \subset D_o(\Gamma)$  が成り立ったとすれば  $\text{Int } t \subset D_o(\Gamma)$ ,  $e_1 \subset \Gamma$  と合わせると  $e_1$  の端点以外の点は,  $D_i(\Gamma)$  と交わらないある近傍を持つことが分かる. これは  $e_1 \subset \Gamma \subset \partial D_i(\Gamma)$  に矛盾する. よって  $\text{Int } s \subset D_i(\Gamma)$  が成り立つ. これより (6.2.2) において  $\text{Int } S \subset D_i(\Gamma)$  の方が成り立つことが従う.

このように構成した  $\Gamma$  は  $\dot{S}$  に含まれる連結集合であるから  $\Gamma$  を含む  $\dot{S}$  の連結成分である 1-chain  $L$  が存在する.  $\Gamma$  が  $L$  と一致することは, 次のようにして分かる. もし  $\Gamma \subsetneq |L|$  ならば  $\Gamma$  を構成する  $e_1, \dots, e_n$  の中に現れない 1-cell  $e$  で  $L$  に属し,  $e \cap (e_1 \cup \dots \cup e_n) \neq \emptyset$  を満たすものが存在する. よって  $e \cap e_j \neq \emptyset$  を満たす  $j \in \{1, \dots, n\}$  が存在する. 従って  $e$  と  $e_j$  は端点を共有するが  $e_j$  と端点を共有する 1-cell は  $e_{j-1}$  と  $e_{j+1}$  のみであるから矛盾を生じる. ( $j=1$  のときは  $e_0 = e_n$ ,  $j=n$  のときは  $e_{n+1} = e_1$  と置く.)

Step 2.  $\Gamma$  の一意性を示そう.  $\Gamma'$  が  $\dot{S}$  の成分で  $\text{Int } |S| \subset D_i(\Gamma')$  が成り立つとして  $\Gamma' = \Gamma$  を示す. もし  $\Gamma' \neq \Gamma$  ならば相異なる成分は交わらないので

$$\Gamma' \subset |S| \subset \overline{D_i(\Gamma)} = D_i(\Gamma) \cup \Gamma$$

が成り立つ.  $\Gamma$  と  $\Gamma'$  を取り替えて同じ議論を行い, まとめると

$$\Gamma' \subset D_i(\Gamma) \quad \text{and} \quad \Gamma \subset D_i(\Gamma')$$

が成り立つ. しかしながら上式の左側の包含関係より  $D_i(\Gamma') \subset D_i(\Gamma)$  を得るが, これと上式の右側の包含関係と合わせると

$$\Gamma \subset D_i(\Gamma') \subset D_i(\Gamma)$$

となり矛盾を生じる. よって  $\Gamma$  は一意である.

Step 3.  $\dot{S}$  が  $\Gamma$  以外に成分を持たない時は  $|S| = \overline{D_i(\Gamma)}$  を示そう. まず  $\dot{S} = \Gamma$  に注意する.  $T = \Omega^2 + S$  と置くと  $D_i(\Gamma) \cap |\dot{S}| = D_i(\Gamma) \cap |\Gamma| = \emptyset$  より

$$D_i(\Gamma) \subset \hat{C} \setminus |\dot{S}| = \text{Int } |S| \cup \text{Int } |T|$$

を得るが,  $D_i(\Gamma)$  の連結性より  $D_i(\Gamma) \subset \text{Int } |S|$  または  $D_i(\Gamma) \subset \text{Int } |T|$  のどちらか一方が成り立つ. Step 1 において,  $S$  の一番下の 2-cell の中で最も左の 2-cell  $s_1$  が  $\text{Int } s_1 \subset D_i(\Gamma) \cap \text{Int } |S|$  を満たすことを示しているので  $D_i(\Gamma) \subset \text{Int } |S|$  が成り立つ. よって  $D_i(\Gamma) = \text{Int } |S|$  が成り立ち. 両辺の閉包を取れば  $|S| = \overline{D_i(\Gamma)}$  が成り立つ.

Step 4.  $\dot{S}$  が  $\Gamma$  以外の成分  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$  を持つと仮定し  $\text{Int } |S| \subset D_i(\Gamma) \cap \bigcap_{j=1}^k D_o(\Gamma_j)$  を示そう. このとき上と同様な議論により  $\Gamma_j \subset D_i(\Gamma)$  が成り立つ. また  $\text{Int } |S| \cap \Gamma_j = \emptyset$  と  $\text{Int } |S|$  の連結性より  $\text{Int } |S|$  は  $D_i(\Gamma_j)$  または  $D_o(\Gamma_j)$  のどちらか一方に含まれる. Step 1 の 1-cell  $s_1 \in S$  について  $\text{Int } s_1$  の任意の点について垂直下向きの半直線を  $\Gamma_j$  と交わらずに引くことが可能であるから  $\text{Int } s_1 \in D_o(\Gamma_j)$  である. よって  $\text{Int } |S| \subset D_o(\Gamma_j)$  が成り立つ. 従って

$$\text{Int } |S| \subset D_i(\Gamma) \cap \bigcap_{j=1}^k D_o(\Gamma_j)$$

が成り立つ. また  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$  より

$$(6.2.3) \quad |S| \subset \overline{D_i(\Gamma) \cap \bigcap_{j=1}^k D_o(\Gamma_j)} \subset \overline{D_i(\Gamma)} \cap \bigcap_{j=1}^k \overline{D_o(\Gamma_j)}$$

も成り立つ.

Step 5. 最後に逆の包含関係を示そう. 相異なる  $p, q \in \{1, \dots, k\}$  について  $|\Gamma_p| \subset |S| \in \overline{D_o(\Gamma_q)}$  であるから Theorem 4.4.2 (b) より  $\overline{D_i(\Gamma_p)} \cap \overline{D_i(\Gamma_q)} = \emptyset$  が成り立つ. また

$$|\Gamma_p| \subset |S| \subset \overline{D_i(\Gamma)} = D_i(\Gamma) \cup |\Gamma|$$

と  $|\Gamma_p| \cap |\Gamma| = \emptyset$  より  $|\Gamma_p| \subset D_i(\Gamma)$  が成り立つ. これより Theorem 4.4.2 (a) を用いて  $\overline{D_i(\Gamma_p)} \subset D_i(\Gamma)$  が従い, 特に  $\overline{D_i(\Gamma_p)} \cap \overline{D_o(\Gamma)} = \emptyset$  が成り立つ. 以上をまとめて

$$(6.2.4) \quad \overline{D_i(\Gamma_p)} \cap \overline{D_o(\Gamma)} = \emptyset \quad \text{and} \quad \overline{D_i(\Gamma_p)} \cap \overline{D_i(\Gamma_q)} = \emptyset \quad \text{for } p, q \in \{1, \dots, k\} \text{ with } p \neq q$$

が成り立つ. これらの事実と Janiszewski の定理の系を用いると  $V := D_i(\Gamma) \cap \bigcap_{j=1}^k D_o(\Gamma_j)$  が領域であることを示せる. 実際まず  $\overline{D_o(\Gamma)} = \hat{C} \setminus D_i(\Gamma)$  と  $\overline{D_i(\Gamma_1)} = \hat{C} \setminus D_o(\Gamma_1)$  は交わらないので Corollary 3.1.5 より  $D_i(\Gamma) \cap D_o(\Gamma_1)$  は領域である. 次に

$$\hat{C} \setminus \{D_i(\Gamma) \cap D_o(\Gamma_1)\} = \overline{D_o(\Gamma)} \cup \overline{D_i(\Gamma_1)}$$

と  $\hat{C} \setminus D_o(\Gamma_2) = \overline{D_i(\Gamma_2)}$  は交わらないので再び Corollary 3.1.5 を用いて  $D_i(\Gamma) \cap D_o(\Gamma_1) \cap D_o(\Gamma_2)$  も領域である. 以下帰納的に議論を進めれば  $V = D_i(\Gamma) \cap \bigcap_{j=1}^k D_o(\Gamma_j)$  が領域であることが分かる.

さて

$$V \cap |\dot{S}| = V \cap \{|\Gamma| \cup \bigcup_{j=1}^k |\Gamma_j|\} = (V \cap |\Gamma|) \cup \bigcup_{j=1}^k (V \cap |\Gamma_j|) = \emptyset$$

であるから  $V \subset \text{Int } |S| \cup \text{Int } |T|$  が成り立つ.  $V$  が連結であることと合わせると  $V \subset \text{Int } |S|$  または  $V \subset \text{Int } |T|$  のどちらか一方が成り立つ. Step 1 の  $s_1 \in S$  について  $\text{Int } s_1 \subset D_o(\Gamma_p)$ ,  $p = 1, \dots, k$  を示しているので  $\text{Int } s_1 \subset V$  が従う. よって

$$(6.2.5) \quad V = D_i(\Gamma) \cap \bigcap_{j=1}^k D_o(\Gamma_j) \subset \text{Int } |S|$$

の方が成り立つ.

最後に (6.2.3) の逆向きの包含関係を示そう. まず (6.2.5) の両辺と  $|\Gamma|$  との和を取ると  $|\Gamma| \subset D_o(\Gamma_j)$  ( $\because |\Gamma_j| \in D_i(\Gamma)$ ) より Theorem 4.4.2 (a) を用いると従う

$$\overline{D_i(\Gamma)} \cap \bigcap_{j=1}^k D_o(\Gamma_j) \subset |\Gamma| \cup \text{Int } |S|$$

が従う. 同様に  $|\Gamma_1|$  と和を取ると  $|\Gamma_1| \subset D_i(\Gamma)$  と  $|\Gamma_1| \subset D_o(\Gamma_j)$ ,  $j = 2, \dots, k$  より

$$\overline{D_i(\Gamma)} \cap \overline{D_i(\Gamma_1)} \cap \bigcap_{j=2}^k D_o(\Gamma_j) \subset |\Gamma| \cup |\Gamma_1| \cup \text{Int } |S|$$

が従う. 以下, 帰納的にこの操作を進めれば

$$\overline{D_i(\Gamma)} \cap \bigcap_{j=1}^k \overline{D_o(\Gamma_j)} \subset |\Gamma| \cup |\Gamma_1| \cup \dots \cup |\Gamma_k| \cup \text{Int } |S| = |\dot{S}| \cup \text{Int } |S| = |S|$$

が従う. □

### 6.3 Jordan 曲線による分離定理

それでは Jordan 曲線による分離定理を幾つか述べよう. 以下に述べるのは簡単なように見えるが, 領域の補集合がいかに複雑になり得るか知っている読者にとっては興味深いであろう.

**Theorem 6.3.1.**  $\hat{\mathbb{C}}$  内の閉集合  $F$  の相異なる成分  $C_1, C_2$  について  $\hat{\mathbb{C}} \setminus F$  内の単純閉曲線で  $C_1, C_2$  を分離するものが存在する.

*Proof.*  $F$  はコンパクトな距離空間  $\hat{\mathbb{C}}$  の閉集合であるから自身もコンパクト距離空間である. よって Theorem 6.1.7 より  $C_1 \subset H_1, C_2 \subset H_2$  を満たす  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  の分割  $H_1, H_2$  が存在する. すなわち  $H_1, H_2$  はともに空でない閉集合で  $H_1 \cap H_2 = \emptyset, H_1 \cup H_2 = F$  を満たす. ここで必要ならば適当な  $\hat{\mathbb{C}}$  から自身への同相写像を合成すればよいので,  $\infty \in C_2$  と仮定してよい. このとき  $H_1$  は閉集合で  $\infty \notin H_1$  であるから  $\mathbb{C}$  のコンパクト部分集合である. これと  $H_1 \cap H_2 = \emptyset$  より

$$d(H_1, H_2) = \inf\{|z - w| : z \in H_1, w \in H_2\} > 0$$

である.  $d(H_1, H_2) = \infty$  となるのは  $H_2 = \{\infty\}$  の場合のみであり, この場合に定理が成り立つのは明らかであるから, 以後  $\{\infty\} \subsetneq H_2$  と仮定する. このとき  $0 < d(H_1, H_2) < \infty$  が成り立つ.

辺が座標軸に平行で 1 辺の長さが  $\ell$  の閉正方形  $R$  を  $H_1 \subset \text{Int } R$  が成り立つように取る. そして  $n \in \mathbb{N}$  を

$$\frac{\ell}{n} < \min\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}d(H_1, H_2), d(H_1, \partial R)\right\}$$

を満たすように取り,  $R$  を上下左右にそれぞれ  $n$  等分して格子  $G$  を作る. このとき  $G$  の各有界 2-cell の直径は  $\frac{\sqrt{2}\ell}{n}$  であり  $d(H_1, H_2)$  より小さいので  $H_1, H_2$  と同時に交わることはない. また非有界 2-cell は  $H_1 \subset \text{Int } R$  より  $H_1$  とは交わらない.

さて  $S$  を  $H_1$  と交わる 2-cell 全てよりなる 2-chain とする. 2-cell  $s$  が  $S$  に属す, つまり  $H_1$  と交われば

$$\frac{\ell}{n} < d(H_1, \partial R)$$

より  $s$  は  $\partial R$  から内側に向かって 1 列めにはない. また

$$\frac{2\sqrt{2}\ell}{n} < d(H_1, H_2)$$

より

(6.3.1)  $s \in S$  ならば  $s$  及び  $s$  と交わる周囲の 2-cell (全部で 8 個) も  $H_2$  とは交わらない.

さらに  $H_1 \subset \text{Int } S$  であることに注意しよう.

さて  $S^*$  を  $S$  の肥厚とする.  $S^*$  は明らかに有界であり  $|S^*| \cap \partial R = \emptyset$  を満たし, 非正則頂点を持たないので正則な 2-chain であり  $H_1 \subset \text{Int } |S| \subset \text{Int } |S^*|$  が成り立つ. また (6.3.1) より  $S$  を肥厚する際に付け加わった細分された 2-cell は  $H_1, H_2$  と交わらないので  $H_2 \cap |S^*| = \emptyset$  が成り立つ. これより特に  $\partial|S^*| \cap (H_1 \cup H_2) = \emptyset$  が成り立つので  $\partial|S^*| \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus (H_1 \cup H_2) = \hat{\mathbb{C}} \setminus F$  である.  $S_1^*$  を連結集合  $C_1 (\subset H_1)$  を含む  $S^*$  の成分とすれば  $S_1^*$  は有界, 連結かつ正則な 2-chain である. また  $\partial|S_1^*| = \partial|S^*| \cap |S_1^*| \subset \partial|S^*| \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus F$  が成り立つ. ここで Theorem 6.2.5 より  $|\Gamma| \subset \partial|S_1^*| \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus F, C_1 \subset \text{Int } S_1^* \subset D_i(\Gamma)$  を満たす階段単純閉曲線  $\Gamma$  が存在する.  $|\Gamma| \cap F = \emptyset$  が成り立つことと  $C_2$  の連結性より  $C_2 \subset D_i(\Gamma)$  または  $C_2 \subset D_o(\Gamma)$  のどちらか一方が成り立つ. しかしながら  $\infty \in C_2$  であるから  $C_2 \subset D_o(\Gamma)$  が成り立つ.

以上で  $C_1, C_2$  を分離する  $\hat{\mathbb{C}} \setminus F$  内の階段単純閉曲線が存在することが示された。  $\square$

**Corollary 6.3.2.**  $\Omega$  を  $\hat{\mathbb{C}}$  内の領域とし  $C_1, C_2$  を補集合  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  の相異なる成分とする。単純閉曲線  $\gamma$  で  $\gamma \subset \Omega$  であり,  $C_1$  と  $C_2$  を分離する, つまり  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$  の 2 つの成分の一方に  $C_1$  が含まれ, もう一方に  $C_2$  が含まれるものが存在する。

*Proof.*  $F = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  と置いて Theorem 6.3.1 を適用すれば直ちに得られる。  $\square$

さらに次が成り立つ。

**Corollary 6.3.3.**  $F_1, F_2$  がともに  $\hat{\mathbb{C}}$  内の空でない連結閉集合で  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$  ならば  $F_1, F_2$  を分離する単純閉曲線が存在する。

**Theorem 6.3.4.**  $\Omega$  を  $\hat{\mathbb{C}}$  内の領域とし  $F \subset \mathbb{C}$  は有界な閉集合で  $F \subset \Omega$  とする。このとき  $\Omega$  内の階段単純閉曲線  $\Gamma$  で  $F \subset D_i(\Gamma)$  を満たすものが存在する。

*Proof.*  $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$  または  $\Omega = \mathbb{C}$  のとき Theorem は明らかに成り立つのでそうでない, つまり  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  は  $\infty$  以外の点を少なくとも 1 つ含むと仮定する。このとき  $0 < d(F, \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega) < \infty$  である。

辺が座標軸に平行で 1 辺の長さが  $\ell$  の閉正方形  $R$  を  $F \subset \text{Int } R$  が成り立つように取る。そして  $n \in \mathbb{N}$  を

$$\frac{\ell}{n} < \min\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}d(F, \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega), d(F, \partial R)\right\}$$

を満たすように取り,  $R$  を上下左右にそれぞれ  $n$  等分して格子  $G$  を作る。  $S$  を  $F$  と交わる 2-cell 全てよりなる 2-chain とすれば,  $S$  は有界な 2-chain であり,  $|S| \subset \Omega$  を満たす。  $S$  が連結の時は  $\tilde{F} = |S|$  と置く  $S$  が連結でない時は 1 つの成分を取り, 他の各成分と  $\Omega$  内の曲線で結び  $\tilde{F}$  を  $|S|$  とこれらの曲線の和と置けば,  $\tilde{F}$  は連結な有界閉集合であり,  $F \subset \tilde{F} \subset \Omega$  を満たす。

$\tilde{F}$  についてあらためて 1 辺の長さが  $\tilde{\ell}$  で座標軸と平行な正方形  $\tilde{R}$  を  $\tilde{F} \subset \text{Int } \tilde{R}$  が成り立つように取り, そして  $\tilde{n} \in \mathbb{N}$  を

$$\frac{\tilde{\ell}}{\tilde{n}} < \min\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}d(\tilde{F}, \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega), d(\tilde{F}, \partial \tilde{R})\right\}$$

を満たすように取り,  $\tilde{R}$  を上下左右にそれぞれ  $\tilde{n}$  等分して格子  $\tilde{G}$  を作る。  $\tilde{S}$  を  $\tilde{F}$  と交わる 2-cell 全てよりなる 2-chain とすれば,  $\tilde{S}$  は有界な 2-chain であり,  $|\tilde{S}| \subset \Omega$  を満たし,  $\tilde{F}$  の連結性より  $\tilde{S}$  も連結である。  $S^*$  を  $\tilde{S}$  の肥厚とすれば  $S^*$  は有界かつ連結な正則 2-chain であり  $|S^*| \subset \Omega$  を満たす。 Theorem 6.2.5 より  $|\Gamma| \subset |\tilde{S}| = \partial|S^*| \subset \Omega$ ,  $(F \subset) \tilde{F} \subset \text{Int } |S^*| \subset D_i(\Gamma)$  を満たす階段単純閉曲線  $\Gamma$  が存在することが分かる。  $\square$

Corollary 6.3.2 の一般化である次の定理を証明しよう。

**Theorem 6.3.5.**  $\Omega$  を  $\hat{\mathbb{C}}$  内の領域とし  $C$  を  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  の成分,  $E$  を  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  の部分閉集合で  $C \cap E = \emptyset$  とする。このとき  $\Omega$  内の単純閉曲線で  $C$  と  $E$  を分離するものが存在する。

*Proof.*  $F = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  と置く。  $F$  の任意の成分は  $C$  と一致するか, または  $C$  と交わらないことに注意すれば,  $F$  の任意の成分は  $C, E$  と同時に交わることがない。よって Theorem 6.1.8 より  $C \subset H_1, E \subset H_2$  を満たす  $F$  の分割  $H_1, H_2$  が存在する。つまり  $H_1, H_2$  は閉集合で  $H_1 \cap H_2 = \emptyset, F = H_1 \cup H_2$  を満たす。必要ならば  $\hat{\mathbb{C}}$  の適当な同相写像を施すことにより  $\infty \in E$  と仮定してよい。また  $H_2 = \{\infty\}$  のとき, 定理の主張は明らかに成り立つので以下では  $H_2$  は  $\infty$  以外の点を少なくとも 1 つ含むとする。このとき  $H_1$  はコンパクトであ

るから  $0 < d(H_1, H_2) < \infty$  である. 辺が座標軸に平行な閉正方形  $R$  を  $H_1 \subset \text{Int } R$  を満たすように取り, 1 辺の長さを  $\ell$  と置く. そして  $n \in \mathbb{N}$  を

$$\frac{\ell}{n} < \min\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}d(H_1, H_2), d(H_1, \partial R)\right\}$$

を満たすように取り,  $R$  を上下左右にそれぞれ  $n$  等分し, 長方形格子  $G$  を作る. このとき  $G$  のどの 2-cell も  $H_1, H_2$  と同時に交わらないことに注意しよう.

$S$  を  $H_2$  と交わる 2-cell 全てよりなる 2-chain とする.  $\infty \in H_2$  より  $S$  は非有界 2-cell を含むことに注意する. また  $H_2 \subset \text{Int } S$  であり,  $\partial S \cap F = \emptyset$  が成り立つ. そこで  $S$  の非有界 2-cell を含む成分を  $S_0$  とし,  $S_0$  以外の成分  $S'$  (高々有限個である) が存在すれば, それらを全て  $\Omega$  内の曲線で  $S_0$  と結ぶ. これは  $\partial|S_0| = \partial|S| \cap |S_0| \subset \Omega$ ,  $\partial|S'| = \partial|S| \cap |S'| \subset \Omega$  と  $\Omega$  の弧状連結性より可能である. このようにして  $S$  に有限個の曲線を付け加えて出来る連結閉集合を  $\tilde{F}$  と置けば  $H_2 \subset \tilde{F}$  であり,  $H_1 \cap \tilde{F} = \emptyset$  である.

$\hat{\mathbb{C}} \setminus \tilde{F}$  の  $C$  を含む成分を  $\Omega_0$  と置く. また  $H_1 \cap \Omega_0$  は  $\mathbb{C}$  の有界閉部分集合である. 実際,  $\tilde{F}$  が非有界 2-cell を含むので  $\Omega_0$  は有界であるから  $H_1 \cap \Omega_0$  も有界である. そして  $H_1 \cap \Omega_0$  の点列  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  が  $c_0$  に収束すれば,  $H_1$  は閉集合であるから  $c_0 \in H_1$  である. また  $c_0 \in \overline{\Omega_0}$  であるが, もし  $c_0 \in \partial\Omega_0$  とすると  $\partial\Omega_0 \subset \partial\tilde{F} \subset \Omega$  より  $c_0 \in \Omega$  となるが, これは  $c_0 \in H_1 \subset F = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  に反する. 従って  $c_0 \in \Omega_0$  も成り立つので  $c_0 \in H_1 \cap \Omega_0$  となり,  $H_1 \cap \Omega_0$  は閉集合である. よって Theorem 6.3.4 より  $C \subset H_1 \cap \Omega_0 \subset D_i(\gamma)$  を満たす  $\Omega_0$  内の単純閉曲線  $\gamma$  が存在する.  $\gamma \subset \Omega_0$  より  $\gamma \cap \tilde{F} = \emptyset$  であり, これと  $\tilde{F}$  の連結性と  $\infty \in \tilde{F}$  を合わせて  $E \subset H_2 \subset \tilde{F} \subset D_o(\gamma)$  が従う. 最後に  $\gamma$  は  $\Omega_0$  に含まれ  $H_1 \cap \Omega_0$  と交わらないので  $H_1$  とも交わらない. よって  $\gamma$  は  $H_1 \cup H_2 = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  と交わらないので  $\gamma \subset \Omega$  が成り立つ.  $\square$

## 6.4 単連結性の条件

点  $a$  に留まったまま動かない閉曲線を  $1_a$  で表す. つまり  $1_a(t) = a, 0 \leq t \leq 1$  で与えられる写像である.

**Definition 6.4.1.** 複素平面  $\mathbb{C}$  または Riemann 球面  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  内の領域  $\Omega$  が単連結であるとは,  $\Omega$  内の任意の閉曲線  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$  が連続的に始点  $a = \gamma(0) (= \gamma(1))$  に変形出来ること, つまり連続写像  $C: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$  で

$$C(0, s) = C(1, s) = a, \quad 0 \leq s \leq 1$$

かつ

$$\begin{cases} C(t, 0) = \gamma(t), & 0 \leq t \leq 1 \\ C(t, 1) = a, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

を満たすものが存在するときをいう. このとき  $\gamma_s: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  を  $\gamma_s(t) = C(t, s)$  と置けば,  $s$  が 0 から 1 に動くに従い曲線が  $\gamma_0 = \gamma$  から  $\gamma_1 = 1_{\gamma(0)}$  まで連続的に変形される.  $C$  を  $\gamma$  から  $1_{\gamma(0)}$  への *path homotopy* と呼ぶ.

例えば凸領域は単連結である. 実際  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$  が閉曲線ならば

$$C(t, s) = (1-s)\gamma(t) + s\gamma(0)$$

と置けば良い. 従って複素平面, 円板, 半平面などは単連結である. Riemann 球面  $\hat{\mathbb{C}}$  も単連結であるが, これを示すのは案外難しい. 閉曲線  $\gamma$  が  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \gamma \neq \emptyset$  を満たす時は  $w_0 \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \gamma$  を取り,  $\varphi(\gamma(0)) = 0, \varphi(w_0) = \infty$  を満たす同相写像  $\varphi: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  を取り,

$$C(t, s) = \varphi^{-1}((1-s)\varphi(\gamma(t))), \quad (t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

と置けば  $C$  は  $\gamma$  から  $1_{\gamma(0)}$  への path homotopy である. 一般の場合は次のようにして示すことが出来るが, 証明には path の合成や変形などの基本群の基礎知識を必要とする.

**Proposition 6.4.2.**  $\hat{C}$  は単連結である.

*Proof.*  $U, V$  を  $\hat{C}$  の単連結な領域で  $\hat{C} = U \cup V$  でありかつ  $U \cap V$  が空でない連結集合となるように取る. (例えば  $U = \mathbb{C}, V = \hat{C} \setminus \{0\}$  と置けば条件を満たす). 一般性を失うことなく  $a = \gamma(0) = \gamma(1) \in U \cap V = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  と仮定することが出来る.  $\delta > 0$  を  $I_0$  が  $I = [0, 1]$  の部分閉区間で  $\text{diam } I_0 < \delta$  ならば  $\gamma(I_0) \subset U$  または  $\gamma(I_0) \subset V$  の少なくとも一方が成り立つように取る. このような  $\delta > 0$  の存在は背理法で示すことが出来るので読者の演習問題としよう. 区間  $[0, 1]$  の分割  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  を  $\max\{t_1 - t_0, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_{n-1}\} < \delta$  が成り立つように取る. このとき  $I_k = [t_{k-1}, t_k], k = 1, 2, \dots, n$  と置くと  $\gamma(I_k) \subset U$  または  $\gamma(I_k) \subset V$  が成り立つ.

分点  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  から必要ならば, 次のように点を取り除いて新しい分割を取る. 全ての  $k$  について  $\gamma(t_k) \in U \cap V$  の場合, 分点は取り除かない. ある  $k$  について  $\gamma(t_k) \notin U \cap V$  ならばそのような最小の  $k$  を取ると  $\gamma(I_k) \cup \gamma(I_{k+1}) \subset U$  または  $\gamma(I_k) \cup \gamma(I_{k+1}) \subset V$  の少なくとも一方が成り立つ. このときは  $k$  を分点から取り除いた分割  $t'_0 = 0 < t'_1 < \dots < t'_{n-1} = 1$  を考える. そしてこの分割についても同じように取り除ける分点があれば取り除く. このような操作を有限回行くと取り除ける分点はなくなる. 記号を節約するために, 除ける分点を全て取り除いた分割を  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  と表そう. このとき  $f(I_k) \subset U$  または  $f(I_k) \subset V$  が成り立ち,  $f(t_k) \in U \cap V, k = 0, 1, 2, \dots, n$  が成り立つ. ここで区間  $[0, 1]$  から  $I_k = [t_{k-1}, t_k]$  への正の向き of 線形写像を考え, それに  $\gamma$  を合成したものを  $\gamma_k$  と置くと

$$\gamma \sim \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$$

が成り立つ. ここで  $\sim$  は path homotopic という意味であり,  $+$  で終点と始点が一致する path をつなぐ操作を表した. この操作が homotopy の同値類に関して結合法則を満たすことなどの知識を仮定している. ここで  $\alpha_k$  で  $a$  と  $\gamma(a_k)$  を結ぶ  $U \cap V$  内の path とし  $-\alpha_k$  でその逆向きの path を表すと

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n \sim (\gamma_1 + (-\alpha_1)) + (\alpha_1 + \gamma_2 + (-\alpha_2)) + \dots + (\alpha_{k-1} + \gamma_k + (-\alpha_k)) + \dots + (\alpha_{n-1} + \gamma_n)$$

が成り立つ. 右辺の括弧でまとめた各項は  $a$  を基点とする閉道であり, 単連結領域  $U$  または  $V$  に含まれる. よって各項は  $1_a$  に path homotopic であるから, それらの和である右辺も  $1_a$  に path homotopic である.  $\square$

**Theorem 6.4.3.**  $\Omega$  を  $\hat{C}$  内の (空でない) 領域とする. このとき次の 3 条件は互いに同値である.

- (a)  $\Omega$  は単連結である.
- (b)  $\Omega$  の補集合  $\hat{C} \setminus \Omega$  は空であるか, または連結.
- (c)  $\partial\Omega$  は空であるか, または連結.

さらに  $\infty \notin \Omega$  のときは次の条件とも同値である.

- (d)  $\Omega$  内の任意の単純閉曲線  $\gamma$  について  $\gamma$  で囲まれた領域は  $\Omega$  に含まれる. つまり  $D_i(\gamma) \subset \Omega$ .

条件 (d) は  $\Omega$  の内部に穴が開いていないことを Jordan の曲線定理を利用して述べていると考えられる. そして  $\Omega$  に穴が開いていなければ, 閉曲線を始点に留まったままの曲線に連続変形出来るということは直観的に頷けるであろう. また穴が開いていれば, その穴のまわりを回る閉曲線は  $1_a$  に連続変形できないということも直観的に頷けるであろう. 従って  $\infty \notin \Omega$  ならば (a) と (d) が同値になる筈であるが, これを論理的に示すのはそれほど簡単ではない.

条件 (d) については若干の注意が必要である。例えば

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0 + it : |t| \geq 1\}$$

と置けば,  $\Omega$  は複素平面から 2 本の半直線を除いた領域である。従って補集合  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  は 2 本の半直線で,  $\mathbb{C}$  で考えると連結成分は 2 つの半直線のそれぞれである。しかし  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega = (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cup \{\infty\}$  であり, 2 本の半直線は  $\infty$  でつながっているため  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  は連結である。このように  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  と  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  の連結成分は必ずしも一致しないことに注意する。

*Proof.* (a)  $\implies$  (d). 背理法で示そう。(d) を否定すると, 単純閉曲線  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  と点  $a \in D_i(\gamma) \setminus \Omega$  が存在する。このとき Theorem 4.3.1 より  $n(\gamma, a) = \pm 1$  である。ここで  $\gamma_s, 0 \leq s \leq 1$  を  $\gamma$  と  $1_c, c = \gamma(0)$  を結ぶ path homotopy とすれば

$$n(\gamma_s, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{d\gamma_s(t)}{\gamma_s(t) - a}$$

において  $\gamma_s(t) \in \Omega$  かつ  $a \notin \Omega$  であるから右辺の積分は  $s$  について連続であり, 整数値を取るため一定値である。しかしながら  $s = 0$  のときは  $n(\gamma, a) = n(\gamma_0, a) = \pm 1$  であるが,  $s = 1$  のときは  $n(1_{\gamma(0)}, a) = 0$  となり, 矛盾を生じる。

(b)  $\implies$  (d). (b) を仮定すると  $F = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  は連結であり,  $\infty \in F$  である。さて単純閉曲線  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  について  $\gamma \cap F = \emptyset$  と  $F$  の連結性より  $F \subset D_i(\gamma)$  または  $F \subset D_o(\gamma)$  のどちらか一方が成り立つが,  $\infty \in F$  であるから  $F \subset D_o(\gamma)$  が成り立つ。よって  $D_i(\gamma) \cap F = \emptyset$  であり  $D_i(\gamma) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus F = \Omega$  が成り立つ。

(d)  $\implies$  (a).  $\infty \notin \Omega$  とする。  $F = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  と置く。  $F = \emptyset$  の時は  $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$  であるから Proposition 6.4.2 より  $\Omega$  は単連結である。また  $F = \{\infty\}$  の時も  $\Omega = \mathbb{C}$  は単連結である。そこで以下では  $F$  は  $\infty$  以外の点を少なくとも 1 つ含むとする。  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  を  $\Omega$  内の閉曲線とすれば, 像  $\gamma$  は  $\Omega$  に含まれる  $\hat{\mathbb{C}}$  の連結なコンパクト集合である。  $F \cap \gamma = \emptyset$  であるから Theorem 6.3.4 より  $\Omega$  内の階段単純閉曲線  $\Gamma$  で  $\gamma \subset D_i(\Gamma)$  を満たすものが存在する。 PL 版 Schönflies の定理 (Theorem 5.2.7) より同相写像  $\varphi : D_i(\Gamma) \rightarrow \mathbb{D}$  が存在する。  $\mathbb{D}$  の単連結性より  $\varphi \circ \gamma$  から  $1_{\varphi(\gamma(0))}$  への  $\mathbb{D}$  における連続変形が存在する。これを  $\varphi^{-1}$  で引き戻せば  $\gamma$  から  $1_{\gamma(0)}$  への  $D_i(\Gamma)$  における連続変形である。そして  $D_i(\Gamma) \subset \Omega$  であるから, この変形は  $\Omega$  における連続変形でもある。以上で  $\Omega$  が単連結であることが示された。

(d)  $\implies$  (b)  $\infty \notin \Omega$  と仮定し, 対偶を示す。  $F = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  が空でなく連結でないとする。相異なる 2 つの成分  $C_1, C_2$  が存在する。これらに Theorem 6.3.1 を適用すれば  $\Omega$  内の階段単純閉曲線  $\Gamma$  で  $D_i(\Gamma)$  に  $C_1, C_2$  のどちらか一方を含み,  $D_o(\Gamma)$  に残りのもう一方を含むものが存在する。この  $\Gamma$  について  $D_i(\Gamma) \subset \Omega$  は成り立たない。

(a)  $\implies$  (b). 領域  $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$  が (位相的に) 単連結であるとする。  $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$  の場合, 補集合  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  は空であるから (b) が成り立つ。そこで  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  が 1 点以上を含むとする。このとき適当な同相写像を用いて変換することにより  $\infty \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  と仮定してよい。この場合 (a)  $\implies$  (d)  $\implies$  (b) を既に示している。

(b)  $\implies$  (a).  $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$  の場合, 単連結性は Proposition 6.4.2 より従うので, そうでないと仮定する。つまり  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega \neq \emptyset$  とする。このとき適当な同相写像を用いて変換することにより  $\infty \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  と仮定してよい。この場合  $\Omega \subset \mathbb{C}$  であるから (b)  $\implies$  (d)  $\implies$  (a) を既に示している。

(c)  $\implies$  (b).  $\partial\Omega = \emptyset$  の時は  $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$  であるから  $\Omega$  の補集合は空である。そこで  $\partial\Omega$  が空でない連結集合の場合を考えよう。  $c \in \Omega$  を取り固定する。このとき任意の  $z_0, w_0 \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  について  $z_0$  と  $c$  を結ぶ曲線  $\gamma(t), 0 \leq t \leq 1$  を取り  $t_0 = \inf\{\gamma(t) \in \Omega\}$  と置くと  $\gamma|_{[0, t_0]}$  は  $z_0$  と  $\gamma(t_0) \in \partial\Omega$  を結ぶ  $\text{hat}\mathbb{C} \setminus \Omega$  内の曲線である。同様に  $w_0$  と  $c$  を結ぶ曲線  $\tilde{\gamma}(t), 0 \leq t \leq 1$  を取り  $\tilde{t}_0 = \inf\{\tilde{\gamma}(t) \in \Omega\}$  と置くと  $\tilde{\gamma}|_{[0, \tilde{t}_0]}$  は  $w_0$  と  $\tilde{\gamma}(\tilde{t}_0) \in \partial\Omega$



を結ぶ  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  内の曲線である。従って  $\gamma([0, t_0]) \cup \partial\Omega \cup \tilde{\gamma}([0, \tilde{t}_0])$  は補集合  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  に含まれる連結部分集合で  $z_0, w_0$  を含む。  $z_0, w_0$  の任意性より  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  は連結である。

(b)  $\implies$  (c).  $\Omega$  の補集合が空の時,  $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$  であるから  $\partial\Omega = \emptyset$  である。  $\Omega$  の補集合が空でない連結集合の時,  $\partial\Omega$  が連結でないとして仮定し矛盾を導こう。  $\partial\Omega$  は連結でないので少なくとも 2 つの成分  $C_1, C_2$  を持つ, Theorem 6.3.1 より  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \partial\Omega$  内の単純閉曲線  $\gamma$  で  $C_1, C_2$  を分離するものが存在する。  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \gamma$  の 2 つの成分を  $D_1, D_2$  とし, 必要なら入れ替えることにより  $C_1 \subset D_1, C_2 \subset D_2$  とする。このとき  $C_1 \subset \partial\Omega$  より

$$\begin{aligned} D_1 \cap \Omega &\neq \emptyset \quad \text{and} \quad D_1 \cap (\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega) \neq \emptyset \\ D_2 \cap \Omega &\neq \emptyset \quad \text{and} \quad D_2 \cap (\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega) \neq \emptyset \end{aligned}$$

となり, 2 つの行の前半部分と  $\Omega$  の連結性と 2 つの行の後半部分と  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  連結性より

$$\Omega \cap \gamma = \Omega \cap \partial D_1 \neq \emptyset \quad \text{and} \quad (\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega) \cap \gamma = (\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega) \cap \partial D_2 \neq \emptyset$$

が成り立つ。よって  $\gamma$  の連結性より  $\gamma \cap \partial\Omega \neq \emptyset$  が成り立つことになるが, これは  $\gamma \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \partial\Omega$  に反する。

以上で Theorem 6.4.3 の証明は完結した。 □

Theorem 6.4.3 の応用は数多いが, この節では次の定理だけ述べておこう。

**Theorem 6.4.4.**  $F$  が  $\hat{\mathbb{C}}$  の連結閉部分集合ならば補集合  $\hat{\mathbb{C}} \setminus F$  の連結成分は単連結である。

*Proof.*  $\Omega$  を  $F$  の補集合  $\hat{\mathbb{C}} \setminus F$  の連結成分とする。必要ならば適当な一次変換を施すことにより  $\infty \in F$  と仮定してよい。このとき  $\Omega \subset \mathbb{C}$  であるから  $\Omega$  の単連結性を示すには  $\Omega$  内の任意の Jordan 曲線について, その内側の領域が再び  $\Omega$  に含まれることを示せばよい。

$\Omega$  内の任意の Jordan 閉曲線  $\gamma$  について  $\gamma \cap F \subset \Omega = \emptyset$  より  $F \subset D_i(\Gamma) \cup (D_o(\Gamma) \cup \{\infty\})$  が成り立つ。これと  $F$  が連結であることから  $F \subset D_i(\gamma)$  または  $F \subset D_o(\gamma)$  のどちらか一方のみが成り立つが  $\infty \in F$  より  $F \subset D_o(\gamma)$  が成り立つ。よって特に  $F \cap D_i(\Gamma) = \emptyset$  であり,  $D_i(\Gamma) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus F$  が成り立つ。ここで  $D_i(\Gamma)$  は連結であり  $\partial D_i(\Gamma) = \gamma \subset \Omega$  より  $\Omega \cap D_i(\Gamma) \neq \emptyset$  が成り立つので  $D_i(\Gamma) \subset \Omega$  が成り立つ。 □

**NOTES.** §2 の § 1-chain, 2-chain の正則性の定義については Newman の著書の第 4 章 §3 を参考にした。有界かつ正則な 2-chain の補集合の  $\infty$  を含む成分の境界が Jordan 多角形になることはよく知られた事実であるが, 詳しい証明が書いてある文献を探し当てるのが出来なかった。§3 の Jordan 曲線による分離定理は Newman の著書の第 5 章 §1 の内容を参考にした。§4 の単連結性の条件も大変良く使われている事実であるが, 証明の書いてある文献があまりない。Heins [5], Rudin [21] にあるが, 函数論的な同値条件が数多く挙げられていてあまり見通しが良くないように思える。そこで第 2 章の長方形の格子と, PL-Schönflies の定理を使い, 同値性の証明を与えておいた。

## 第7章

# Riemann の写像定理と Carathéodory の拡張定理

この章は今までの位相的な理論の複素解析学への応用に関して解説する。複素平面内の単連結領域における正則関数はつねに原始関数を持つ。これは大変よく知られた事実であり、大抵の複素解析の教科書で解説されているが、§1 で証明を行う。そして応用として単連結領域上の零点を持たない正則関数について対数関数の一価な分枝が存在することを証明する。§2 では補集合が2点以上を含む  $\hat{\mathbb{C}}$  内の単連結領域  $\Omega$  から単位円板  $\mathbb{D}$  への等角写像  $f$  が存在するという Riemann の写像定理を証明する。このとき等角写像  $f^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$  は  $\mathbb{D}$  から  $\Omega$  への写像関数と呼ばれる。写像関数の境界への拡張可能性を調べるためには局所連結性の概念が必要である。そこで §3 では複素関数の話から、一旦それ、局所連結位相空間について解説する。§4 では写像関数  $g : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$  が  $\overline{\mathbb{D}}$  への連続拡張を持つための必要十分条件が  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  が局所連結であることを証明し、その後  $g$  が  $\overline{\mathbb{D}}$  への連続かつ単射な拡張を持つための必要十分条件は  $\partial\Omega$  が Jordan 曲線であることを主張する Carathéodory の拡張定理を証明する。最後の §5 では、前節までの結果を踏まえて Jordan 曲線  $\gamma : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  は  $\mathbb{C}$  から自身への同相写像に拡張できるという Schönflies の定理を証明する。

この章を読むのに必要な複素解析学知識としては Cauchy の積分定理、正規族の概念、Hurwitz の定理、Schwarz の補題などが挙げられる。これらについて知っているものと仮定して議論を進める。

### 7.1 単連結領域における原始関数の存在

$\Omega$  を  $\mathbb{C}$  内の単連結領域とする。このとき任意の正則関数  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  について  $f$  の原始関数、つまり  $F' = f$  を満たす関数  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  が存在することを証明するのが本節の目標である。補集合  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  は  $\infty$  を含む連結閉集合であるから  $\{\infty\}$  または連続体のどちらかである。補集合が  $\{\infty\}$  の時は  $\Omega = \mathbb{C}$  であるから複素解析を勉強した読者にとって原始関数の存在は明らかであろう。従って  $\Omega$  の補集合が  $\infty$  を含む連続体の場合に絞って存在証明をすればよい。

$\Omega = \mathbb{C}$  の場合と同様に

**Proposition 7.1.1.**  $D$  を複素平面内の円板とし  $f$  を  $D$  上の正則関数とする。このとき  $f$  の原始関数、つまり  $F' = f$  を満たす  $D$  上の正則関数  $F$  が存在する。

も成り立つ。この事実についても既知とし、これを出発点に話を始めよう。

複素解析の入門書では、複素平面のある部分集合上で定義された連続関数  $f$  と  $f$  の定義域内の求長可能な

曲線  $\gamma$  について Stieltjes 積分の意味で複素線積分

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

が定義される. 実用上  $f$  は  $\mathbb{C}$  内の領域  $\Omega$  で定義された正則関数であり,  $\gamma$  は  $\Omega$  内の曲線と仮定しても差し支えない. このとき  $\gamma$  について求長可能という仮定をする必要はない. 何故ならば  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$  について分割  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  と円板の列  $D_1, \dots, D_n$  を  $f([t_{k-1}, t_k]) \subset D_k \subset \Omega, k = 1, \dots, n$  となるように取り,  $F_k$  を  $D_k$  における  $f$  の原始関数とすれば

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \{F_k(\gamma(t_k)) - F_k(\gamma(t_{k-1}))\}$$

と定義すればよい. 勿論, 右边が分割  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  と円板の列  $D_1, \dots, D_n$  の取り方に依らないことを示す必要があるが, 詳細な議論は読者に任せよう. また特に  $\gamma$  が求長可能なときは  $\gamma_k(s) = \gamma((1-s)t_{k-1} + st_k), 0 \leq s \leq 1$  と置くと  $F_k(z_k) - F_k(z_{k-1}) = \int_{\gamma_k} f(z) dz$  であるから

$$\sum_{k=1}^n \{F_k(\gamma(t_k)) - F_k(\gamma(t_{k-1}))\} = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$$

が成り立つ. 従って局所的な原始関数の存在を利用した, 線積分の定義は  $\gamma$  が求長可能な時 Stieltjes 積分としての複素線積分と一致する.

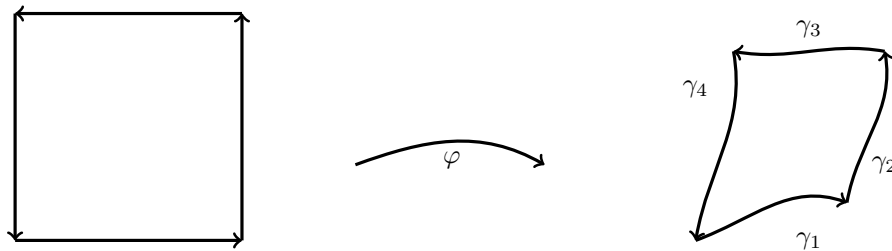
**Theorem 7.1.2** (singular cell 上の Cauchy の積分定理).  $\Omega$  を  $\mathbb{C}$  内の領域とし  $\varphi: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$  を連続写像とし,

$$\gamma_1(t) = \varphi(t, 0), \quad \gamma_2(t) = \varphi(1, t), \quad \gamma_3(t) = \varphi(1-t, 1) \quad \text{and} \quad \gamma_4(t) = \varphi(0, 1-t)$$

と置けば  $\Omega$  上の正則関数について

$$\sum_{k=1}^4 \int_{\gamma_k} f(z) dz = 0$$

が成り立つ.



*Proof.*  $\sum_{k=1}^4 \int_{\gamma_k} f(z) dz = 0$  とは正方形  $S = [0, 1] \times [0, 1]$  の境界をなす各辺に進行方向に向かって  $S$  が左に見えるような向きをつけたものを  $\partial S$  と表し, その像  $\varphi(\partial S)$  に沿って積分することを意味している. そこでこれを  $\int_{\varphi(\partial S)} f(z) dz$  と短く表すことにしよう.  $S$  を縦横に  $n$  等分し

$$S_{jk} = \left\{ (s, t) : \frac{j-1}{n} \leq s \leq \frac{j}{n}, \frac{k-1}{n} \leq t \leq \frac{k}{n} \right\} \quad j, k = 1, \dots, n$$

と置き, 同様な積分を  $\int_{\varphi(\partial S_{jk})} f(z) dz$  を考えると  $S$  の内部にある辺の積分は, その辺を共有する 2 つの小正方形に対応するところで現れ, 向きが逆であるから打ち消しあい, 最後に残るのは  $\partial S$  上にある辺の積分だけ

であることから

$$\int_{\varphi(\partial S)} f(z) dz = \sum_{j,k=1}^n \int_{\varphi(\partial S_{jk})} f(z) dz$$

が成り立つ. 従って  $n$  を十分大きく,  $\varphi(S_{jk}) \subset D_{jk} \subset \Omega$  を満たす円板が取れるほどにすれば,  $D_{jk}$  上での  $f$  の原始関数  $F_{jk}$  を用いて

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(\partial S_{jk})} f(z) dz &= F_{jk} \left( \varphi \left( \frac{j}{n}, \frac{k-1}{n} \right) \right) - F_{jk} \left( \varphi \left( \frac{j-1}{n}, \frac{k-1}{n} \right) \right) \\ &\quad + F_{jk} \left( \varphi \left( \frac{j}{n}, \frac{k}{n} \right) \right) - F_{jk} \left( \varphi \left( \frac{j}{n}, \frac{k-1}{n} \right) \right) \\ &\quad + F_{jk} \left( \varphi \left( \frac{j-1}{n}, \frac{k}{n} \right) \right) - F_{jk} \left( \varphi \left( \frac{j}{n}, \frac{k}{n} \right) \right) \\ &\quad + F_{jk} \left( \varphi \left( \frac{j-1}{n}, \frac{k-1}{n} \right) \right) - F_{jk} \left( \varphi \left( \frac{j}{n}, \frac{k-1}{n} \right) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. よって  $\int_{\varphi(\partial S)} f(z) dz = 0$  を得る. □

2 つの曲線  $\gamma_j : [0, 1] \rightarrow \Omega$ ,  $j = 1, 2$  が  $\Omega$  内でホモトピックであるとは

$$\varphi(s, 0) = \gamma_0(s), \quad \varphi(s, 1) = \gamma_1(s), \quad \varphi(0, t) = \gamma_0(0) \quad \text{and} \quad \varphi(1, t) = \gamma_0(1)$$

を満たす連続写像  $\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$  が存在することに他ならない. 従って次の系が直ちに得られる.

**Corollary 7.1.3.**  $\Omega$  を複素平面内の領域,  $f$  を  $\Omega$  上の正則関数とする. また  $\gamma_0, \gamma_1$  は  $\Omega$  内の始点と終点を共有する曲線で  $\gamma_0$  と  $\gamma_1$  は  $\Omega$  内でホモトピックとする. このとき

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

が成り立つ.

上の系において線積分は始点と終点のみに依存するので, このような場合は  $\gamma$  を表に出さず

$$\int_a^b f(z) dz$$

のように表すことにしよう.

**Corollary 7.1.4.**  $\Omega$  を  $\mathbb{C}$  内の単連結領域とすれば  $\Omega$  上の任意の正則関数について  $\Omega$  上での原始関数が存在する.

*Proof.*  $\Omega$  が単連結領域ならば  $a \in \Omega$  を一つ取り固定する. そして任意の  $z \in \Omega$  について  $a$  を始点,  $z$  を終点とする  $\Omega$  内の曲線を取り

$$F(z) = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$$

と置く.  $\Omega$  が単連結ならば, 始点と終点を共有する  $\Omega$  内の 2 曲線はホモトピックである. (基本群の入門書ならば, まず記載されている事実である. 適当なものを自ら探して参照せよ.) 従って上式の右辺は  $\gamma$  の取り方に依らず,  $z$  のみで定まる. また  $F$  が正則であり,  $F' = f$  を満たすことは積分の定義より直ちに従う. □

**Corollary 7.1.5.**  $\Omega$  を  $\mathbb{C}$  内の単連結領域とし,  $f$  を  $\Omega$  上の正則函数で  $\Omega$  上で  $f(z) \neq 0$  であるとする. また  $a \in \Omega, b \in \mathbb{C}$  とし  $f(a) = e^b$  が成り立つとする. このとき  $\Omega$  上の正則函数  $g(z)$  で  $f = e^g$  かつ  $g(a) = b$  を満たすものが一意的に存在する.

$g$  を  $\log f(a) = b$  で定まる  $f$  の対数函数の一価な分枝と呼び,  $\log f$  と表す.

*Proof.*  $\frac{1}{f}$  は  $\Omega$  上で正則であるから

$$g(z) = \int_a^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta + b$$

と置く. このとき

$$\{f(z)e^{-g(z)}\}' = f'(z)e^{-g(z)} - f(z)\frac{f'(z)}{f(z)}e^{-g(z)} = 0$$

が成り立つので  $fe^{-g}$  は  $\Omega$  上で定数である.  $z = a$  において  $f(a)e^{-g(a)} = f(a)e^{-b} = 1$  であるから  $fe^{-g} = 1$ , つまり  $f = e^g$  が成り立つ.

一意性については  $f = e^h$  と  $h(a) = b$  を満たす  $\Omega$  上の正則函数  $h$  が存在すれば

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = h'(z)$$

と  $g(a) = b = h(a)$  より  $h = g$  が従う. □

## 7.2 Riemann の写像定理

Riemann 球面  $\hat{\mathbb{C}}$  内の 2 つの領域  $\Omega_1$  と  $\Omega_2$  が等角同値であるとは有理型な全単射  $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  が存在する時を言う.  $\Omega$  を Riemann 球面  $\hat{\mathbb{C}}$  内の単連結領域とし,  $E = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  と置く.  $E$  が含む点の個数により  $\Omega$  を分類しよう.  $E = \emptyset$  のときは  $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$  である. また  $E$  が 1 点よりなる集合で  $E = \{a\}$ ,  $a \neq \infty$  のときは 1 次変換  $f(z) = \frac{1}{z-a}$  は  $\Omega$  から  $\mathbb{C}$  への全単射正則写像であるから  $\Omega$  は  $\mathbb{C}$  と等角同値である.  $a = \infty$  の時は  $\Omega = \mathbb{C}$  である.

Riemann の写像定理とは  $E = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  が 2 点以上を含む連結閉集合, つまり  $E$  が連続体である場合, 領域  $\Omega$  は単位円板  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  と等角同値 (conformally equivalent), つまり  $\Omega$  から  $\mathbb{D}$  への等角写像 (= 全単射有理型写像) が存在することを主張するものである. 証明されたとすれば Riemann 球面  $\hat{\mathbb{C}}$  内の単連結領域  $\Omega$  は

- (i) 楕円型:  $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$ .
- (ii) 方物型: ある  $a \in \hat{\mathbb{C}}$  により  $\Omega = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{a\}$  と表せ, 複素平面  $\mathbb{C}$  と等角同値.
- (iii) 双曲型: ある連続体  $E \subset \hat{\mathbb{C}}$  により  $\Omega = \hat{\mathbb{C}} \setminus E$  と表せ, 単位円板  $\mathbb{D}$  と等角同値.

のどれか 1 つに分類される.

これら 3 つの標準的な領域  $\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$  の中のどの 2 つも, 互いに等角同値ではない. 実際  $\hat{\mathbb{C}}$  は compact であるが,  $\mathbb{C}, \mathbb{D}$  はそうではない. また  $\mathbb{C}$  と  $\mathbb{D}$  が等角同値ならば等角写像  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  が存在することになるが, Liouville の定理 (有界な整函数は定数に限る) より,  $f$  は定数函数となってしまうので矛盾を生じる.

尚, 連続体  $E$  は連続濃度の点を含むことを注意しておこう. 実際  $a, b \in E$ ,  $a \neq b$  とすると, 少なくとも一方は  $\infty$  ではないので, 仮に  $a \neq \infty$  としよう. このとき  $0 < r < |a - b|$  を満たす  $r$  について  $E \cap \partial\mathbb{D}(a, r)$  は空

ではない。もし空であるとする

$$E = (E \cap \mathbb{D}(a, r)) \cup (E \cap (\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}(a, r)}))$$

が  $E$  の共通部分を持たない 2 つの (相対位相に関する) 開集合への分解を与えることになり連結性に矛盾する。以上より、开区間  $(0, |a - b|)$  から  $E$  への単射が存在することが分かるので  $E$  は連続濃度の点を含む。

**Theorem 7.2.1** (Riemann の写像定理).  $\Omega$  が  $\hat{\mathbb{C}}$  内の単連結領域で補集合  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  が 2 点以上を含めば等角写像  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$  が存在する。

*Proof.* まず  $\Omega$  が非有界の場合に、 $\Omega$  から有界領域への等角写像が存在することを示そう。これが示されれば、 $\Omega$  は有界領域と仮定して差し支えないことになる。

$a, b \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ ,  $a \neq b$  を取り、函数  $\frac{z-a}{z-b}$  を考えよう。この函数は  $\Omega$  で正則で零点を持たないので Corollary 7.1.5 より存在の保証された対数函数の一価な分枝  $\log \frac{z-a}{z-b}$  を取る。このとき

$$g(z) = \exp \left[ \frac{1}{2} \log \frac{z-a}{z-b} \right]$$

と置けば  $\Omega$  上  $g(z)^2 = f(z)$  が成り立つ。(  $g$  は  $\frac{z-a}{z-b}$  の平方根であり通常  $g(z) = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$  と表される.)

**Claim:**  $g$  は  $\Omega$  上で単射であり、 $(-g(\Omega)) \cap g(\Omega) = \emptyset$  が成り立つ。

$\because g(z_0) = g(z_1)$  ならば両辺を自乗し  $\frac{z_0-a}{z_0-b} = \frac{z_1-a}{z_1-b}$  を得る。これより  $z_0 = z_1$  が導かれる。次に  $-g(z_0) = g(z_1)$  と仮定すると同様に両辺を自乗し、 $\frac{z_0-a}{z_0-b} = \frac{z_1-a}{z_1-b}$  を得るので  $z_0 = z_1$  となり、これよりさらに  $g(z_0) = g(z_1) = 0$  を得る。しかしながら  $g$  は指数函数の合成函数であるから、明らかに零点を持たず矛盾を生じる。

ここで  $\mathbb{D}(w_0, r) \subset g(\Omega)$  を満たす  $w_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$  を取れば

$$\{-\mathbb{D}(w_0, r)\} \cap g(\Omega) = -\mathbb{D}(-w_0, r) \cap g(\Omega) = \emptyset$$

が成り立つ。よって  $h(z) = \frac{1}{g(z) + w_0}$ ,  $z \in \Omega$  は  $|h(z)| \leq \frac{1}{r}$  を満たす、従って  $\Omega' = h(\Omega)$  と置けば、 $\Omega'$  は有界領域であり、 $h: \Omega \rightarrow \Omega'$  は等角写像である。

以下  $\Omega$  は有界な単連結領域であるとし、 $z_0 \in \Omega$  を任意に取る。このとき

$$\mathcal{F} = \{f: f \text{ は } \Omega \text{ 上の単射正則函数で } f(z_0) = 0 \text{ かつ } \Omega \text{ 上 } |f(z)| \leq 1 \text{ を満たす}\}$$

と置く。  $R = \sup_{z \in \Omega} |z - z_0|$  について函数  $k(z) = \frac{z - z_0}{R}$  は函数族  $\mathcal{F}$  に属するので  $\mathcal{F}$  は空でない。ここで

$$A = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(z_0)|$$

と置けば、 $k'(z_0) = \frac{1}{R} > 0$  より  $\frac{1}{R} \leq A$  である。また  $\rho = \inf_{z \in \mathbb{C} \setminus \Omega} |z - z_0|$  と置くと各  $f \in \mathcal{F}$  について  $f(z_0 + \rho z)$ ,  $z \in \mathbb{D}$  は原点 0 を固定する  $\mathbb{D}$  から自身への解析函数であるから Schwarz の補題により  $\rho |f'(z_0)| \leq 1$  が成り立つ。よって  $A \leq \frac{1}{\rho}$  である。

$\{f_n\}_{n=1}^\infty$  を  $\mathcal{F}$  内の函数列で  $|f'_n(z_0)| \rightarrow A$ ,  $n \rightarrow \infty$  を満たすものとする。 $\mathcal{F}$  は一様有界であるから正規族をなすので、必要ならば部分列を取ることにより  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  は  $\Omega$  上、局所一様収束すると仮定してよい。このとき極限函数  $f_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  が  $\Omega$  から  $\mathbb{D}$  への等角写像であることを示そう。

$f_0$  は単葉函数の列  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  であるから Hurwitz の定理より、単葉または定数であるが、 $|f'(z_0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f'_n(z_0)| = A > 0$  であるから定数函数ではあり得ず、従って単葉である。さらに  $f_0(z_0) =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_0) = 0$  であり,  $|f_n(z)| < 1$  より  $|f_0(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(z)| \leq 1$  であるが, 最大値の原理より  $|f_0(z)| < 1$  が成り立ち,  $f_0 \in \mathcal{F}$  が従う.

背理法により  $f_0$  が全射であることを示そう. これが示されれば証明は完了する. そこで  $w_0 \in \mathbb{D} \setminus f_0(\Omega)$  が存在すると仮定し

$$F(z) = \sqrt{\frac{f_0(z) - w_0}{1 - \overline{w_0}f_0(z)}}$$

と置く. 正確には  $f_0 - w_0$  は単連結領域  $\Omega$  で零点を持たないので一価な対数函数の分枝  $\log \frac{f_0(z) - w_0}{1 - \overline{w_0}f_0(z)}$  が存在する. そこで  $F(z) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \log \frac{f_0(z) - w_0}{1 - \overline{w_0}f_0(z)} \right]$  と置いたと言う意味である. このとき  $f_0$  の単葉性より  $\frac{f_0(z) - w_0}{1 - \overline{w_0}f_0(z)}$  も単葉なので, この平方根函数である  $F$  も単葉になることは前段と同じである. ここで  $F$  を正規化し

$$G(z) = \frac{\overline{F'(z_0)} F(z) - F(z_0)}{|F'(z_0)| 1 - \overline{F(z_0)}F(z)}$$

と置けば, 勿論  $G$  も  $\Omega$  で単葉であり  $G \in \mathcal{F}$  である. 従って

$$G'(z_0) \leq A$$

が成り立つ. 一方  $G'(z_0)$  を計算すると  $f_0(z_0) = 0$  より

$$|F(z_0)| = \left| \exp \left[ \frac{1}{2} \log(-w_0) \right] \right| = \exp \left[ \frac{1}{2} \operatorname{Re} \log(-w_0) \right] = \exp \left[ \frac{1}{2} \log |w_0| \right] = \sqrt{|w_0|}$$

である. また  $F(z)^2 = \frac{f_0(z) - w_0}{1 - \overline{w_0}f_0(z)}$  より

$$2F'(z)F(z) = \frac{(1 - |w_0|^2)f_0'(z)}{(1 - \overline{w_0}f_0(z))^2}$$

であるから  $z = z_0$  を代入し  $f_0(z_0) = 0, f_0'(z_0) = A$  を考慮すれば

$$2|F'(z_0)|\sqrt{|w_0|} = (1 - |w_0|^2)A$$

を得る. よって

$$G'(z_0) = \frac{|F'(z_0)|}{1 - |F(z_0)|^2} = \frac{1 + |w_0|}{2\sqrt{|w_0|}}A > A \quad (\because |w_0| < 1)$$

が成り立ち矛盾を生じる. □

Riemann の写像定理より  $\Omega$  が単連結領域であり補集合が 2 点以上を含むならば等角写像  $f: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$  が存在する.  $f$  を  $\mathbb{D}$  から  $\Omega$  への写像函数と呼ぶ.

### 7.3 局所連結空間

局所連結性の概念は教科書により定義が幾つかあり, 混乱することがある. ここでは以下のようにまとめる.

**Definition 7.3.1.**  $X$  を位相空間とし  $x \in X$  とする.

- (i)  $X$  が  $x$  において局所連結 (*locally connected at  $x$* ) であるとは  $x$  の任意の近傍  $N$  について  $x$  の連結な近傍  $V$  で  $V \subset N$  を満たすものが存在するときを言う.

(ii)  $X$  が  $x$  において弱局所連結 (*weakly locally connected at  $x$* ) であるとは  $x$  の任意の近傍  $N$  について  $x$  の近傍  $V$  で  $V \subset N$  を満たし, かつ任意の  $y \in V$  が  $N$  内で  $x$  と結ばれるものが存在する, つまり

任意の  $y \in V$  について連結集合  $E$  で  $x, y \in E \subset N$  を満たすものが存在する.

が成り立つときを言う.

(i) において  $V$  を連結から道連結へ, また (ii) において  $E$  を連結から道連結に置き換えたときに  $X$  は  $x$  において局所道連結または弱局所道連結と言う. 全ての  $x \in X$  において  $X$  が局所連結 (弱局所連結, 局所道連結, または弱局所道連結) のとき,  $X$  は局所連結 (弱局所連結, 局所道連結, または弱局所道連結) であると言う.

定義より明らかに

(7.3.1)  $x$  において局所連結 (または局所道連結)  $\implies x$  において弱局所連結 (または弱局所道連結)

が成り立つ. 残念ながら逆は必ずしも成り立たない. しかしながら空間  $X$  全体で弱局所連結ならば  $X$  全体で局所連結になる. 以下ではこれらの結果について根拠となる反例や証明を与えよう.

**Proposition 7.3.2.**  $X$  が  $x$  で弱局所連結であるための必要十分条件は  $x$  の任意の近傍  $N$  について連結集合  $W$  で  $x \in \text{Int } W \subset W \subset N$  を満たすものが存在すること.

*Proof.*  $\implies x$  の任意の近傍  $N$  について弱局所連結性の定義 (ii) の  $V$  を取る. 各  $y \in V$  について  $E_y$  を  $x, y \in E_y \subset N$  を満たす連結集合とし  $W = \bigcup_{y \in V} E_y$  と置けば,  $x \in \bigcap_{y \in V} E_y$  より  $W$  は連結であり  $x \in V \subset W \subset N$  が成り立つ. また  $V$  は開集合ゆえ  $V \subset \text{Int } W$  も成り立つ.

逆に  $x \in \text{Int } W \subset W \subset N$  を満たす連結集合  $W$  が存在すると仮定しよう. このとき  $V = \text{Int } W$  と置けば  $V$  は  $x$  の開近傍であり, 任意の  $y \in V$  について  $E = W$  と置けば  $E$  は連結であり  $x, y \in E \subset N$  を満たす. □

次は明らかであろう.

**Proposition 7.3.3.**  $G$  を位相空間  $X$  の開集合とし, 部分空間位相をいれて位相空間とみなす. このとき

$$X \text{ が } \begin{cases} \text{局所連結} \\ \text{弱局所連結} \\ \text{局所道連結} \\ \text{弱局所道連結} \end{cases} \quad \text{ならば } G \text{ も } \begin{cases} \text{局所連結} \\ \text{弱局所連結} \\ \text{局所道連結} \\ \text{弱局所道連結} \end{cases}$$

が成り立つ.

次の例は容易に理解されるであろう.

**Example 7.3.4.** (1) ノルム空間の凸部分集合は連結であり, かつ局所連結である.  
 (2)  $\mathbb{R}$  の部分空間  $[0, 1] \cup [2, 3]$  は局所道連結だが連結でない.

例を幾つか挙げておこう.

**Example 7.3.5.**  $\mathbb{R}$  の部分位相空間  $E = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$  において  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$  は孤立点であるから, これらの点において局所連結である. しかしながら  $0$  においては局所連結どころか弱局所連結さえない. 実際,  $0$



の近傍  $U \cap E$  が与えられたとして  $U(0, \varepsilon) \cap E \subset U$  を満たす  $\varepsilon > 0$  をどのように取っても,  $0$  と  $\frac{1}{n} \in U(0, \varepsilon)$  は  $t_0 = 2^{-1}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1})$  と置けば  $\{(x, y) : x < t_0\} \cap U, \{(x, y) : x > t_0\} \cap U$  により分離される.

**Example 7.3.6** (Broom (櫛)).  $\mathbb{R}^2$  において原点と座標  $(1, \frac{1}{n})$  を結ぶ線分を  $L_n, n = 1, 2, \dots$ , また点  $(0, 0), (1, 0)$  を結ぶ線分内の空でない任意の集合を  $L_0$  と置き,  $B_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n, B = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$  と置く. このとき  $B_0$  は道連結であるから連結であり,  $B_0 \subset B \subset \overline{B_0}$  であるから  $B$  も連結である. このとき任意の  $P \in L_0 \setminus \{(0, 0)\}$  において  $B$  は弱局所連結でない.

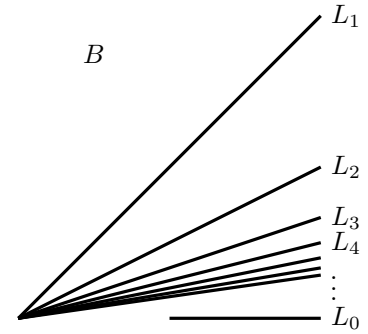


図 7.3.1

*Proof.*  $B$  が  $P(\alpha, 0) \in L_0 \setminus \{(0, 0)\}, 0 < \alpha \leq 1$  において弱局所連結でないことを示そう. これは任意の  $\varepsilon > 0$  ただし  $\varepsilon < \alpha$  について  $U(P, \varepsilon) \cap E$  は  $L_n$  が  $U(P, \varepsilon)$  により切り取られる線分よりなり, 下図から分かるように  $P$  と  $U(P, \varepsilon) \cap L_n$  の点を含む連結集合は存在しない. ( $\because U(P, \varepsilon) \cap E$  は点線の上下で分割される) この事実より弱局所連結でないことが分かる.

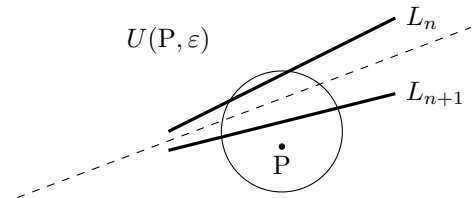
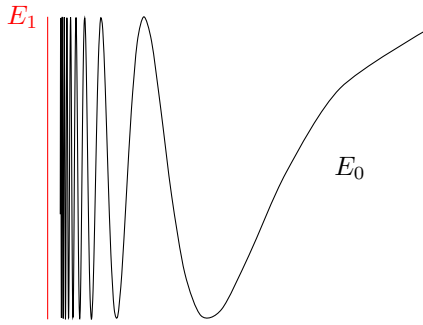


図 7.3.2

□

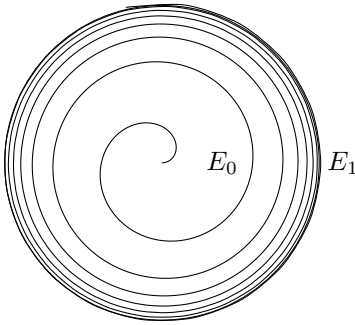
次の 2 つの例も殆ど同じ理由により了解されるであろう.

**Example 7.3.7** (トポロジストのサインカーブ).



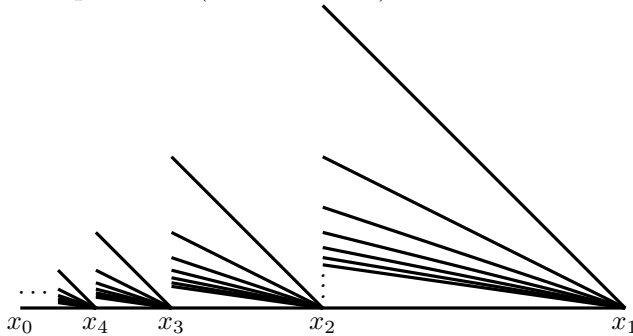
$E_0 = \{(x, y) : 0 < x \leq 1, y = \sin \frac{1}{x}\}$  とし  $E_1$  を線分  $\{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$  の空でない部分集合とすれば  $E_0 \cup E_1$  は連結であるが、道連結ではなく、任意の  $P \in E_1$  において弱局所連結でない。

**Example 7.3.8.**



$\mathbb{R}^2$  の極座標表示において  $E_0$  を  $\theta = \frac{1}{1-r}, 0 \leq r < 1$  で定まる螺旋で単位円の内側から単位円に巻き付いて行くものとし、 $E_1$  を単位円  $r = 1$  とすれば、 $E_0 \cup E_1$  は連結であるが道連結でなく、任意の  $P \in E_1$  において弱局所連結でない。

**Example 7.3.9 (Infinite Broom).**



Example 7.3.6 の broom において  $L_0$  を  $(0, 0)$  と  $(1, 0)$  を結ぶ線分とし下図のように左右入れ替えてから、スケールを  $1/2$  倍しては左に並べることを無限に繰り返して、できる集合  $B$  を考えよう。各ほうき (broom) の頂点を  $x_1, x_2, \dots$  とし、その極限  $x_0$  と置く。  $B_n = B \cap \{(x, y) : x \leq x_n\}$  と置けば (道) 連結な閉集合であり、 $x_0$  の任意の

近傍  $V$  に対し、十分大きな全ての  $n$  について  $B_n \subset V$  が成り立つので Proposition 7.3.2 より  $x_0$  において  $B$  は弱局所連結である。しかし局所連結ではない。実際  $x_0$  において局所連結ならば  $U \cup B$  が連結となるように  $\mathbb{R}^2$  の開集合  $U$  で  $x_0 \in U$  となるものが存在する。  $t_0 = \sup\{t : (t, 0) \in U\}$  と置き  $x_{p+1} < t_0 \leq x_p$  を満たす  $p \in \mathbb{N}$  を取る。このとき 図 7.3.2 を見れば  $L_n$  のある点と  $L_{n+1}$  のある点を含む連結集合が  $U$  に含まれることより  $x_p \in U$  となることが了解出来る。従って  $t_0 > x_p$  となるが、これは矛盾である。

長々と、局所連結, 局所道連結, 弱局所連結, 弱局所道連結の違いを表す例を並べておいて今更であるが、次の結果が成り立つ。

**Theorem 7.3.10.** 位相空間  $X$  について、次の 3 条件は互いに同値である。

- (a)  $X$  は局所連結である。
- (b)  $X$  は弱局所連結である。
- (c)  $X$  の任意の開集合の任意の成分は開集合である。

*Proof.* (a)  $\implies$  (b) は明らかである。(b) が成り立つと仮定し、 $G$  を開集合、 $G_0$  をその成分とする。任意の

$x \in G_0$  について  $x \in \text{Int } W \subset W \subset G$  を満たす連結集合  $W$  が存在する.  $G_0$  の最大性より  $W \subset G_0$  が成り立つので  $x \in \text{Int } W \subset G_0$  が成り立つことになり,  $x$  は  $G_0$  の内点である. よって  $G_0$  は開集合であり (c) が成り立つ.

今度は (c) が成り立つと仮定する. 任意の  $x \in X$  と  $x$  の近傍  $N$  について  $x$  を含む  $U = \text{Int } N$  の成分を  $V$  と置けば,  $V$  は連結であり, かつ (c) より  $V$  は開集合である. よって  $x$  において  $X$  は局所連結となり,  $x$  の任意性より  $X$  は局所連結である.  $\square$

**Corollary 7.3.11.** コンパクトな局所連結空間の成分の個数は有限個である.

*Proof.*  $X$  をコンパクトな局所連結空間とする. 局所連結空間の  $X$  の成分は開集合であるから,  $X$  の成分への分解を  $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$  と置けば, これは  $X$  の開被覆をなす.  $X$  はコンパクトであるから, 有限部分被覆  $X = C_{\lambda_1} \cup \dots \cup C_{\lambda_n}$  が取り出せる. 成分は互いに交わらず空でないので  $C_{\lambda_1}, \dots, C_{\lambda_n}$  以外の成分は存在しない.  $\square$

さて  $C$  が集合  $E$  の成分であれば  $E$  の部分空間の位相に関し閉集合であるから,  $X$  の閉集合  $F$  により  $C = F \cap E$  と表わせる. 特に  $C \subset F$  であるから  $\overline{C} \subset F$  が成り立つ. よって  $C = \overline{C} \cap E$  が成り立つ. 局所連結空間においてはさらに次が成り立つ.

**Theorem 7.3.12.**  $X$  を局所連結空間とし  $E \subset X$  とする. このとき  $C$  が  $E$  の成分ならば

$$\text{Int } C = C \cap \text{Int } E$$

が成り立ち,  $E$  が閉集合ならば

$$\partial C = C \cap \partial E$$

が成り立つ.

*Proof.*  $\text{Int } C \subset C \cap \text{Int } E$  は明らかである. 逆の包含関係を示すために  $x \in C \cap \text{Int } E$  とすると, 局所連結性より  $x \in V \subset \text{Int } E$  を満たす連結開集合  $V$  が存在する.  $V$  は  $x$  を含み  $E$  に含まれる連結集合であるから  $V \subset C$  が成り立つ. これと  $V$  が開集合であり,  $\text{Int } C$  は  $C$  に含まれる最大の開集合であることより  $x \in V \subset \text{Int } C$  が成り立つ. よって  $C \cap \text{Int } E \subset \text{Int } C$  が成り立つ.

さて  $C$  は  $E$  の成分であるから  $E$  の相対位相に関して閉集合であるが  $E$  自身が閉集合の場合  $C$  も  $X$  の閉集合になる.

$$\begin{aligned} \partial C &= \overline{C} \setminus \text{Int } C \\ &= C \setminus (C \cap \text{Int } E) \\ &= C \cap (\partial E \cup \text{Ext } E) \\ &= C \cap \partial E \quad (\because C \subset E \text{ と } E \cap \text{Ext } E = \emptyset \text{ より}) \end{aligned}$$

$\square$

次の定理は後節で応用することが無いので, 読み飛ばしても差し支えない.

**Theorem 7.3.13.** 距離空間  $(X, \rho)$  が局所連結であるための必要十分条件は  $\rho$  と同じ位相を与える距離  $\eta$  で

$$\forall x \in X : \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0] : U_\eta(x, \varepsilon) = \{y \in X : \eta(x, y) < \varepsilon\} \text{ は連結}$$

を満たすものが存在することである.

*Proof.* このような  $\eta$  が存在すれば、局所連結であることは明らかであろう。

逆を示すために距離空間  $(X, \rho)$  が局所連結であると仮定する。  $x, y \in X$  について  $x, y \in E$  を満たす連結集合  $E$  で  $\text{diam}_\rho(E) < 1$  となるものが存在する時、  $\eta(x, y)$  をこのような  $\text{diam}(E)$  の下限とし、このような  $E$  が存在しなければ  $\eta(x, y) = 1$  と置く。

ここで  $x, y \in E$  について  $\rho^*(x, y) = \min\{\rho(x, y), 1\}$  と置けば、  $\rho$  と同じ位相を与えることに注意する。さて  $x, y \in E$ ,  $\text{diam}(E) < 1$  を満たす連結集合が存在しなければ  $\eta(x, y) = 1 \geq \min\{\rho(x, y), 1\} = \rho^*(x, y)$  が成り立つ。また存在する場合でも  $\text{diam}(E) \geq \rho(x, y)$  が成り立つので、  $\eta(x, y) \geq \rho(x, y) \geq \rho^*(x, y)$  が成り立つ。従って

$$\eta(x, y) \geq \rho^*(x, y) = \min\{\rho(x, y), 1\}, \quad x, y \in X$$

が成り立つ。

次に  $\eta$  が距離関数であることを示そう。まず  $\eta(x, y) \geq 0$ ,  $\eta(x, y) = \eta(y, x)$  及び  $\eta(x, x) = 0$  は明らかである。また  $\eta(x, y) \geq \rho^*(x, y)$  より  $\eta(x, y) = 0$  ならば  $\rho^*(x, y) = \rho(x, y) = 0$  となり  $x = y$  が成り立つ。三角不等式  $\eta(x, y) \leq \eta(x, z) + \eta(z, y)$  を示すには、右辺が  $< 1$  の場合のみ考えれば十分である。このとき  $\delta = 1 - (\eta(x, z) + \eta(z, y))$  と置いて任意の  $\varepsilon \in (0, \delta)$  に対し  $x, z \in E_1$ ,  $y, z \in E_2$ ,  $\text{diam}(E_1) < \eta(x, z) + \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $\text{diam}(E_2) < \eta(z, y) + \frac{\varepsilon}{2}$  を満たす連結集合  $E_1, E_2$  を取れば  $E_1, E_2$  は  $z$  を共有するので  $E_1 \cup E_2$  は連結であり、  $x, y \in E_1 \cup E_2$  かつ

$$\text{diam}(E_1 \cup E_2) \leq \text{diam}(E_1) + \text{diam}(E_2) < \eta(x, z) + \frac{\varepsilon}{2} + \eta(z, y) + \frac{\varepsilon}{2} = \eta(x, z) + \eta(z, y) + \varepsilon < 1$$

が成り立つ。よって  $\eta(x, y) \leq \eta(x, z) + \eta(z, y) + \varepsilon$  となり、  $\varepsilon > 0$  の任意性より  $\eta(x, y) \leq \eta(x, z) + \eta(z, y)$  が成り立つ。

$\eta$  と  $\rho^*$  が同じ位相を与えることを示そう。これが示されれば  $\rho$  と  $\rho^*$  は同じ位相を与えるので証明は完了する。まず  $G$  を  $\rho^*$  に関する開集合とし  $x \in G$  とする。このとき  $\varepsilon > 0$  を  $U_{\rho^*}(x, \varepsilon) \subset G$  となるように取れる。これは  $\rho(x, y) < \varepsilon$  ならば  $y \in G$  が成り立つことを意味する。さて  $\eta(x, y) < \varepsilon$  ならば  $\rho(x, y) \leq \eta(x, y) < \varepsilon$  なので  $y \in G$  が成り立つ。これは  $U_\eta(x, \varepsilon) \subset G$  を意味し  $x$  は  $\eta$  についても内点である。  $x \in G$  の任意性より  $G$  は  $\eta$  に関しても開集合である。

今度は  $G$  を  $\eta$  に関する開集合とし、  $x \in G$  とする。また  $U_\eta(x, \varepsilon) \subset G$  を満たす  $\varepsilon > 0$  を取る。  $X$  は  $x$  で局所連結であるから

$$x \in V \subset U_{\rho^*}(x, 2^{-1}\varepsilon)$$

を満たす  $\rho^*$  に関する連結開集合  $V$  が存在する。よって  $y \in V$  について  $\eta(x, y) \leq \text{diam}(V) \leq \varepsilon$  が成り立つので  $V \subset U_\eta(x, \varepsilon) \subset G$  が成り立つ。よって  $x$  は  $\rho^*$  に関しても  $G$  の内点であり、  $G$  は  $\rho^*$  に関する開集合である。  $\square$

コンパクトかつ局所連結な距離空間は大変重要である。

**Theorem 7.3.14.** 距離空間  $S$  がコンパクトかつ局所連結である為の必要十分条件は任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $S$  が直径  $\varepsilon$  以下でコンパクトかつ連結な集合の有限個で被覆されることである。

*Proof.* 必要性を示そう。  $S$  が局所連結ならば、各点  $x \in S$  について  $x \in V_x \subset U(x, 2^{-1}\varepsilon)$  を満たす連結開集合  $V_x$  が存在する。よって開被覆  $S = \bigcup_{x \in S} V_x$  を得るが、  $S$  はコンパクトであるから、有限被覆を取り出して  $S = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}$  とできる。このとき各  $\overline{V_{x_k}}$ ,  $k = 1, \dots, n$  は  $\text{diam } \overline{V_{x_k}} \leq \text{diam}(\overline{U(x, 2^{-1}\varepsilon)}) \leq \varepsilon$  であり、コンパクト空間の閉集合であるからコンパクトである。よって  $S = \overline{V_{x_1}} \cup \dots \cup \overline{V_{x_n}}$  が求める被覆を与えている。

十分性を示そう。コンパクトかつ連結な集合の有限個で被覆されるならば、 $S$  は有限個のコンパクト集合の和であるからコンパクトである。そこで任意の  $a \in S$  において弱局所連結であることを示せば、Theorem 7.3.10 より  $S$  の局所連結性が従う。任意の  $\varepsilon > 0$  について有限個のコンパクトかつ連結な集合で直径が  $\varepsilon$  以下のものによる被覆  $S = E_1 \cup \dots \cup E_n$  を取る。

全ての  $k = 1, \dots, n$  について  $a \in E_k$  の場合。この場合  $S = E_1 \cup \dots \cup E_n \subset U(a, \varepsilon) \subset S$  となる。よって任意の  $b \in U(a, \varepsilon)$  について  $b \in E_j$  を満たす  $j$  を取れば  $a, b \in E_j \subset U(a, \varepsilon)$  が成り立ち  $E_j$  は連結である。よって  $a, b$  は  $U(a, \varepsilon)$  内で結ばれる。従って  $S$  は  $a$  で弱局所連結である。

次に、ある  $k = 1, \dots, n$  について  $a \notin E_k$  の場合を考えよう。このときは適当に番号を取り替えることにより  $a \in E_1, \dots, a \in E_p, a \notin E_{p+1}, \dots, a \notin E_n$  が成り立つとしてよい。  $\delta = \text{dist}\left(a, \bigcup_{k=p+1}^n E_k\right) > 0$  と置くと  $U(a, \delta) \subset \bigcup_{k=1}^p E_k$  が成り立つ。従って任意の  $b \in U(a, \min\{\delta, \varepsilon\})$  について  $b \in E_j$  を満たす  $j \in \{1, \dots, p\}$  を取れば  $a, b \in E_j \subset U(a, \varepsilon)$  より  $a, b$  は  $U(a, \varepsilon)$  内で結ばれる。従って  $S$  は  $a$  で弱局所連結である。  $\square$

上の Theorem より直ちに次の結果が得られる。

**Corollary 7.3.15.**  $X, Y$  が距離空間  $S$  のコンパクトかつ局所連結な部分集合ならば  $X \cup Y$  もそうである。

上の Corollary においてコンパクト性の仮定を省くと結果は成り立たない。例えば Example 7.3.7 において  $E_1 = \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$  と置けば、 $E_0, E_1$  はともに局所連結であるが、 $E_0 \cup E_1$  はそうでない。

**Theorem 7.3.16.**  $S, T$  を距離空間とし  $f : S \rightarrow T$  を連続写像とする。このとき  $S$  がコンパクトかつ局所連結ならば  $f(S)$  もそうである。

*Proof.*  $f$  はコンパクト距離空間上で連続なので、一様連続である。従って任意の  $\varepsilon > 0$  について  $\delta > 0$  を  $d(a, b) < \delta$  ならば  $d(f(a), f(b)) < \varepsilon$  となるように取れる。さて  $S$  はコンパクトかつ局所連結であるから、直径が  $\delta$  より小さな有限個のコンパクト連結集合により  $S = E_1 \cup \dots \cup E_n$  と被覆される。このとき  $f(S) = \bigcup_{k=1}^n f(E_k)$  が成り立つが  $f(E_k)$  は直径が  $\varepsilon$  以下であり、コンパクトかつ連結な集合  $E_k$  の像であるからコンパクトかつ連結である。従って  $f(S)$  は直径が  $\varepsilon$  以下のコンパクトかつ連結集合の有限個により被覆される。よって Theorem 7.3.14 より  $f(S)$  はコンパクトかつ局所連結である。  $\square$

上の Theorem において仮定からコンパクトを省くともはや結果は成り立たない。実際、局所連結な空間の連続像で局所連結でないものがある。例えば  $X = [-2, -1] \cup (0, 1] \subset \mathbb{R}$  と置けば局所連結な距離空間である。Example 7.3.7 の  $E_0, E_1$  について写像  $f : X \rightarrow E_0 \cup E_1$  を  $[-2, -1]$  においては  $E_1$  への全単射を与えるアフィン写像とし、 $x \in (0, 1]$  については  $f(x)$  を座標  $(x, \sin \frac{1}{x})$  を持つ点と定義すれば  $f$  は連続であり、その像  $E_0 \cup E_1$  は  $E_1$  の各点において局所連結ではない。

以下は有名な定理であり、証明もそれほど難しくないので割愛する。

**Theorem 7.3.17 (Hahn-Mazurkiewicz).** 距離空間  $X$  について  $X$  が  $[0, 1]$  の連続像である、つまり全射連続写像  $f : [0, 1] \rightarrow X$  が存在する為の必要十分条件は  $X$  がコンパクトで連結かつ局所連結であることである。

## 7.4 等角写像の連続拡張

以下では  $\hat{C}$  の弦距離を用いて直径  $\text{diam}$  や円近傍  $\mathbb{D}(c, r)$  を考える場合,  $\text{diam}^\#$  や  $\mathbb{D}^\#(c, r)$  のように  $\#$  をつけて表す. さて  $\hat{C}$  の閉集合  $A$  が局所連結または弱局所連結であるとは  $A$  が距離空間  $\hat{C}$  の部分位相空間として局所連結 (または弱局所連結) であることである. 従って例えば  $a \in A$  において  $A$  が弱局所連結とは

$$(7.4.1) \quad \begin{aligned} &\forall N, \text{ open with } a \in N : \exists V, \text{ open with } a \in V \text{ and } V \cap A \subset N \cap A : \\ &\quad \forall b \in V \cap A : \exists E, \text{ connected} : a, b \in E \subset N \cap A \end{aligned}$$

が成り立つことである. これは

$$(7.4.2) \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall b \in \mathbb{D}^\#(a, \delta) : \exists E, \text{ connected} : a, b \in E \subset A \cap \mathbb{D}^\#(a, \varepsilon)$$

が成り立つことと同値である.

*Proof.* (7.4.1) が成り立つと仮定しよう. このとき任意の  $\varepsilon > 0$  について  $N = \mathbb{D}^\#(a, \varepsilon)$  と置き, 対応する  $a$  を含む開集合  $V$  を取る.  $\mathbb{D}^\#(a, \delta) \subset V = \mathbb{D}^\#(a, \varepsilon)$  を満たす  $\delta > 0$  を取れば (このとき  $\delta \leq \varepsilon$  が成り立つことに注意) 任意の  $b \in \mathbb{D}^\#(a, \delta) \cap A$  について  $\mathbb{D}^\#(a, \delta) \cap A \subset V \cap A$  より連結集合  $E$  を  $a, b \in E \subset N \cap A = \mathbb{D}^\#(a, \varepsilon) \cap A$  が成り立つように取れるので (7.4.2) が成立する.

逆に (7.4.2) が成り立つと仮定しよう. このとき  $a$  を含む任意の開集合  $N$  について  $\mathbb{D}^\#(a, \varepsilon) \subset N$  を満たす  $\varepsilon > 0$  を取り, 対応する  $\delta > 0$  を  $\delta \in (0, \varepsilon]$  を満たすように取り  $V = \mathbb{D}^\#(a, \delta)$  と置けば  $V \subset N$  が成り立ち, さらに任意の  $b \in V \cap A$  について  $a, b \in E \subset \mathbb{D}^\#(a, \varepsilon) \cap A \subset N \cap A$  を満たす連結集合  $E$  が存在するので, (7.4.1) が成立する.  $\square$

$A$  が局所連結であるとは全ての  $a \in A$  において局所連結であることであり, これは  $A$  が弱局所連結であること, つまり全ての  $a \in A$  において弱局所連結であることと同値であった. 従って  $A$  が局所連結であるとは, 全ての  $a \in A$  において (7.4.2) が成り立つことと言い換えても良い. 今の場合  $A$  はコンパクト集合  $\hat{C}$  の閉部分集合であるから,  $A$  自身がコンパクトである. このため次の一様弱局所連結性とも呼ぶべき条件が  $A$  が弱局所連結であるための必要十分条件となる. Pommerenke [20] では (7.4.3) を局所連結性の定義として採用している.

**Theorem 7.4.1.**  $\hat{C}$  の閉部分集合  $A$  が弱局所連結であるためには次の条件が必要十分である.

$$(7.4.3) \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall a, b \in A \text{ with } d^\#(a, b) < \delta : \exists E, \text{ connected} : a, b \in E \subset A \text{ with } \text{diam}^\#(E) < \varepsilon$$

が成り立つことである.

*Proof.*  $A$  は局所連結とし,  $\varepsilon > 0$  が任意に与えられたとする. 各  $c \in A$  について (7.4.2) の  $\delta > 0$  を  $\delta(c) > 0$  と書き表そう. このとき  $A \subset \bigcup_{c \in A} \mathbb{D}^\#(c, \delta)$  はコンパクト集合の開被覆である. このとき  $\delta > 0$  を  $a, b \in A$  が  $d^\#(a, b) < \delta$  を満たせば  $a, b \in \mathbb{D}^\#(c, \delta(c))$  を満たす  $c \in A$  が存在するようにとることが出来る. (このような  $\delta > 0$  はコンパクト距離空間における開被覆に付随する Lebesgue 数と呼ばれ, その存在は背理法により容易に証明出来る.)

さて  $d^\#(a, b) < \delta$  を満たす  $a, b \in A$  について  $a, b \in \mathbb{D}^\#(c, \delta(c))$  を満たす  $c \in A$  を取り, 連結集合  $E_a, E_b$  を

$$a_k, a \in E_a \subset \mathbb{D}^\#(c, 2^{-1}\varepsilon) \quad \text{and} \quad a_k, b \in E_b \subset \mathbb{D}^\#(c, 2^{-1}\varepsilon)$$

が成り立つように取り  $E = E_a \cup E_b$  と置く. このとき  $E$  は  $a_k \in E_a \cap E_b$  より連結であり  $a, b \in E \subset \mathbb{D}^\#(c, 2^{-1}\varepsilon)$  を満たす. よって  $\text{diam}^\#(E) < \text{diam}^\#(\mathbb{D}^\#(c, 2^{-1}\varepsilon)) = \varepsilon$  を満たす. 以上で (7.4.3) が示された.

逆に (7.4.3) が成り立てば, 明らかに任意の  $a \in A$  について  $A$  は  $a$  において弱局所連結であり, 従って  $A$  は弱局所連結である. よって Theorem 7.3.10 より  $A$  は局所連結である.  $\square$

次に等角写像の像曲線に関する結果を述べておこう.

**Lemma 7.4.2** (Wolff の補題).  $R > 0$  とし,  $H \subset \mathbb{C}$  を開集合,  $h : H \rightarrow \mathbb{D}(0, R)$  を解析的な単射とする. このとき任意の  $c \in \mathbb{C}$  と  $r > 0$  について

$$(7.4.4) \quad \inf_{\rho < r < \sqrt{\rho}} \Lambda(h(C(r))) \leq \frac{2\pi R}{\sqrt{\log \frac{1}{\rho}}}, \quad 0 < \rho < 1$$

が成り立つ. ここに  $C(r) = H \cap \partial\mathbb{D}(c, r)$  であり, 空であるか  $\partial\mathbb{D}(c, r)$  に一致するか, または高々可算個の  $\partial\mathbb{D}(c, r)$  の開部分円弧よりなる. また  $\Lambda(h(C(r)))$  でこれらの開円弧の像の長さの総和を表す.

*Proof.* はじめに  $\Lambda(C(r))$  は  $r$  について下半連続, つまり  $\liminf_{r \rightarrow r_0} C(r) \geq C(r_0)$  が成り立つことに注意する. Cauchy-Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned} \Lambda(h(C(r)))^2 &= \left\{ \int_{C(r)} |h'(z)| |dz| \right\}^2 \\ &= \int_{C(r)} |dz| \int_{C(r)} |h'(z)|^2 |dz| \leq 2\pi r \int_{\{t \in (-\pi, \pi] : c + re^{it} \in H\}} |h'(c + re^{it})|^2 r dt \end{aligned}$$

を得る.  $\Lambda(C(r))$  は  $r$  に関し, 下半連続であるなら可測であり両辺を  $r$  で割ってから  $r$  について  $0$  から  $\infty$  まで積分すれば,  $jh$  の単射性と  $h(H) \in \mathbb{D}(0, R)$  より

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\Lambda(h(C(r)))^2}{r} dr &\leq 2\pi \int_0^\infty \left\{ \int_{\{t \in (-\pi, \pi] : c + re^{it} \in H\}} |h'(c + re^{it})|^2 r dt \right\} dr \\ &= 2\pi \iint_H |h'(x + iy)|^2 dx dy = 2\pi \text{Area} h(H) \leq 2\pi^2 R^2 \end{aligned}$$

が成り立つ. この不等式より

$$\begin{aligned} \left\{ \inf_{\rho < r < \sqrt{\rho}} \Lambda(h(C(r))) \right\}^2 \frac{1}{2} \log \frac{1}{\rho} &\leq \int_\rho^{\sqrt{\rho}} \frac{\Lambda(h(C(r)))^2}{r} dr \\ &\leq \int_0^\infty \frac{\Lambda(h(C(r)))^2}{r} dr \leq 2\pi^2 R^2 \end{aligned}$$

を得る.  $\square$

Wolff の補題より任意の  $\varepsilon > 0$  と  $r_0 > 0$  について  $\Lambda(C(r)) < \varepsilon$ ,  $0 < r < r_0$  を満たす  $r$  が存在することが従う.

**Theorem 7.4.3.**  $G$  を複素平面内の有界な単連結領域とし  $f : \mathbb{D} \rightarrow G$  を等角写像とする. このとき次の 4 条件は同値である.

- (i)  $f$  は  $\bar{\mathbb{D}}$  まで連続的に拡張可能.
- (ii)  $\partial G$  は閉曲線である. つまり連続な全射  $\varphi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial G$  が存在する.
- (iii)  $\partial G$  は局所連結である.

(iv)  $\mathbb{C} \setminus G$  は局所連結である.

*Proof.* (i)  $\implies$  (ii).  $f$  の  $\overline{\mathbb{D}}$  への連続拡張を再び  $f$  で表すことにする. このとき  $f(\partial\mathbb{D}) = \partial G$  が成り立つ. 実際  $\zeta \in \partial\mathbb{D}$  について  $f(\zeta) \in \overline{G} = G \cup \partial G$  であるが,  $f(\zeta) \in G$  となることはない. 実際もし  $f(\zeta) \in G$  ならば  $f(\zeta) = f(z_0)$  を満たす  $z_0 \in \mathbb{D}$  が存在する.  $r_0 = \frac{|\zeta - z_0|}{2} > 0$  と置けば  $f$  の開写像性より  $f(\mathbb{D}(z_0, r_0))$  は  $f(\zeta) = f(z_0)$  の近傍であり,  $f$  の  $\zeta$  における連続性より  $f(\mathbb{D} \cap \mathbb{D}(\zeta, \delta)) \subset f(\mathbb{D}(z_0, r_0))$  を満たす  $\delta > 0$  が存在する. このとき任意の  $z \in \mathbb{D} \cap \mathbb{D}(\zeta, \delta)$  について  $f(z) \in f(\mathbb{D}(z_0, r_0))$  より  $f(z') = f(z)$  となる  $z' \in \mathbb{D}(z_0, r_0)$  が存在する. これは  $f: \mathbb{D} \rightarrow G$  の単射性に矛盾する. これで  $f(\partial\mathbb{D}) \subset \partial G$  が示されたことになるが, 逆の包含関係を示すために  $w_0 \in \partial G$  を任意にとると, 今度は  $f: \mathbb{D} \rightarrow G$  の全射性より  $f(z_n) \rightarrow w_0$  を満たす  $\mathbb{D}$  の点列  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  が取れる. 必要ならば部分列を取ることにより  $z_n \rightarrow z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$  と仮定してよい. このとき  $z_0 \in \mathbb{D}$  ならば  $f(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w_0 \in G$  となり矛盾を生じるので  $z_0 \in \partial\mathbb{D}$  であり,  $w_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(z_0) \in f(\partial\mathbb{D})$  が成り立ち,  $w_0$  の任意性より  $\partial G \subset f(\partial\mathbb{D})$  が成り立つ. 以上で  $f(\partial\mathbb{D}) = \partial G$  が示されたが, これより  $\varphi = f|_{\partial\mathbb{D}}: \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial G$  が連続な全射を与える.

(ii)  $\implies$  (iii). 距離空間内のコンパクトかつ局所連結な集合の連続写像による像もコンパクトかつ局所連結である (Theorem 7.3.16) よって  $\partial G = \varphi(\partial\mathbb{D})$  は局所連結である.

(iii)  $\implies$  (iv).  $\varepsilon > 0$  が任意の与えられたとして  $\partial G$  の局所連結性より  $\delta > 0$  を  $z_0, z_1 \in \partial G$  が  $|z_0 - z_1| < \delta$  を満たせば  $z_0, z_1 \in E \subset \partial G$  かつ  $\text{diam}(E) < \varepsilon$  を満たす連結集合が存在するように取る. 必要ならば小さく取り直すことにより  $\delta < \varepsilon$  も仮定しておく.

それでは  $a, b \in \mathbb{C} \setminus G$  が  $|a - b| < \delta$  を満たすとき連結集合  $E$  を  $\text{diam}(E) < 2\varepsilon$ ,  $a, b \in E \subset \mathbb{C} \setminus G$  が成り立つように取れることを示そう. まず  $a, b$  を両端とする閉線分  $[a, b]$  が  $[a, b] \subset \mathbb{C} \setminus G$  を満たすときは  $E = [a, b]$  と置けば明らかに要求された条件を満たす. そうでない時, つまり  $[a, b] \cap G \neq \emptyset$  の場合は

$$t_0 = \inf\{t \in [0, 1] : (1-t)a + tb \in G\} \text{ and } z_0 = (1-t_0)a + t_0b,$$

$$t_1 = \sup\{t \in [0, 1] : (1-t)a + tb \in G\} \text{ and } z_1 = (1-t_1)a + t_1b$$

と置けば  $[a, z_0] \subset \mathbb{C} \setminus G$ ,  $[z_1, b] \subset \mathbb{C} \setminus G$ ,  $z_0, z_1 \in \partial G$  が成り立つ.  $|z_0 - z_1| < |a - b| < \delta$  より連結集合  $E_0$  で  $z_0, z_1 \in E_0 \subset \partial G \subset \mathbb{C} \setminus G$ ,  $\text{diam}(E_0) < \varepsilon$  を満たすものが存在する. このとき

$$E := [a, z_0] \cup E_0 \cup [z_1, b] \subset \mathbb{C} \setminus G$$

であり,  $z_0 \in [a, z_0] \cap E_0$ ,  $z_1 \in E_0 \cup [z_1, b]$  より  $E$  は連結である. また

$$\text{diam}(E) \leq \text{diam}(E_0) + |a - z_0| + |z_1 - b| < \text{diam}(E_0) + |a - b| < \varepsilon + \delta < 2\varepsilon$$

が成り立つ.

(iv)  $\implies$  (i). 必要ならば  $f$  に平行移動を施し  $f(0) = 0$  と仮定する. また  $\mathbb{D}(0, R_0) \subset G \setminus \mathbb{D}(0, R)$  を満たす  $0 < R_0 < R$  を取る.  $\varepsilon \in (0, R_0)$  が任意に与えられたとして  $\delta > 0$  を

$$a, b \in \mathbb{C} \setminus G \text{ with } |a - b| < \delta \implies \exists E, \text{ 連結} : \text{diam}(E) < \varepsilon \text{ and } a, b \in E \subset \mathbb{C} \setminus G$$

が成り立つように取る. この  $\delta > 0$  に対し  $\rho \in (0, \frac{1}{4})$  を

$$\frac{2\pi R}{\log \frac{1}{\rho}} < \delta$$

を満たすように取る. このとき  $z, z' \in \mathbb{D} \setminus \overline{\mathbb{D}}(0, 1/2)$  かつ  $|z - z'| < \rho$  を満たす任意の  $z, z'$  について Wolff の補題 (Lemma 7.4.2) を  $H = \mathbb{D}$ ,  $c = z$  として適用すれば  $r \in (\rho, \sqrt{\rho}) \subset (\rho, 1/2)$  で

$$\Lambda(f(C)) < \delta < \varepsilon, \quad C := \mathbb{D} \cap \mathbb{D}(z, r)$$



を満たすものが存在する. このとき

$$(7.4.5) \quad |f(z) - f(z')| < 2\varepsilon$$

が成り立つことを背理法により示せば証明は完了する. 実際, このとき  $f$  は  $\mathbb{D}$  で一様連続になるので  $\overline{\mathbb{D}}$  に連続拡張される.

(7.4.5) を否定する. またさらに  $\overline{C} \cap \partial\mathbb{D} \neq \emptyset$  のときを考えよう. このとき  $C$  は開円弧であり両端点を  $\zeta_0, \zeta_1 \in \partial\mathbb{D}$  とすれば  $C$  に沿って  $\zeta \rightarrow \zeta_0$  のとき極限  $a = \lim_{C \ni \zeta \rightarrow \zeta_0} f(\zeta) \in \partial G$  が存在し, 同様に  $b = \lim_{C \ni \zeta \rightarrow \zeta_1} f(\zeta) \in \partial G$  も存在する. さらに  $|a - b| \leq \Lambda(f(C)) < \delta (< \varepsilon)$  が成り立つ. よって  $a, b \in E \subset \mathbb{C} \setminus G$  かつ  $\text{diam}(E) < \varepsilon$  を満たす連結集合  $E$  が存在する. よって

$$E \cup f(C) \subset \mathbb{D}(a, \varepsilon)$$

が成り立ち,  $a \in \partial G$  より  $|a| \geq R_0 > \varepsilon$  であるから  $0 \notin \mathbb{D}(a, \varepsilon)$  が成り立つ. さてこのとき  $|f(z) - f(z')| \geq 2\varepsilon$  であるから  $f(z)$  または  $f(z')$  の少なくとも一方は  $E \cup f(C)$  により  $0$  と分離されない. ここでは  $f(z')$  が  $0$  と分離されないと仮定し議論を進めよう. この仮定と  $f(z')$  と  $0$  が  $\mathbb{C} \setminus G$  により分離されないことと及び

$$(E \cup f(C)) \cap (\mathbb{C} \setminus G) = E$$

が連結であるから Janiszewski の定理より  $f(z')$  と  $0$  は  $f(C) \cup (\mathbb{C} \setminus G)$  により分離されないことになる. この関係を  $f$  により  $\mathbb{D}$  に引き戻せば  $0$  と  $z'$  が  $C = \mathbb{D} \cap \mathbb{D}(z, r)$  により分離されないことになり, 矛盾である.  $\square$

## 7.5 Carathéodory の拡張定理と Schönflies の定理

連続体  $E$  について  $a \in E$  が cut point であるとは  $E \setminus \{a\}$  が連結でないときを言う. 例えば単純閉曲線は cut point を持たないが, 両端点を除く全ての点が cut point である.

**Proposition 7.5.1.**  $G$  を  $\mathbb{C}$  内の有界な単連結領域とし  $\partial G$  は局所連結とする. また  $f: \mathbb{D} \rightarrow G$  を等角写像とし,  $\overline{\mathbb{D}}$  への連続拡張も再び  $f$  と表す. このとき  $a \in \partial G$  について集合  $f^{-1}(\{a\}) \subset \partial\mathbb{D}$  は空でない閉集合であり, 開円弧を含むことはない.  $f^{-1}(\{a\})$  が有限集合の時は, 元の総数を  $m$  と置き,  $f^{-1}(\{a\})$  が無限集合の場合は  $m = \infty$  (可算無限) と置く. このとき  $a$  が  $\partial G$  の cut point であるための必要十分条件は  $m \geq 2$  である. また  $\partial\mathbb{D} \setminus f^{-1}(\{a\})$  は丁度  $m$  個の開円弧よりなる連結成分を持ち, それらを  $\{I_k\}_{k=1}^m$  と置けば,  $\partial G \setminus \{a\}$  の連結成分への分解は

$$\partial G \setminus \{a\} = \bigcup_{k=1}^m f(I_k)$$

で与えられる.

*Proof.* Theorem 7.4.3 より  $f(\partial\mathbb{D}) = \partial G$  が成り立つので  $a \in \partial G$  について  $f^{-1}(\{a\})$  は空でなく,  $f$  の連続性より閉集合である. 従って  $\partial\mathbb{D} \setminus f^{-1}(\{a\})$  は  $(\partial\mathbb{D}$  の部分位相のもとで) 開集合であり, 連結成分へ分解すれば, 高々可算個の互いに素な開円弧よりなる.

$f^{-1}(\{a\})$  が開円弧  $I$  を含んだと仮定し矛盾を導こう.  $f = u + iv$  と分解する. 任意の  $\zeta \in I$  について  $\mathbb{D} \ni z \rightarrow \zeta$  のとき  $u(z) \rightarrow \text{Re } a, v(z) \rightarrow \text{Im } a$  が成り立つので  $u, v$  は  $I$  を越えて調和に延長可能であり,  $I$  においても Cauchy-Riemann の方程式を満たす. よって  $f$  は  $I$  を越えて解析接続可能であり,  $I$  上で  $f = a$  が成り立つ. よって一致の定理より  $\mathbb{D}$  上でも  $f = a$  が成り立ち, 矛盾を生じる.

それでは  $\partial\mathbb{D}\setminus f^{-1}(\{a\})$  の成分をなす開円弧の個数が丁度  $m$  であることを示そう.  $m \in \mathbb{N}$  のとき, 必要ならば並べ替えを行うことにより  $f^{-1}(\{a\}) = \{e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_m}\}$ ,  $0 \leq \theta_1 < \dots < \theta_m < 2\pi$  と表すことが出来る. このとき

$$I_k = \{e^{i\theta} : \theta_k < \theta < \theta_{k+1}\}, \quad k = 1, \dots, m-1 \quad \text{and} \quad I_m = \{e^{i\theta} : \theta_m < \theta < \theta_1 + 2\pi\}$$

と置けば  $I_1, \dots, I_m$  は互いに交わらない開円弧であり  $\partial\mathbb{D}\setminus f^{-1}(\{a\}) = \bigcup_{k=1}^m I_k$  が連結成分への分解を与え, 特に  $\partial\mathbb{D}\setminus f^{-1}(\{a\})$  の連結成分の個数は  $m$  個である.

次に  $m = \infty$  の場合を考えよう.  $\partial\mathbb{D}\setminus f^{-1}(\{a\})$  の成分をなす開円弧は高々可算であるから, この場合開円弧が有限個しかないと仮定し矛盾を導けばよい. もし有限個しかないと仮定すると必要ならば並べ替えることにより  $I_k = \{e^{i\theta} : s_k < \theta < t_k\}$ ,  $k = 1, \dots, K$

$$0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_K < t_K \leq s_1 + 2\pi$$

と仮定してよい. このとき  $t_k < s_{k+1}$ , となる  $k = 1, \dots, K-1$  が存在するか, または  $t_K < s_1 + 2\pi$  が成り立てば開区間  $(t_k, s_{k+1})$  (または  $t_K < s_1 + 2\pi$ ) に対応する開円弧を  $f^{-1}(\{a\})$  が含むことになり矛盾を生じる. よって  $t_k = s_{k+1}$ ,  $k = 1, \dots, K$  及び  $t_K = s_1 + 2\pi$  が成り立ち  $f^{-1}(\{a\}) = \{e^{is_k} : k = 1, \dots, K\}$  である. よって  $m = K$  となり,  $m = \infty$  に矛盾する.

さて  $\partial G \setminus \{a\} = \bigcup_{k=1}^m f(I_k)$  が成り立つが各  $f(I_k)$  は連結集合  $I_k$  の連続像ゆえ連結である. 以下では  $f(I_j)$  と  $f(I_k)$  を分離し  $\partial G \setminus \{a\}$  と交わらない単純閉曲線の存在を示そう. これが示されれば  $\partial G \setminus \{a\} = \bigcup_{k=1}^m f(I_k)$  が連結成分への分解を与えることが従う. このために  $I_j$  の端点を結び, 端点以外は  $\mathbb{D}$  内にある円弧を  $C$  と置き,  $f(C)$  が求める性質を持つこと示そう.

まず  $C$  の両端点は  $f^{-1}(\{a\})$  の点であるから  $f(C)$  は閉曲線であり,  $G$  における  $f$  の単射性より単純である. さらに  $I_j$  の点  $b$  と  $I_k$  の点  $b'$  を任意に取り, これら 2 点を結び, これら 2 点以外は  $\mathbb{D}$  内にある円弧を  $C'$  と置く. このとき  $C$  と  $C'$  は 1 点で交わり, お互いの接線は平行でない. 従って  $f(C)$  と  $f(C')$  も 1 点で交わり, お互いの接線は平行でない. よって Theorem 4.4.1 より  $f(b) \in f(I_j)$  と  $f(b') \in f(I_k)$  は単純閉曲線  $f(C)$  により分離される. 従って  $f(I_j), f(I_k)$  は  $f(C)$  とは交わらず連結なので  $f(C)$  により分離される.  $\square$

**Theorem 7.5.2** (Carathéodory の拡張定理).  $f$  を  $\mathbb{D}$  から有界な単連結領域  $G$  への等角写像とする. このとき次の 3 条件は同値である.

- (i)  $f$  は  $\overline{\mathbb{D}}$  に連続かつ単射に拡張される.
- (ii)  $\partial G$  は単純閉曲線である.
- (iii)  $\partial G$  は局所連結であり, *cut points* を持たない.

*Proof.* (i)  $\implies$  (ii)  $\implies$  (iii) は明らかであろう. (iii)  $\implies$  (i) を示そう. (iii) を仮定すると Theorem 7.4.3 より  $f$  は  $\overline{\mathbb{D}}$  における連続拡張を持ち,  $f|_{\partial\mathbb{D}} : \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial G$  は連続な全射である. また  $\partial G$  は *cut point* を持たないので Proposition 7.5.1 より任意の  $a \in \partial G$  について  $f^{-1}(\{a\}) \cap \partial\mathbb{D}$  は 1 点よりなる. つまり  $f|_{\partial\mathbb{D}} : \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial G$  は単射である. よって  $f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{G}$  は連続な全単射である.  $\square$

**Corollary 7.5.3.**  $f$  を  $\mathbb{D}$  から *Jordan* 領域  $G$  への等角写像とすれば  $\mathbb{C}$  から自身への同相写像に拡張される.

*Proof.*  $\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cup \{\infty\}$  とする.  $\Omega$  を  $\gamma$  の内側の領域とし  $f : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$  を等角写像とし,  $\overline{\mathbb{D}}$  へ連続拡張しておく. また同様に  $\Omega^*$  を  $\gamma$  の外側の領域 ( $\infty$  も含む) とし,  $g : \mathbb{D}^* \rightarrow \Omega^*$  を等角写像で

$g(\infty) = \infty$  を満たすとし,  $\mathbb{D}^*$  に連続拡張しておく. このとき  $\varphi = g^{-1} \circ f|_{\partial\mathbb{D}}$  と置けば  $\partial\mathbb{D}$  から自身への連続な全単射である. そこで

$$f(z) = g\left(|z|\varphi\left(\frac{z}{|z|}\right)\right), \quad z \in \mathbb{D}^* \quad \text{and} \quad f(\infty) = \infty$$

と拡張すれば,  $\partial\mathbb{D}$  で連続であることが容易に確認できる. よって  $f$  は  $\hat{\mathbb{C}}$  から自身への連続な全単射であり, 同相写像である.  $\square$

**Theorem 7.5.4** (Schönflies の定理).  $\gamma: \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  を *Jordan* 曲線とすると同相写像  $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  で  $h|_{\partial\mathbb{D}} = \gamma$  を満たすものが存在する.

*Proof.*  $f$  を  $\mathbb{D}$  から  $\gamma$  の内側の領域  $\Omega$  への等角写像とし,  $\mathbb{C}$  から自身への同相写像に拡張しておく.

$\psi = f^{-1} \circ \gamma$  は  $\partial\mathbb{D}$  から自身への連続な全単射を与える. これを

$$\psi(z) = |z|\psi\left(\frac{z}{|z|}\right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \psi(0) = 0 \quad \text{and} \quad \psi(\infty) = \infty$$

と置いて  $\mathbb{C}$  から自身への同相写像に拡張する. このとき  $h = f \circ \psi$  が求めるものである.  $\square$

**NOTES.** §1 は *Riemann* の写像定理の証明の準備である. 局所的な原始函数を用いた線積分の拡張と *singular cell* 上の *Caychy* の積分定理については *Heins* [6] を参考にした. 主要な定理の証明は省略されていないが, 他の定理の証明は演習問題とし読者に任せるという大変癖の強い教科書であるが, 他の本に書いていない結果が数多く載っていて名著であることは間違いない. 学部 3 年次の 1 年間, 週に 1 度の演習の時間 (この本を読んで問題を解くこと) に出る以外, 全ての講義をサボり, この教科書を読むことだけに費やしたが半分しか読むことが出来なかった. §2 の *Riemann* の写像定理は大抵の複素解析の教科書にある. とはいうものの領域が単連結なるための必要十分条件が補集合が空または連結になることを暗黙のうちに使っているものが多い. §3 については *Newman* の著書の, 第 4 章をもとにしているが, 必要に応じ, 位相に関する標準的な教科書である *Munkres* [13] を参考にした. §4 については *Pommrenke* [20] と [19] をもとにしている.

# 演習問題の解答

*Exercise 2.5.7* の解答. 換言すると Theorem 2.6.7 なので, Theorem 2.6.7 の証明を参照せよ. □

*Exercise 2.5.8* の解答.  $S_j$  と  $T_j$  が相補的なので  $s \in T_j \iff s \notin S_j$  が成り立つ. よって

$$\begin{aligned} s \in S_1 + S_2 &\iff (s \in S_1 \ \& \ s \notin S_2) \text{ or } (s \notin S_1 \ \& \ s \in S_2) \\ &\iff (s \notin T_1 \ \& \ s \in T_2) \text{ or } (s \in T_1 \ \& \ s \notin T_2) \\ &\iff s \in T_1 + T_2 \end{aligned}$$

もう一つの等式も同様である. □

*Exercise 3.1.6* の解答.  $\Omega \cap D_j$  が空でなく連結であることを示せばよいであろう. まず  $\partial D_j \subset F$  (これを示すのは難しくない) と  $F \subset \Omega$  より, 任意の  $a \in \partial D_j$  について  $\Omega$  は  $a$  の近傍ゆえ  $D_j \cap \Omega \neq \emptyset$  が従う.

次に任意の 2 点  $p, q \in D_j \cap \Omega$  について, まず  $p, q \in D_j$  より  $p, q$  は  $F$  により分離されない. また  $p, q \in \Omega$  より  $p, q$  は  $\hat{C} \setminus \Omega$  によっても分離されない. ここで  $F \cap (\hat{C} \setminus \Omega) = \emptyset$  より Janiszewski の定理を用いると  $p, q$  は  $F \cup (\hat{C} \setminus \Omega)$  により分離されない. よって  $p, q$  を結び,  $F$  と交わらずかつ  $\Omega$  に含まれる折れ線  $\ell$  が存在する.  $\ell$  の連結性と  $p \in D_j$  より  $\ell \subset D_j$  が成り立つ. 以上より  $\ell \subset D_j \cap \Omega$  が成り立ち,  $D_j \cap \Omega$  が連結であることが従う. □

*Exercise 3.1.7* の解答.  $p = 1$  の時は明らか.  $p$  の時に正しいとして  $\hat{C} \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_p)$  の連結成分の中に  $F_{p+1}$  を含むものが 1 つあるので, それを  $\Omega$  とし, 残りを  $\Omega_1, \dots, \Omega_{n_1 + \dots + n_p - 1}$  と置くと

$$\hat{C} \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_p \cup F_{p+1}) = (\hat{C} \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_p)) \setminus F_{p+1} = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_{n_1 + \dots + n_p - 1} \cup (\Omega \setminus F_{p+1})$$

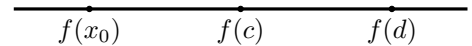
を得る.  $\Omega \setminus F_{p+1}$  に Exercise 3.1.6 を適用すれば  $\Omega \setminus F_{p+1}$  は互いに交わらない  $n_{p+1}$  個の領域に分解される. よって  $\hat{C} \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_p \cup F_{p+1})$  の成分は  $n_1 + \dots + n_p - 1 + n_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} n_k - 1$  である. □

*Exercise 4.1.2* の解答. はじめに任意の  $c, d \in (a, b)$  with  $c < d$  について

$$f([c, d]) = [f(c) \wedge f(d), f(c) \vee f(d)]$$

が成り立つこと及び  $f(c) < f(d)$  ならば  $f$  は  $[c, d]$  で狭義増加であり,  $f(c) > f(d)$  ならば  $f$  は  $[c, d]$  で狭義減少であることを示そう. ただし実数  $x, y$  について  $x \wedge y = \min\{x, y\}$ ,  $x \vee y = \max\{x, y\}$  とする.

□ については中間値の定理から直ちに従う. ◻ については  $f(c) < f(d)$  の場合を示そう. ( $f(c) > f(d)$  の場合も同様である.)



$f(x_0) \notin [f(c) \wedge f(d), f(c) \vee f(d)] = [f(c), f(d)]$  を満たす  $x_0 \in (c, d)$  が存在すると仮定する.  $f(x_0) < f(c)$  を満たす  $x_0 \in (c, d)$  が存在すれば

$$f([c, x_0]) \supset [f(x_0), f(c)] \quad \text{and} \quad f([x_0, d]) \supset [f(x_0), f(d)]$$

より  $y \in (f(x_0), f(c))$  について原像が  $(c, x_0)$  と  $(x_0, d)$  内に少なくとも 1 つずつ存在するので  $f$  の単射性に反する.  $f(x_0) > f(f)$  の場合も同様に矛盾を生じるので結局  $x_0 \in (c, d)$  について  $f(x_0) \in (f(c), f(d))$  が成り立つ.

次に  $f(c) < f(d)$  の時に  $f$  が  $[c, d]$  で狭義増加であることを示そう. ( $f(c) > f(d)$  の時に狭義減少となることも同様である.) それには  $c \leq x_0 < x_1 \leq d$  かつ  $f(x_1) \leq f(x_0)$  を満たす  $x_0, x_1$  が存在したと仮定して矛盾を導けばよい.



実際このとき  $y \in [f(x_1), f(x_0)]$  について  $[c, x_0]$  と  $[x_1, d]$  に原像が少なくとも 1 つずつ存在するので  $f$  の単射性に反する.

上で示したことから  $f$  は  $(a, b)$  で狭義増加であるか, 狭義減少のどちらかであることが分かる. ここまで来れば  $A = \inf_{a < x < b} f(x)$ ,  $B = \sup_{a < x < b} f(x)$  と置けば  $f((a, b)) = (A, B)$  を示すことは容易であろう.  $\square$

## 参考文献

- [1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1979
- [2] L. V. Ahlfors, *Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory*, McGraw-Hill, New York, 1973
- [3] L.V. Ahlfors and L. Sario, *Riemann Surfaces*, Princeton Univ. Press, 1960.
- [4] H. Boedihardjo and X. Geng, Simple piecewise geodesic interpolation of simple and Jordan curves with applications, *Constr. Approx.* **42** (2015), 161 – 180.
- [5] M. Heins, *Selected topics in the classical theory of functions of a complex variable*, Holt., Reinhart and Winston, New York 1962.
- [6] M. Heins, *Complex Function Theory*, Academic Press, New York and London, 1968.
- [7] M. Henle, *A combinatorial introduction to topology*, Dover Pub. Inc., New York, 1994.
- [8] W. Kulpa, The Poincaré-Miranda theorem, *Amer. Math. Monthly* **104** (1997), 545-550.
- [9] W. Kulpa, Poincaré and domain invariance theorem, *Acta Univ. Carolinae. Math. et Phys.* **39**(1998), 127-136.
- [10] R. Maehara, The Jordan curve theorem via the Brouwer fixed point theorem, *Amer. Math. Monthly* **91** (1984), 641 – 643.
- [11] E. E. Moise, Edwin, *Geometric topology in dimensions 2 and 3*, Springer-Verlag, New York Heidelberg, 1977.
- [12] M. Müger, *Topology for the Working Mathematician*.
- [13] J. R. Munkres, *Topology*, second edition, Prentice-Hall, 2000.
- [14] T. Needham, *Visual Complex Analysis*, Oxford Univ. Press, New York, 1997.
- [15] T. ニーダム, ヴィジュアル複素解析, 培風館, 2002.
- [16] M. H. A. Newman, *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*, Cambridge Univ. Press, 1939.
- [17] M. H. A. Newman, *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*, Dover Pub. Inc., New York, 1992.
- [18] M. H. A. ニューマン, 位相数学序論—主として平面点集合の, 白水社, 1960.
- [19] Ch. Pommerenke, *Univalent functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.
- [20] Ch. Pommerenke, *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.
- [21] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [22] J. L. Schiff, *Normal Families*, Springer-Verlag, New York Berlin, 1993.
- [23] 竹内 幸雄, Brouwer' s fixed point theorem の初等的証明, 数理解析研究所講究録, 第 1755 巻, 2011 年, 160-170.

# 索引

2-dimensional connectedness), 7  
2次元の連結性 (2-dimensional connectedness), 7

addition modulo 2, 13  
Alexander Lemma, 27

barycentric coordinate, 52  
Bouwer の不動点定理, 10  
Brouwer fixed point theorem, 10

Carathéodory extension theorem, 89  
Carathéodory の拡張定理 (Carathéodory extension theorem), 89

cell, 11  
chain, 11  
combinatorial boundary, 14  
combinatorial Jordan curve theorem, 22  
complementary, 18  
conformally equivalent, 76  
continuum, 76  
cut point, 88  
cycle, 16

diagonal, 49

ear, 49  
edge, 12  
 $\varepsilon$ -chain, 58  
 $\varepsilon$ -connected, 58

frame, 11

homologous, 20

intersection number, 46  
invariance of domain, 36

Janiszewski Theorem, 29  
Jordan Arc Theorem, 30  
Jordan curve theorem), 37  
Jordan polygon, 45  
Jordan の曲線定理 (Jordan curve theorem), 37  
Jordan 多角形 (Jordan polygon), 45

locally connected at  $x$ , 78  
locus, 12

modulo 2 の和 (addition modulo 2), 13

non-singular, 31  
non-singular chain, 31  
non-singular vertex, 31

odd vertex, 15

path homotopic, 70  
PL-Schönflies Theorem, 48  
PL-Schönflies の定理 (the Schönflies Theorem), 48  
Poincaré-Miranda Theorem, 8

Poincaré-Miranda の定理, 8

rectangular grating, 11  
refinement, 18  
Riemann mapping theorem, 76  
Riemann の写像定理 (Riemann mapping theorem), 76

Schönflies theorem, 90  
Schönflies の定理 (Schönflies theorem), 90  
simple polygon, 45  
simply connected, 69  
singular vertex, 31  
Sperner Lemma, 5  
Sperner の補題 (Sperner Lemma), 5

thickening, 32

vertice, 12

winding number, 38

アレキサンダーの補題 (Alexander Lemma), 27

$\varepsilon$ -鎖 ( $\varepsilon$ -chain), 58  
 $\varepsilon$ -連結 ( $\varepsilon$ -connected), 58

回転数 (winding number), 38

軌跡 (locus), 12  
奇頂点 (odd vertex), 15  
局所連結 (locally connected at  $x$ ), 78

組み合わせ的境界 (combinatorial boundary), 14  
組み合わせ的な Jordan の曲線定理, 22

交点数 (intersection number), 46

鎖 (chain), 11  
サイクル (cycle), 16  
細分 (refinement), 18

重心座標 (barycentric coordinate), 52

正則 (non-singular), 31

相補的 (complementary), 18

対角線 (diagonal), 49  
単純多角形 (simple polygon), 45  
単連結 (simply connected), 69

頂点 (vertice), 12  
長方形格子 (rectangular grating), 11

等角同値 (conformally equivalent), 76

肥厚 (thickening), 32

辺 (edge), 12

胞体 (cell), 11  
ホモロガス (homologus), 20

耳 (ear), 49

領域の不変性 (invariance of domain), 36

連続体 (continuum), 76

枠 (frame), 11