Picard, Montel, Runge の定理総説

小櫃 邦夫

2024.3.2

目次

0　序文

Picard (1856 – 1941)

Runge (1856 – 1927)

Montel (1876 – 1975)

Picard の定理の証明は, さまざまなものが知られている. 1 章 1.1-1.2 では, 楕円モジュラー関数, 普遍被覆写像, 双曲計量, 値分布論, 正規族を一切用いず, Bloch の定理から Picard の定理を導く証明をまとめた. 具体的に述べると, Bloch の定理 $\Longrightarrow$ Schottky の定理 $\Longrightarrow$ Picard の大定理 $\Longrightarrow$ Picard の小定理 の順に証明される. 1.3 では Ahlfors による Ultra 双曲計量を導入し, Bloch の定理と Schottky の定理と Picard の大定理の別証明を与える. 2 章では正規族のいわゆる Montel の理論を解説し, Picard の定理の正規族を用いた別証明を解説した. 2.4 では Picard の小定理 $\Longrightarrow$ Montel-Carathéodory の定理 を, Zalcman の補題を用いて証明する. すなわち, これより Montel-Carathéodory の定理 $\Longleftrightarrow$ Schottky の定理 $\Longleftrightarrow$ Picard の大定理 $\Longleftrightarrow$ Picard の小定理 であることが従う. 2.5 では Riemann の写像定理の正規族を用いた証明を与える. 3 章では Runge の定理を主に文献 [22] に基づいて解説した. Runge の定理は複素平面上だけでなく, 開リーマン面や多変数関数の場合にも一般化され, それぞれがまた深い理論へと繋がっている. また, Runge の定理の応用として, Mittag-Leffler の定理, Weierstrass の定理の証明を解説した.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ で, それぞれを自然数全体, 有理数全体, 整数全体, 実数全体, 複素数全体を表し, $\hat{\mathbb{C}}$ により Riemann 球面 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ を表す. また, $\Delta(a,R)=\{z\in\mathbb{C}:|z-a|<R\}$, $\overline{\Delta}(a,R)=\{z\in\mathbb{C}:|z-a|\leq R\}$, $\Delta=\Delta(0,1)$, $\overline{\Delta}=\overline{\Delta}(0,1)$ とかき表す.

1 Picard の定理

1.1 Bloch の定理と Schottky の定理

真性特異点のもつ基本的な性質を述べる. これは Picard の定理よりかなり弱い主張である.

定理 1.1 (Casorati-Weierstrass の定理 (1868)) $\Delta^*(r)=\{0<|z|<r\}$ 上の正則関数 f が $z=0$ で真性特異点をもつとする. そのとき, 像 $f(\Delta^*(r))$ は $\mathbb{C}$ 上稠密である.

証明 像が稠密でないと仮定すると, $w\in\mathbb{C}$ と w の近傍 W が存在して, $f(\Delta^*(r))\cap W=\phi$. そのとき, $1/(f(z)-w)$ は $\Delta^*(r)$ 上有界であるから, $z=0$ で除去可能な特異点をもつ. したがって, $1/(f(z)-w)=z^N h(z), h$ は正則関数, $h(0)\neq 0$, つまり $f(z)=w+1/z^N h(z)$ となり, f は $z=0$ で N 位の極をもつ. □

Picard の定理を示すための道具は, Bloch の定理と Schottky の定理である.

命題 1.2 単位円板 Δ 上の正則関数 f が $f(0)=0, f'(0)=1$ を満たし, $|f(z)|\leq M$ $(z\in\Delta)$ とする. そのとき, $f(\Delta)\supset\Delta(0,1/4M)$.
したがって, もし f が $\Delta(0,R)$ 上正則で $f(0)=0, |f|\leq M$ ならば,

$$f(\Delta(0,R))\supset\Delta\left(0,\frac{|f'(0)|^2R^2}{4M}\right).$$

証明 $w\notin f(\Delta)$ ならば,

$$h(z)=\left(1-\frac{f(z)}{w}\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2w}z+\cdots,\ h(0)=0,\ |h(z)|^2\leq 1+\frac{M}{|w|.}$$

Δ 上の正則関数 $h(z)=a_0+a_1z+\cdots$ について, 次の等式が成り立つ.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|h(re^{i\theta})|^2\,d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}, r<1.$$

したがって, $1+\dfrac{r^2}{4|w|^2}\leq 1+\dfrac{M}{|w|}$, つまり $|w|\geq\dfrac{r^2}{4M}$. $r\to 1$ とすればよい. □

定理 1.3 (Bloch の定理 (1925)) 単位円板 $\Delta=\{|z|<1\}$ 上の正則関数 f が $f'(0)=1$ を満たすとする. そのとき, 像 $f(\Delta)$ は半径 L の円板を含む. L は絶対定数である. (正しくは Landau の主張である. Bloch の定理の正確な主張は, 定理 1.19 を参照.)

したがって, もし f が $\Delta(a,R)$ 上で正則であれば, 像 $f(\Delta(a,R))$ は半径 $|f'(a)|RL$ の円板を含む.

証明 f は Δ の閉包の近傍上で定義されているとして構わない. もしそうでなければ, $f(rz)/r$ を考えればよい. 次の関数 $\omega(t)$ $(0 \le t \le 1)$ を考える.

$$\omega(t) = t \sup_{|z| \le 1-t} |f'(z)|.$$

$\omega(t)$ は連続で, $\omega(0) = 0, \omega(1) = 1$. $t_0 = \inf\{t \mid \omega(t) = 1\}$ とする. $t_0 > 0$ で, $t < t_0$ ならば $\omega(t) < 1$ である. a を $|a| \le 1 - t_0$, $|f'(a)| = 1/t_0$ となるようにとる. このとき, $\Delta(a, t_0/2) \subset \Delta(0, 1 - t_0/2)$, $\displaystyle\sup_{|z| \le 1 - t_0/2} |f'| < \omega(t_0/2)/(t_0/2) < 1/(t_0/2) = 2/t_0$ より, $|f'(z)| \le 2/t_0$ $(z \in \Delta(a, t_0/2))$. ここで

$$g(z) = f(z) - f(a) = \int_a^z f'(s)ds$$

は $\Delta(a, t_0/2)$ 上正則で, $|g'(a)| = 1/t_0$, $|g(z)| \le t_0/2 \cdot 2/t_0 = 1$. したがって, 命題 1.2 より $g(\Delta(a, t_0/2))$ は円板 $\Delta(0, 1/16)$ を含む, つまり $f(\Delta)$ は円板 $\Delta(f(a), 1/16)$ を含む. □

定理 1.3 から Picard の小定理を導くことができるが, それは次節で与える. 一方 Picard の大定理を示すためには, Schottky の定理が必要になる. Schottky の定理を示すために, まず補題を与える.

補題 1.4　次の性質が成り立つ.

(1) $\cos \pi a = \cos \pi b$ ならば, $b = \pm a + 2n$, $n \in \mathbb{Z}$.

(2) 任意の $w \in \mathbb{C}$ に対して, 次のような $v \in \mathbb{C}$ が存在する.

$$\cos \pi v = w, \ |v| \le 1 + |w|.$$

(3) 単連結領域 U 上の正則関数 f が $1, -1$ をとらないとする. そのとき, 次のような U 上の正則関数 F が存在する.

$$f = \cos F.$$

証明 (1) は明らか. (2) を示す. w に対して, (1) より次のような v がとれる.
$w = \cos \pi v$, $v = \alpha + i\beta$, $|\alpha| \le 1$. ここで, $|w|^2 = \cos^2 \pi\alpha + \sinh^2 \pi\beta$, $\sinh^2 \pi\beta \ge \pi^2\beta^2$ より

$$|v| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \le \sqrt{1 + |w|^2/\pi^2} \le 1 + |w|.$$

(3) $1 - f^2$ は 0 をとらないので, U 上の正則関数 g で $g = \sqrt{1 - f^2}$ となる分枝を選ぶ. $(f + ig)(f - ig) = f^2 + g^2 = 1$ より, $f + ig$ は 0 をとらない. よって, U 上の正則関数 F で $f + ig = e^{iF}$ となる分枝がとれる. $f - ig = e^{-iF}$ であるから, $f = \frac{1}{2}\{f + ig) + (f - ig)\} = \cos F$. □

補題 1.5 単連結領域 U 上の正則関数 f が $0, 1$ をとらないとする. そのとき, 次の条件を満たすような U 上の正則関数 g が存在する.

$$f(z) = \frac{1}{2}[1 + \cos\pi(\cos\pi g(z))],\ z \in U, \quad |g(0)| \le 3 + 2|f(0)|. \tag{1.1}$$

(1.1) を満たす g は次の集合 E の値をとらない.

$$E = \left\{ m \pm \frac{i}{\pi}\log(n + \sqrt{n^2 - 1}) \;\middle|\; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{1.2}$$

さらに, $g(U)$ は半径 1 の円板を含まない.

証明 $2f - 1$ は ± 1 をとらない. 補題 1.4 (3) より $2f - 1 = \cos\pi\tilde{F}$ を得る. ここで補題 1.4 (2) より $2f(0) - 1 = \cos\pi b, |b| \le 1 + |2f(0) - 1| \le 2 + 2|f(0)|$ となる b がとれる. $\therefore b = \pm\tilde{F}(0) + 2k\ (k \in \mathbb{Z})$. よって, $F := \pm\tilde{F} + 2k$ とおけば, $2f - 1 = \cos\pi F,\ |F(0)| \le 2 + 2|f(0)|$. F は整数値をとらないので, 再び補題 1.4 (3) より $F = \cos\pi\tilde{g}$. ここで補題 1.4 (2) より, $\cos\pi a = F(0),\ |a| \le 1 + |F(0)| \le 3 + 2|f(0)|$ となる a がとれる. $\therefore a = \pm\tilde{g}(0) + 2m\ (m \in \mathbb{Z})$. よって, $g := \pm\tilde{g} + 2m$ とおけば, $F = \cos\pi g,\ |g(0)| \le 3 + 2|f(0)|$. つまり, この g が性質 (1.1) を満たす.

次に, ある $a \in U$ で $g(a) \in E$ となったとする. つまりある整数 p と自然数 q があって, $g(a) = p \pm (i/\pi)\log(q + \sqrt{q^2 - 1})$. このとき簡単な計算で, $\cos(\pi g(a)) = (-1)^p q$. したがって, $\cos\pi[\cos(\pi g(a))] = \pm 1$ となり, $2f - 1$ が ± 1 をとらないことに矛盾. $g(U) \cap E = \phi$ である.

集合 E の点は長方形の頂点をなす. 任意の長方形の幅は 1 である. 長方形の高さは 1 より小さいことが, 次のようにわかる.

$$\begin{aligned} \log(n + 1 + \sqrt{(n+1)^2 - 1}) - \log(n + \sqrt{n^2 - 1}) &= \log\frac{1 + \frac{1}{n} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \\ &\le \log\left(1 + \frac{1}{n} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}\right) \le \log(2 + \sqrt{3}) < \pi. \end{aligned}$$

したがって, $g(U)$ はいかなる半径 1 の円板も含まない. □

定理 1.6 (Schottky の定理 (1904)) $\alpha, r > 0$ のみに依存する正定数 $M(\alpha, r)$ が存在して, 次の不等式が成り立つ.
Δ 上の正則関数 f が $0, 1$ をとらず, $|f(0)| \le \alpha$ を満たすならば,

$$|f(z)| \le M(\alpha, r),\ |z| \le r < 1.$$

証明 f に対し, 補題 1.5 (1.1) を満たす関数 g をとる.

$|z| = r < 1$ とする．今 $g'(z) \neq 0$ とする．関数

$$\phi(\zeta) = \frac{g(z+(1-r)\zeta)}{(1-r)g'(z)}$$

は単位円板上で正則で，$\phi'(0) = 1$ である．定理 1.3 (Bloch の定理) より，像 $\phi(\Delta)$ は半径 L の円板を含む．よって，$g(\Delta)$ は半径が $(1-r)|g'(z)|L$ の円板を含む．しかし，補題 1.5 により g は集合 E に値をとらないので，

$$(1-r)|g'(z)|L \leq 1, \text{ つまり } \quad |g'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)L}. \tag{1.3}$$

ここで，(1.3) は $g'(z) = 0$ の場合にも成り立つことに注意する．等式

$$g(z) = g(0) + \int_0^z g'(s)\, ds$$

より，$|z| \leq r < 1$ に対して次の評価式を得る．

$$|g(z)| \leq |g(0)| + \frac{|z|}{(1-r)L} \leq 3 + 2|f(0)| + \frac{r}{(1-r)L} \leq 3 + 2\alpha + \frac{r}{(1-r)L}. \tag{1.4}$$

ここで，$C(\alpha, r) := 3 + 2\alpha + \dfrac{r}{(1-r)L}$ とおく．

したがって，(1.4) から $|z| \leq r < 1$ に対して次を得る．

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \frac{1}{2}|1 + \cos\pi(\cos\pi g(z))| \\
&\leq \exp(\pi|\cos(\pi g(z))|) \\
&\leq \exp(\pi e^{\pi|g(z)|}) \leq \exp(\pi e^{\pi C(\alpha,r)}) := M(\alpha, r).
\end{aligned}$$

最後の定数を $M(\alpha, r)$ とおいた．ここで，$|\cos w| \leq e^{|w|}$，$\frac{1}{2}|1 + \cos w| \leq e^{|w|}$ を用いた．□

1.2 Picard の定理

定理 1.3 (Bloch の定理) と 補題 1.5 を用いて，まず Picard の小定理を証明する．これは言うまでもなく，Liouville の定理を大きく一般化したものである．

定理 1.7 (Picard の小定理 (1879)) 整関数 f(複素平面全体で正則な関数) がとらない値が 2 個以上あれば，f は定数である．

証明 異なる $a, b \in \mathbb{C}$ が存在して，$f(z) \neq a, b$ $(z \in \mathbb{C})$ とする．$(f(z) - a)(b-a)^{-1}$ は $0, 1$ をとらない．よって，はじめから $f(z) \neq, 0, 1$ $(z \in \mathbb{C})$ としてよい．このとき，補題 1.5 より整関数 g で，$g(\mathbb{C})$ が半径 1 の円板を含まないものが存在する．また，f は定数でないならば，この g も定数でない．したがって，$g'(z_0) \neq 0$ となる点 z_0 が存在する．必要ならば $g(z + z_0)$ を考えることによって，はじめから $g'(0) \neq 0$ として構わない．定理 1.3 より，$g(\Delta(0, R))$ は

半径 $|g'(0)|RL$ の円板を含む．よって, 十分 R を大きく選べば, $g(\mathbb{C})$ が半径 1 の円板を含むことになり, 矛盾する． $\square$

注 1.8　整関数のとらない値の数については, 次のような簡単な例がある．

(1)　$f(z) = z$ は整関数として定義され, とらない値は 0 個である．
(2)　指数関数 $g(z) = e^z$ は整関数として定義され, とらない値は 0 ただ 1 個である．

定理 1.6 (Schottky の定理) からも, Picard の小定理の別証明が得られる．

定理 1.9　(Picard の小定理 (Landau の別証明 1904))

証明 整関数 f は $0, 1$ をとらないとする．$R > 0$ を任意に取り, $g(w) = f(Rw),\ |w| < 1$ を考える．g は $0, 1$ を取らないので, 定理 1.6 (Schottky の定理) より

$$|g(w)| \leq M(|g(0)|, 1/2),\ |w| \leq 1/2,$$

つまり

$$|f(z)| \leq M(|f(0)|, 1/2),\ |z| \leq R/2.$$

$R > 0$ は任意だから, Liouville の定理より, f は定数． $\square$

定理 1.6 (Schottky の定理) を用いて, Picard の大定理を証明する．これは定理 1.1 (Casorati-Weierstrass の定理) を大幅に一般化したものである．

定理 1.10　(Picard の大定理 (1879))　 f は点 a の穴あき近傍 $\Delta^*(a, r) = \{0 < |z-a| < r\}$ 上正則で, とらない値が 2 個以上あるとする．そのとき, 点 a は除去可能特異点かまたは極である．

証明 f の代わりに $g(z) = f(1/(z-a))$ を考えることなどにより, はじめから f は $|z| > 1/2$ で正則で $0, 1$ をとらないとして構わない．そのとき, f は有界, または無限遠点で極をもつことを示す．もしそうでないとする．定理 1.1 より, 任意の $R > 0$ について, $f(\{|z| > R\})$ が $\mathbb{C}$ 上で稠密になる．したがって, 点列 $\lambda_n (\in \mathbb{C}) \to \infty$ で, $|f(\lambda_n)| \leq 1$ となるものがとれる．今 $f_n(z) := f(\lambda_n z)\ (n = 1, 2, \ldots)$ とおく．このとき, f_n は $|z| > 1/2$ で正則で, $|f_n(1)| \leq 1$．したがって, 定理 1.6 (Schottky の定理) より, 正定数 C が存在して次を得る．

$$|f_n(z)| \leq C,\ z \in \Delta(1, 1/4),\ n = 1, 2, \ldots.$$

ここで, $\alpha \in \partial\Delta \cap \Delta(1, 1/4)$ に対して同様の議論を繰り返すことが出来て, 正定数 C' が存在して次を得る．

$$|f_n(z)| \leq C',\ z \in \Delta(\alpha, 1/4),\ n = 1, 2, \ldots.$$

有限回の操作を繰り返して, 単位円周上のすべての点を覆いつくすことができ, 正定数 K が存在して次を得る.

$$|f_n(z)| \leq K,\ z \in \partial\Delta,\ n = 1, 2, \ldots.$$

つまり, $|f(z)| \leq K,\ |z| = |\lambda_n|$. 最大値の原理より

$$|f(z)| \leq \max\{K, \sup_{\partial\Delta} |f|\},\ 1 \leq |z| \leq |\lambda_n|.$$

したがって, f は $1 \leq |z|$ で有界になるが, これは矛盾である. □

次のような言い換えもよく用いられる.

系 1.11 (Picard の大定理) f は点 a の穴あき近傍 $\Delta^*(a, r) = \{0 < |z - a| < r\}$ 上正則で, 点 a で真性特異点をもつとする. そのとき, 点 a の各近傍で高々 1 つの値を除き, すべての複素数を f が無限回とる.

証明 結論を否定する. ある $r_0 > 0$ が存在して, f が $\Delta^*(a, r_0)$ 上で有限回しかとらない値が 2 個あるとする. そのとき, さらに十分小さい $0 < r_1 < r_0$ をとれば, f は $\Delta^*(a, r_1)$ で 2 個以上とらない値がある. すると定理 1.10 より点 a は除去可能な特異点または極となり, 矛盾が生じる. □

注 1.12 (Picard の大定理から小定理) Picard の大定理から Picard の小定理は直接従う.

証明 f は非定数整関数で 2 個とらない値があるとする. 原点におけるテイラー展開を考える.

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots.$$

関数 $g(z) = f(1/z)$ は $0 < |z| < 1$ で正則で, 2 個以上とらない値がある. 定理 1.10 より, 0 は g の除去可能特異点または極であるから, f は高々有限次の多項式になる. しかし, 代数学の基本定理より, 非定数多項式 f はすべての複素数の値をとるので, 矛盾が生じる. □

有理型関数の場合の Picard の定理は, 次のように述べられる.

定理 1.13 (有理型関数の Picard の定理)

(1) $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 f がとらない値が $\widehat{\mathbb{C}}$ に 3 個以上あれば, f は定数である.
(2) f が点 a の穴あき近傍 $\Delta^*(a, r) = \{0 < |z - a| < r\}$ 上の有理型関数で, とらない値が $\widehat{\mathbb{C}}$に 3 個以上あるとする. そのとき, 点 a は除去可能特異点かまたは極である.

証明 いずれの主張においても, とらない値が複素数 γ であるとき, f の代わりに $1/(f - \gamma)$ を考えれば, 正則関数の場合の Picard の定理に帰着する. □

補足 1.14　ここでは, 主に文献 [1], [9], [24] を参考にした. [16], [30] もほぼ同様の証明を与えている. Picard による Picard の小定理の最初の証明は, 楕円モジュラー関数を用いていた. その証明については, [4], [23] を参照するとよい. 双曲計量を用いる証明も簡明である. [12], [22], [23], [27] に詳しく解説されているが, 次節でも解説する. [12], [23] には, 値分布論を用いた Picard の小定理の証明も解説されている. 正規族の Montel の理論を用いた証明も興味深い. それについては, [25] を参照するとよいが, 2 章でも解説する. Bloch は実際は定理 1.3 より精密な結果 (単射円板の半径評価) まで与えている. (定理 1.19, [26] 6.12 Theorem 参照.) 定理 1.3 の定数 L は Landau 定数とよばれる. [8], [24] は Picard の定理の歴史について詳しい. これらには Bloch 定数や Landau 定数についての解説もある. 重要な補題 1.5 は [24] で紹介されたものであるが, これは 1957 年に H. König が与えた. また, 1904 年 Landau は Schottky の定理から Picard の小定理を直接導くことに成功したことも注意する ([16] 定理 37.3, [24] p.238, [28] 8.86).

1.3　双曲計量と Ahlfors-Schwarz の補題

領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上定義された Riemann 計量が

$$ds^2 = \rho^2(dx^2 + dy^2),\ z = x + iy \in D \tag{1.5}$$

で与えられたとき, これは Euclid 計量と等角同値である. このとき

$$K(\rho) = -\rho^{-2}\Delta \log \rho,\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},\ z = x + iy \in D \tag{1.6}$$

は **Gauss 曲率**とよばれる. Gauss 曲率 K は等角不変量であることが知られている. ([3])
単位円板 Δ 上の Riemann 計量 $ds = \dfrac{2}{1-|z|^2}|dz|$ の Gauss 曲率 K は定数 -1 になる. この計量を単位円板の**双曲計量**とよび, 以後 $\lambda|dz|$ とかき表す.

次の定理は証明は易しいが, 応用上非常に重要である.

補題 1.15　(Ahlfors (1938)) 単位円板 Δ 上の Riemann 計量 $\rho|dz|$ が $K(\rho) \le -1$ を満たすならば, $\lambda(z) \ge \rho(z),\ z \in \Delta$ である.

証明 最初に ρ が閉円板上へ正値で連続に拡張できる場合を考える. そのとき, $\Delta(\log\lambda - \log\rho) \le \lambda^2 - \rho^2$ を得る. 関数 $\log\lambda - \log\rho$ は $|z| \to 1$ のとき $+\infty$ に発散するから, 単位円板内で最小値をとる. その点で $\Delta(\log\lambda - \log\rho) > 0$ だから, $\lambda^2 \ge \rho^2$ が成り立つ. したがって, 単位円板全体で $\lambda \ge \rho$ が成り立つ. 一般の場合, $\rho(z)$ を $r\rho(rz)$ $(0 < r < 1)$ に置き換える. この計量は同じ曲率をもち, 境界上の滑らかさの条件を満たすので, $\lambda(z) \ge r\rho(rz)$. $r \to 1$ とすれば結論を得る. □

定義 1.16　(Ultra 双曲計量) 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上で定義された計量 $\rho|dz|,\ \rho \ge 0$ が次の条件を満たすとき, Ω 上で **Ultra 双曲的**という.

(i) ρ は上半連続である.

(ii) $\rho(z_0) > 0$ となる点 $z_0 \in \Omega$ に対して, z_0 の近傍 V が存在して, V 上の C^2 級の**支持計量** ρ_0 が存在して, V 上で $\Delta \log \rho_0 \geq \rho_0^2$, $\rho \geq \rho_0$ を満たし, $\rho(z_0) = \rho_0(z_0)$.

Ultra 双曲計量に対して, 補題 1.15 は容易に一般化される.

系 1.17 (Ahlfors (1938)) 単位円板 Δ 上の Ultra 双曲計量 $\rho|dz|$ に対して, $\lambda(z) \geq \rho(z)$, $z \in \Delta$ である.

証明 $\log \lambda - \log \rho$ は下半連続であるから, Δ 上の最小値性は, 補題 1.15 の証明と同様に保証される. さらに, $\log \lambda - \log \rho$ が最小値をとる点 $p \in \Delta$ で, $\log \lambda - \log \rho_0$ もまた極小値をとることが容易にわかる. ここで, ρ_0 は点 p における ρ の支持計量である. よって, 補題 1.15 の証明と同様の議論を適用すると, $\lambda(p) \geq \rho_0(p) = \rho(p)$ が従い, したがって主張が導かれる. □

これらの準備のもと, Schwarz-Pick の定理の次のような一般化が得られる.

定理 1.18 (Ahlfors-Schwarz の補題 (1938)) 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ は Ultra 双曲計量 $\rho|dw|$ が与えられたとする. 単位円板 Δ から Ω への正則関数 $w = f(z)$ について, 次の不等式が成り立つ.

$$\rho(f(z))|f'(z)| \leq \frac{2}{1 - |z|^2}, \ z \in \Delta.$$

証明 $\rho(f(z))|f'(z)||dz|$ が Δ 上で Ultra 双曲計量であることを確認すれば, 系 1.17 より結論が従う. $\rho(w_0) > 0$ となる点 $w_0 = f(z_0)$ における ρ の支持計量を ρ_0 とする. 簡単な計算で

$$\Delta \log \left[\rho_0(f(z))|f'(z)|\right] = \Delta \log \rho_0(f(z)) = \Delta_w \log \rho_0(f(z)) \cdot |f'(z)|^2 \geq \rho_0^2(f(z))|f'(z)|^2$$

となり, $\rho_0(f(z))|f'(z)||dz|$ が z_0 における支持計量になることがわかる. したがって, $\rho(f(z))|f'(z)||dz|$ が Δ 上で Ultra 双曲計量であるから, 主張が従う. □

定理 1.3 の別証明が得られる.

定理 1.19 (Bloch の定理の別証明 (Ahlfors (1938))) 単位円板 Δ 上の正則関数 f が $f'(0) = 1$ を満たすとする. そのとき, 部分領域 $D \subset \Delta$ が存在し, f は D 上単射で $f(D)$ は半径 B の円板を含む. $B \geq \frac{\sqrt{3}}{4}$ である.

証明 $f'(z_0) = 0$ となる点 $z_0 \in \Delta$ の像 $w_0 = f(z_0) \in f(\Delta)$ を分岐点とよぶ. $w \in f(\Delta)$ を中心とする分岐点を含まない最大の円板を不分岐円板とよび, その半径を $R(w)$ で表す. ただし, w が分岐点のときは $R(w) = 0$ とする. $f(\Delta)$ 上の計量 $\tilde{\rho}|dw|$ を

$$\tilde{\rho}(w) = \frac{A}{R(w)^{\frac{1}{2}}(A^2 - R(w))}$$

と定める. ただし, 正定数 A は後で選ぶ. これから Δ 上の計量

$$\rho(z)|dz| = \tilde{\rho}(f(z))|f'(z)||dz| = f^*(\tilde{\rho}(w)|dw|) \tag{1.7}$$

が定まるが, $A > 0$ を適切に選べば ρ が Δ 上 Ultra 双曲的になることを示す.

分岐点 $w_0 = f(z_0)$ の重複度を n とする. (つまり, $w - w_0 = a_n(z - z_0)^n + \cdots$, $a_n \neq 0$.) w_0 に十分近い w について, $R(w) = |w - w_0|$ であることに注意する. そのとき, z_0 の近傍で (1.7) は次のようになる.

$$\rho(z)|dz| = \left(A^{-1}n|a_n^{\frac{1}{2}}||z - z_0|^{\frac{n}{2}-1} + \cdots\right)|dz|. \tag{1.8}$$

$n > 2$ のとき, (1.8) より $\rho(z_0) = 0$ となるので, 支持計量を探す必要はない. $n = 2$ のときは, (1.7) より ρ は可微分で $\Delta \log \rho = \rho^2$ を満たすことが直接わかり, ρ 自身が支持計量になる.

次に, 分岐点でない点 $w_0 = f(z_0)$ $(f'(z_0) \neq 0)$ で支持計量を見つける. 円板 $D(w_0) = \{w : |w - w_0| < R(w_0)\}$ を考え, その逆像の連結成分で z_0 を含むものを $\Delta(z_0)$ とおく. $D(w_0)$ の最大性より, $\Delta(z_0)$ の境界は $f'(a) = 0$ を満たす $a \in \Delta$ を含むか, Δ の境界の点を含む. 最初の場合, $D(w_0)$ の境界は分岐点 $b = f(a)$ を含む. 後者の場合, $f(a)$ は定義されないが, f の代わりに $f(rz)$ を考えておけば, 初めから f は単位閉円板まで連続に定義されていると考えてよく, そう仮定しておけば $b = f(a)$ は $D(w_0)$ の境界点とみなせる.

$\Delta(z_0)$ の点 z_1 をとり, $w_1 = f(z_1) \in D(w_0)$ とおく. $R(w_1) \leq |w_1 - b|$ は明らか. ここで ρ を $z = z_0$ の近くで次の計量 ρ_0 と比較する.

$$\rho_0(z) = \frac{A|f'(z)|}{|f(z) - b|^{\frac{1}{2}}(A^2 - |f(z) - b|)}.$$

ρ_0 が曲率 -1 をもつことが直接計算でわかり, $\rho_0(z_0) = \rho(z_0)$ が成り立つ. また, $z = z_0$ の近くで $\rho \geq \rho_o$ となるためには, 関数 $t^{\frac{1}{2}}(A^2 - t)$ が $0 \leq t \leq R(w_0)$ の範囲で増加関数であればよい. ($R(w_1) \leq |w_1 - b|$ だからである.) この関数の微分係数は $t = A^2/3$ で正から負に符号を変えるので, $A^2 \geq 3B_f$ となるように A を選べばよい. (ここで, B_f は f の単射円板の半径である.)

したがって, ρ の Ultra 双曲性が示せたので, $z = 0$ で系 1.17 を用いると, 次を得る.

$$A \leq 2R(f(0))^{\frac{1}{2}}\{A^2 - R(f(0))\} \leq 2B_f^{\frac{1}{2}}(A^2 - B_f). \tag{1.9}$$

求める不等式 $B_f \geq \frac{\sqrt{3}}{4}$ は, (1.9) において A を $(3B_f)^{\frac{1}{2}}$ に近づけることによって得られる. □

次の定理の存在性の証明は省略するが, [3] 10 章で証明が与えられている.

定理 1.20 (一意化定理 (Koebe (1907), Poincaré (1907))) 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ の補集合が 2 点以上含めば, Ω はただ一つの最大 Ultra 双曲計量をもち, それは定曲率 -1 をもつ. この最大計量を Ω の **Poincaré 計量**とよび, 以後 λ_Ω と表す.

定理 1.20 から, 次の補題が容易に示せる.

補題 1.21 (比較定理) 領域 $\Omega \subset \Omega' \subset \mathbb{C}$ で, Ω' の補集合は 2 点以上あるとする. そのとき $\lambda_{\Omega'}|_\Omega \leq \lambda_\Omega$ が成り立つ.

証明 $\lambda_{\Omega'}|_{\Omega}$ が Ω 上で Ultra 双曲計量であるから, 明らかである. □

次に Poincaré 計量を用いて Schottky の定理の別証明を与えるが, そのために少し準備が必要である. 異なる 2 点 $a, b \in \mathbb{C}$ に対して, $\Omega_{a,b} = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ とおく. $\Omega_{a,b}$ の Poincaré 計量を, $\lambda_{a,b}(z)|dz|$ とかき表す. また, 次の 3 つの閉領域を考える.

$$\Omega_1 = \{|z| \le 1,\ |z| \le |z-1|\},\ \Omega_2 = \{|z-1| \le 1,\ |z| \ge |z-1|\},\ \Omega_3 = \{|z| \ge 1,\ |z-1| \ge 1\}.$$

穴あき単位円板 $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$ の Poincaré 計量は $\lambda_{\Delta^*}(z)|dz| = \dfrac{|dz|}{|z|\log(1/|z|)}$ であり, $\Delta^* \subset \Omega_{0,1}$ より補題 1.21 から次の不等式を得る.

$$\lambda_{0,1}(z) \le \left(|z| \log \frac{1}{|z|}\right)^{-1},\ 0 < |z| < 1. \tag{1.10}$$

関数 $\zeta(z)$ は $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$ を単位円板 Δ に写し, $\zeta(0) = 0,\ \zeta(\bar{z}) = \overline{\zeta(z)}$ を満たすとする.

命題 1.22 $z \in \Omega_1$ のとき, 次が成り立つ.

$$\lambda_{0,1}(z) \ge \left|\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right| (4 - \log|\zeta(z)|)^{-1}. \tag{1.11}$$

$z \to 0$ のとき, (1.10) と (1.11) とより, 次を得る.

$$\log \lambda_{0,1}(z) = -\log|z| - \log\log \frac{1}{|z|} + O(1). \tag{1.12}$$

証明 計量

$$\rho(z) = \left|\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right| (4 - \log|\zeta(z)|)^{-1} \tag{1.13}$$

は曲率 -1 をもつ. なぜなら, これは $\{0 < |\zeta| < e^4\}$ 上の Poincaré 計量の引き戻しだからである. (1.13) の式を Ω_1 だけで用い, ρ を Ω_2, Ω_3 上へ $\rho(1-z) = \rho(z), \rho(\frac{1}{z}) = |z|^2\rho(z)$ により拡張すると (それも ρ とかく), それは連続である. ρ の Ultra 双曲性を示すためには, $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ を分離する線上で ρ が支持計量をもつことを示す必要がある. 対称性から, Ω_1 と Ω_2 が接する線分上で示せば十分である. Ω_1 と Ω_2 で (1.13) で与えられる元の ρ について, 線分上で $\frac{\partial \rho}{\partial x} < 0$ が示せれば, 元の ρ が支持計量になることがわかる.

$$\zeta(z) = \frac{\sqrt{1-z} - 1}{\sqrt{1-z} + 1},\ \mathrm{Re}\sqrt{1-z} > 0. \tag{1.14}$$

である. ここで

$$\frac{\partial \log \rho}{\partial x} = \mathrm{Re}\left(\frac{d}{dz} \log \frac{\zeta'}{\zeta}\right) + \mathrm{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(4 - \log|\zeta|)^{-1}$$

に, 次の 2 式を代入する.

$$\frac{\zeta'}{\zeta} = \frac{1}{z\sqrt{1-z}}, \quad \frac{d}{dz} \log \frac{\zeta'}{\zeta} = \frac{3z - 2}{2z(1-z)}.$$

その線上で $1-z=\bar{z}$ だから, 次の式を得る.

$$\frac{\partial \log \rho}{\partial x} = -\frac{1}{4|z|^2} + \frac{\mathrm{Re}\sqrt{z}}{|z|^4}(4-\log|\zeta|)^{-1}.$$

$|\zeta|<1, \mathrm{Re}\sqrt{z}<1$ より, この値は負である. したがって, 定理 1.18 より (1.11) を得る. また, (1.10), (1.11) より, すぐに (1.12) がわかる. □

ようやく, Schottky の定理の別証明を与える準備が出来た.

定理 1.23 (精密化された Schottky の定理 (Ahlfors (1938))) 単位円板 Δ 上の正則関数 f が $0,1$ を値にとらないとする. そのとき, 次の不等式が成り立つ.

$$\log|f(z)| \le (7+\log^+|f(0)|)\frac{1+|z|}{1-|z|},\ |z|<1. \tag{1.15}$$

ここで, $\log^+|f(0)| = \max\{\log|f(0)|, 0\}$ である.

証明 f も $1/f$ も同じ条件を満たすので, $\log|f|$ の上下の評価は同等であるが, 今は下からの評価の方がより易しい. f は Δ を $\Omega_{0,1}$ へ写すので, 定理 1.18 より

$$\lambda_{0,1}(f(z))|f'(z)| \le \frac{2}{1-|z|^2},\ |z|<1.$$

今 0 と z を結ぶ線分の f による像がすべて Ω_1 に含まれると仮定し, 上の不等式をその積分路に沿って積分すると, 次を得る.

$$\int_{f(0)}^{f(z)} \lambda_{0,1}(w)\ |dw| \le \log\frac{1+|z|}{1-|z|}. \tag{1.16}$$

ここで (1.11) を用いると, 次が得られる.

$$\int_{f(0)}^{f(z)} (4-\log|\zeta(w)|)^{-1}\ |d\log\zeta(w)| \le \log\frac{1+|z|}{1-|z|}. \tag{1.17}$$

$|d\log\zeta| \ge -d\log|\zeta|$ を用いると, これより次がわかる.

$$\frac{4-\log|\zeta(f(z))|}{4-\log|\zeta(f(0))|} \le \frac{1+|z|}{1-|z|}. \tag{1.18}$$

簡単な計算により $(1+\sqrt{2})^{-2}|w| \le |\zeta(w)| \le |w|$ を得るが, これを用いると $\log(1+\sqrt{2})<1$ とより, (1.18) から次を得る.

$$-\log|f(z)| < (6-\log|f(0)|)\frac{1+|z|}{1-|z|}. \tag{1.19}$$

ここで, (1.16) における積分路が Ω_1 に含まれるという条件をはずす. $f(z)\in\Omega_1$ であれば, (1.17) の積分路を, 積分路が Ω_1 の境界線と交わる最後の点 w_0 から始まるものに置き換えても成立する. $|w_0|\ge 1/2$ だから (1.19) の代わりに次を得る.

$$-\log|f(z)| < (6+\log 2)\frac{1+|z|}{1-|z|}. \tag{1.20}$$

この不等式が $f(z) \notin \Omega_1$ のときに成り立つことも明らかである．不等式 (1.19), (1.20) を合わせると次を得る．

$$-\log|f(z)| < \left(6 + \log 2 + \log^+ \frac{1}{|f(0)|}\right) \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

(1.15) は, 上の不等式で f を $1/f$ に置き換えて得られる式より弱いので, 主張を示せた．
□

この節の最後に, Poincaré 計量を用いた Picard の大定理の別証明を与える．

定理 1.24 (Picard の大定理の別証明 (Ahlfors (1973))) 穴あき円板 $0 < |z| < \delta$ 上の有理型関数 f が 3 つの値をとらないとすると, f は円板全体で有理型に拡張できる．

証明 $\delta = 1$ とし, f は $0, 1, \infty$ をとらないとして構わない．定理 1.18 より

$$\lambda_{0,1}(f(z))|f'(z)| \le \left(|z| \log \frac{1}{|z|}\right)^{-1}.$$

これを半径に沿って $z_0 = r_0 e^{i\theta}$ から $z = re^{i\theta}$ $(r < r_0 < 1)$ まで積分する．定理 1.23 の証明と同様にして, $f(z) \in \Omega_1$ ならば, 次を得る．

$$\log(4 - \log|f(z)|) \le \log\log \frac{1}{|z|} + A.$$

ここで, A は z に依存しない定数である．これは

$$-\log|f(z)| \le C \log \frac{1}{|z|} \quad (C \text{ は定数})$$

を意味し, $1|f|$ は $1/|z|$ の何乗かで押さえられるので, 原点は f の真性特異点ではない． □

補足 1.25 この節は, [2], [3] に従って解説した．Ultra 双曲計量は多変数関数論の場合にも一般化され, 目覚ましい成功を上げていることを注意する．

2　正規族

2.1　正規族, Montel の定理

$\mathcal{F}$ を領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の連続関数からなる関数族とする.

定義 2.1　(正規族) $\mathcal{F}$ が**正規族**であるとは, $\mathcal{F}$ に含まれる任意の関数列が, D 上で局所一様収束する部分列をもつ, または局所一様発散する部分列をもつときをいう. ここで局所一様収束とは, D の任意のコンパクト部分集合上で一様収束することである. 局所一様発散とは, D の任意のコンパクト部分集合上で ∞ に一様発散することである

関数族が正規族になる条件について述べるために, いくつかの定義を与える.

定義 2.2　領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の連続関数族 $\mathcal{F}$ を考える.

(1)　$\mathcal{F}$ が点 $a \in D$ で**同程度連続**であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ を適当にとれば

$$z \in D,\ |z-a| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon,\ \forall f \in \mathcal{F}$$

が成り立つことをいう.

(2)　$\mathcal{F}$ が D 上で**局所有界**であるとは, 任意の点 $a \in D$ に対して, 正定数 M と a の近傍 $\Delta(a,r)$ が存在して, $|f(z)| < M, \forall z \in \Delta(a,r),\ \forall f \in \mathcal{F}$ が成り立つことをいう.

(3)　$\mathcal{F}$ がある点 $z_0 \in D$ で**正規**であるとは, z_0 のある近傍で $\mathcal{F}$ が正規族になるときをいう.

局所有界性について, 次の言い換えは有用である.

補題 2.3　領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の連続関数族 $\mathcal{F}$ が局所有界である. $\Longleftrightarrow$
D の任意のコンパクト集合 K に対して, 正定数 $M = M(K)$ が存在して次が成り立つ.

$$|f(z)| < M, \forall z \in K,\ \forall f \in \mathcal{F}.$$

証明 十分性は明らか. 必要性についても, コンパクト性の性質を使えばすぐ示せる.　□

次の定理はよく知られている. 証明は例えば [9] Ch.VII, 1.23 を参照.

定理 2.4　(Arzelà-Ascoli の定理 (1895)) 領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の連続関数族 $\mathcal{F}$ が次の 2 条件を満たすならば, 正規族になる.

(i)　任意の点 $a \in D$ に対して, $\mathcal{F}$ が一様有界である, すなわち $\sup\{|f(a)| \mid f \in \mathcal{F}\} < \infty$.

(ii)　任意の点 $a \in D$ に対して, $\mathcal{F}$ が a で同程度連続である.

正則関数からなる関数族を正則関数族とよぶが, 重要な結果をここで述べる.

命題 2.5　(Montel (1916)) 正則関数族 $\mathcal{F}$ が領域 D で正規族である. $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ が D の任意の点で正規である.

証明 必要性は明らかだから, 十分性を示す. 可算稠密部分集合 $\{z_n = x_n + iy_n \in D : x_n, y_n \in \mathbb{Q}\}$ を選ぶ. $\Delta(z_n, r_n)$ を, z_n の開近傍で $\mathcal{F}$ が正規になるような最大の円板とする. もし $z_{n_k} \to \zeta \in D$ であれば, 十分大きなすべての k について, $\zeta \in \Delta(z_{n_k}, r_{n_k})$ となる. なぜならば, $r_{n_k} \to 0$ となるのは, $\zeta \in \partial D$ の場合だけだからである. よって, $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta(z_n, r_n)$. 任意の列 $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ に対して, 部分列 $\{f_{n_k}^{(1)}\}$ で $\Delta(z_1, r_1)$ の任意のコンパクト集合上正則関数, または ∞ に一様収束するものがある. 次に $\{f_{n_k}^{(1)}\}$ の部分列 $\{f_{n_k}^{(2)}\}$ で, $\Delta(z_1, r_1) \cup \Delta(z_2, r_2)$ の任意のコンパクト集合上で一様収束するものがある. このように続けていくと, 対角線列 $\{f_{n_k}^{(k)}\}$ はすべての $\Delta(z_n, r_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ の任意のコンパクト集合上で正則関数か ∞ に一様収束する. この分類により, D を 2 つの領域 D_0, D_∞ に分けることができて, $D_0 \cap D_\infty = \phi$, $D_0 \cup D_\infty = D$. D の連結性により, $D = D_0$ または $D = D_\infty$ である. K が D のコンパクト部分集合ならば, $\{\Delta(z_n, r_n)\}$ は K を覆う. また

$$\Delta(z_n, r_n) = \bigcup_{k=2}^{\infty} \Delta(z_n, (1 - 1/k)r_n)$$

であるから,

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=2}^{\infty} \Delta(z_n, (1 - 1/k)r_n).$$

その中から有限部分被覆を選べば結論を得る. □

定理 2.6 (Montel の定理 (1907)) 領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数族 $\mathcal{F}$ が局所有界ならば, 正規族である.

証明 $\mathcal{F}$ が局所有界とする. $\mathcal{F}$ が正規族であることを示すために, 定理 2.4 (Arzelà-Ascoli の定理) を用いる. 定理 2.4 の条件 (i) は明らかに満たしているので, あとは $\mathcal{F}$ が D の任意の点で同程度連続であることを示せばよい. 点 $a \in D$ と $\varepsilon > 0$ を固定する. 仮定から, 定数 $M > 0$ と $r > 0$ が存在して,

$$\overline{\Delta}(a, r) \subset D,\ |f(z)| \leq M, \forall z \in \overline{\Delta}(a, r),\ \forall f \in \mathcal{F}.$$

ここで, $|z - a| < \frac{1}{2}r,\ f \in \mathcal{F}$ とする. $\gamma(t) = a + re^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$ 上で Cauchy の積分公式を用いると

$$\begin{aligned} |f(z) - f(a)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(\zeta)(z - a)}{(\zeta - z)(\zeta - a)}\, d\zeta \right| \\ &\leq \frac{4M}{r} |z - a|. \end{aligned}$$

$\delta > 0$ を $\delta < \min\left\{\frac{r}{2},\ \frac{r}{4M}\varepsilon\right\}$ ととると,

$$|z - a| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon,\ \forall f \in \mathcal{F}.$$

□

2.2 Montel-Carathéodory の定理

ここでは Schottky の定理 (定理 1.6) を用いて, 拡張された Montel の定理, いわゆる Montel-Carathéodory の定理を示す.

定理 2.7 (Montel-Carathéodory の定理 (1912)) $\mathcal{F}$ は 2 個の異なる点 $a, b \in \mathbb{C}$ を値にとらない領域 D 上の正則関数からなる族とする. そのとき, $\mathcal{F}$ は D 上で正規族である.

証明 必要ならば族 $\hat{\mathcal{F}}$

$$\hat{\mathcal{F}} = \left\{ \hat{f}(z) = \frac{f(z) - a}{b - a}; f \in \mathcal{F} \right\}$$

を考えることにより, はじめから $a = 0, b = 1$ として構わない. 命題 2.5 より D の任意の点で正規であることを示せばよい. $z_0 \in D$ と円板 $\Delta(z_0, R)$ をとる. $\mathcal{F}$ を次のように 2 つの異なる族に分ける.

$$\mathcal{G} = \{f \in \mathcal{F} : |f(z_0)| \leq 1\}, \quad \mathcal{H} = \{f \in \mathcal{F} : |f(z_0)| > 1\}.$$

定理 1.6 (Schottky の定理) より z_0 のある近傍で $\mathcal{G}$ は一様有界である. 同様に, $\mathcal{H}' = \left\{ \frac{1}{f} : f \in \mathcal{H} \right\}$ も z_0 のある近傍で一様有界である. よって, 定理 2.6 (Montel の定理) より, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}'$ (したがって $\mathcal{H}$) はともに z_0 で正規であるから, $\mathcal{F}$ もそうである. □

注 2.8 (Montel-Carathéodory の定理から Schottky の定理) 定理 2.7 では Schottky の定理から Montel-Carathéodory の定理を導いたが, 逆も導ける.

証明 $\mathcal{S} = \{f\ \Delta\text{上の正則関数} : 0, 1 \notin f(\Delta), |f(0)| \leq \alpha.\}$ を考える. 定理 2.7 より $\mathcal{S}$ は正規族である. このとき, 0 を含む Δ の 任意の部分領域で局所有界であることを示す. もしそうでないとすると, 補題 2.3 より, ある近傍 $\overline{\Delta}(0, r) \subset \Delta$ $(0 < r < 1)$ が存在して, 各自然数 n に対して $f_n \in \mathcal{S}$, 点 $z_n \in \overline{\Delta}(0, r)$ が選べて $|f_n(z_n)| > n$. $\mathcal{S}$ は正規族だから, ある部分列 $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ が $\overline{\Delta}(0, r)$ 上ある正則関数 g に一様収束する. (条件 $|f(0)| < \alpha$ から, 一様発散することはありえない.) つまり, ある自然数 k_0 が存在して, 次がなりたつ.

$$k \geq k_0 \implies |f_{n_k}(z) - g(z)| < 1, \ \forall z \in \overline{\Delta}(0, r).$$

$C = \sup\limits_{z \in \overline{\Delta}(0,r)} |g(z)| < \infty$ とおく. すると

$$|f_{n_k}(z)| \leq |f_{n_k}(z) - g(z)| + |g(z)| < 1 + C, \ \forall z \in \overline{\Delta}(0, r), \ \forall k \geq k_0.$$

これは $|f_{n_k}(z_{n_k})| \to \infty$ $(k \to \infty)$ に矛盾する. したがって, 定数 $M(\alpha, r) > 0$ が存在して $|f(z)| \leq M(\alpha, r), \forall z \in \overline{\Delta}(0, r), \ \forall f \in \mathcal{S}$. □

注 2.8 の証明の局所有界性の証明と同様にして, 次の有用な系が示せる.

系 2.9 (Montel (1911)) 領域 D 上の正規族である正則関数族 $\mathcal{F}$ に対して, ある点 $z_0 \in D$ が存在して $\sup\{|f(z_0)| : f \in \mathcal{F}\} < \infty$ とする. そのとき, $\mathcal{F}$ は局所有界である.

すでに Picard の定理を Schottky の定理から導いた. Schottky の定理と同値な Montel-Carathéodory の定理からも Picard の定理が導けることが期待されるが, 実際そうであることを以下示していく.

定理 2.10　(Picard の小定理の正規族を用いた別証明 (Montel (1912)))

証明 f を整関数で, 異なる 2 点 $a, b \in \mathbb{C}$ をとらないとする.

$$f_n(z) = f(2^n z),\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

を考える. このとき, $f_n(\Delta(0,2)) = f(\Delta(0, 2^{n+1})),\ n = 0, 1, 2, \ldots$. 列 $\{f_n\}$ は円板 $\Delta(0,2)$ 上で a, b をとらない. よって, 定理 2.7 より $\{f_n\}$ は $\Delta(0,2)$ 上で正規族である. また, $f_n(0) = f(0),\ n = 0, 1, 2, \ldots$ だから系 2.9 より $\{f_n\}$ は $\overline{\Delta}(0,1) \subset \Delta(0,2)$ 上有界である. これより, f は $\mathbb{C}$ 上有界になるので, Liouville の定理より f は定数である. □

定理 2.11　(Picard の大定理の正規族を用いた別証明 (Montel (1912)))

証明 f は点 a の穴あき近傍 $\Delta^*(a, r) = \{0 < |z - a| < r\}$ 上正則で, とらない値が 2 個以上あるとする. $A = \{\frac{r}{2} < |z| < r\}$ 上の正則関数族

$$\mathcal{F} = \left\{ f_n(z) = f\left(\frac{z}{2^n}\right) : n = 1, 2, \ldots \right\}$$

を考える. $\mathcal{F}$ は A 上でとらない点が 2 点以上あるので, 定理 2.7 より正規族である. よって, コンパクト集合 $\{|z| = \rho\}$ $(\frac{r}{2} < \rho < r)$ 上で関数 g に一様収束する部分列 $\{f_{n_k}\}$ がある. ここで, g は正則関数, または ∞ である.

g が正則関数とする. g は $\{|z| = \rho\}$ 上有界だから, $\{f_{n_k}\}$ は $\{|z| = \rho\}$ 上一様有界である. つまり

$$|f_{n_k}(z)| \leq M,\ |z| = \rho, k = 1, 2, \ldots.$$

これは次を意味する.

$$|f(z)| \leq M,\ |z| = \rho/2^{n_k}, k = 1, 2, \ldots.$$

最大値の原理から, これらの円で囲まれるそれぞれの円環領域上で絶対値が M 以下であることがわかるので, 結局次がわかる.

$$|f(z)| \leq M,\ 0 < |z| < \rho/2^{n_1}.$$

これより 0 は除去可能な特異点である.

$g \equiv \infty$ とする. a を $\mathcal{F}$ がとらない値のひとつとすると, $\{\frac{1}{f_{n_k} - a}\}$ は A のコンパクト部分集合上 0 に収束する. 上の議論と同様にして, $h(z) = \frac{1}{f(z) - a}$ は $0 < |z| < \rho/2^{n_1}$ 上で有界であることがわかる. したがって, f は 0 で除去可能な特異点をもつか, 極をもつことがわかる. □

補足 2.12　ここでは主に [9], [25], [26] を参考にした．とくに [25] は正規族に関する専門書で, さらに進んだ内容について解説している．正規族の定義は, 文献によっては一様発散を含めない定義を採用しているものがあるため, 参照するときに注意が必要である．

2.3　有理型関数の正規族

有理型関数に対しては, リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の**球面距離** $\chi(z_1, z_2)$ を用いるのが便利である．

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z|^2}},\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad \chi(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}},\ z \in \mathbb{C}. \tag{2.1}$$

$\chi(z_1, z_2)$ が球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の距離になり, 次の有用な性質をもつことが容易にわかる．

$$\chi(z_1, z_2) = \chi\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right),\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad |z_1| \le |z_2| \Rightarrow \chi(0, z_1) \le \chi(0, z_2). \tag{2.2}$$

有理型関数の連続性を議論するために, 次の概念を導入する．

定義 2.13　f は $\mathbb{C}$ 上の関数, $\mathcal{F}$ は $D \subset \mathbb{C}$ 上の有理型関数の族とする．

(1)　f が $z_0 \in \mathbb{C}$ で**球面距離で連続**であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して次が成り立つときをいう．

$$|z - z_0| < \delta \Longrightarrow \chi(f(z), f(z_0)) < \varepsilon.$$

(2)　$\mathcal{F}$ が D 上で**球面距離で同程度連続**であるとは, 任意の点 $a \in D$ と $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在して次が成り立つことをいう．

$$|z - a| < \delta \Longrightarrow \chi(f(z), f(a)) < \varepsilon,\ \forall f \in \mathcal{F}.$$

定義 2.14　領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の有理型関数の族 $\mathcal{F}$ が D で**正規族**であるとは, $\mathcal{F}$ の任意の関数列が, D の各コンパクト部分集合上球面距離で一様収束する部分列をもつことをいう．

球面距離とユークリッド距離は $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合上で比較可能である．よって, $\{f_n\}$ が集合 S 上球面距離で一様に極限関数 $f \not\equiv \infty$ に収束したならば, f_n は f の極を除いた S の任意のコンパクト集合上で f に一様収束する．このことより, 正則関数に関しては 2 つの正規族の定義は一致することがわかる．

有理型関数の正規族で重要なことは, 有理型関数がある関数に球面距離で一様収束したときの結果である．

定理 2.15　領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の有理型 (正則) 関数の族 $\{f_n\}$ が, D の各コンパクト部分集合で球面距離で関数 f に一様収束する．$\Longleftrightarrow$ 任意の点 $z_0 \in D$ に対して, 閉円板 $\overline{\Delta}(z_0, r)$ が存在し, その上で $n \to \infty$ のとき

$$|f_n - f| \to 0 \text{ または } \left|\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}\right| \to 0$$

に一様収束する.

証明 $\chi(w_n, w) \leq |w_n - w|$, $\chi(w_n, w) \leq |\frac{1}{w_n} - \frac{1}{w}|$ であるから十分性は明らかである.

逆に, D のコンパクト集合上で $\chi(f_n, f) \to 0$ と仮定すると, f の点 z_0 における値によって 2 通りに場合分けされる.

(i) $f(z_0) \neq \infty$: f が z_0 の近くで球面距離で連続であることが容易にわかる. したがって, ある閉円板 $\overline{\Delta}(z_0, r)$ で関数 f は有界であり, $|f_n - f| \to 0$ は $\overline{\Delta}(z_0, r)$ 上で一様収束である.

(ii) $f(z_0) = \infty$: 再び閉円板 $\overline{\Delta}(z_0, r)$ が存在し, そこで $\frac{1}{f}$ は有界, かつ $\chi(\frac{1}{f_n}, \frac{1}{f}) \to 0$ は一様収束する. したがって, $\overline{\Delta}(z_0, r)$ 上で一様に $|\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}| \to 0$ となることが容易にわかる. さらに, $\frac{1}{f}$ は $\Delta(z_0, r)$ 上で正則である. □

有理型関数の正規族は, やはり同程度連続の概念と密接な関係にある.

定理 2.16 (Ostrowski (1926)) 領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上で定義された有理型関数の族 $\mathcal{F}$ が D 上正規である. $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ は D 上球面距離で同程度連続である.

証明 $\mathcal{F}$ が球面距離で同程度連続とする. そのとき結論は定理 2.6 (Montel の定理) の証明と同様の議論から従う. なぜならば, 証明の鍵は族の同程度連続性にあるからである. また, リーマン球は球面距離に関して有界であることにも注意する.

逆に, $\mathcal{F}$ は D 上の正規族で, 球面距離で同程度連続でないと仮定する. そのとき, 点 $z_0 \in D$ と $z_n \to z_0$ となる点列 $\{z_n\}$ in D と $\varepsilon > 0$ があり, ある関数列 $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ について,

$$\chi(f_n(z_n), f_n(z_0)) > \varepsilon \tag{2.3}$$

for $n = 1, 2, \ldots$ となる. $\mathcal{F}$ は正規族なので, 部分列 $\{f_{n_k}\}$ で D のコンパクト部分集合上球面距離で一様収束するものが選べる. 今コンパクト集合 $E = \{z_{n_k}\} \cup \{z_0\}$ をとる. そのとき $\{f_{n_k}\}$ が E 上で球面距離で同程度連続であることがわかるが, これは (2.3) に矛盾する. ([25] Prop. 1.6.2. 参照) □

球面距離について, ユークリッド距離に関するものと同様な微分が必要である. 領域 D 上の有理型関数 f と点 $z_0 \in D \subset \mathbb{C}$ について, **球面的微分** $f^{\#}(z_0)$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} f^{\#}(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{\chi(f(z), f(z_0))}{|z - z_0|} \\ &= \frac{|f'(z_0)|}{1 + |f(z_0)|^2}, \end{aligned}$$

f の極 z_0 については,

$$f^{\#}(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}.$$

$f^{\#}(z)$ は連続であり, $f^{\#} = \left(\frac{1}{f(z)}\right)^{\#}$ であることがわかる.

正則関数の正規族において, 鍵となる性質は関数が局所有界であることだった. 一方で, 有理型関数においては, その条件は球面的微分の局所有界性に置き換えられる.

定理 2.17　(Marty の定理 (1931)) 領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上定義された有理型関数の族 $\mathcal{F}$ が D 上正規である. $\Longleftrightarrow$ 各コンパクト集合 $K \subset D$ に対して, 正定数 $M = M(K)$ が存在し次が成り立つ.

$$f^{\#}(z) = \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \leq M, \quad \forall z \in K, \forall f \in \mathcal{F}.$$

証明 $f^{\#}(z)$ は各コンパクト集合上で一様有界であるとする. 点 $z_0 \in D$ と閉円板 $\overline{\Delta}(z_0, r) \subset D$ をとる. 任意の点 $z \in \overline{\Delta}(z_0, r)$ に対し, γ を z_0 と z 結ぶ D 内の線分とすると, 次の不等式を得る.

$$\chi(f(z_0), f(z)) \leq \int_\gamma f^{\#}(z)|d\zeta|.$$

したがって, 定数 $C = C(z_0) > 0$ があり, $\chi(f(z_0, f(z)) \leq C|z_0 - z|$, $\forall f \in \mathcal{F}$ が成り立つ. $\mathcal{F}$ は球面距離で同程度連続であるから, 定理 2.16 により D 上正規である.

逆に, $\mathcal{F}$ は正規であるが, $K \subset D$ と点列 $\{z_n\} \subset K$ と関数列 $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ が存在し, $f_n^{\#}(z_n) \to \infty$ $(n \to \infty)$ とする. $\mathcal{F}$ は正規だから, 部分列 $\{f_{n_k}\}$ で K 上球面距離で関数 f に一様収束するものが選べる. 定理 2.15 より, 各点 $z_0 \in K$ に対して, 閉円板 $\overline{\Delta}(z_0, r) \subset D$ が存在し, そこで $f_{n_k} \to f$ または $\frac{1}{f_{n_k}} \to \frac{1}{f}$ $(k \to \infty)$ と一様収束する.

最初の場合, f は $\overline{\Delta}(z_0, r)$ 上有界正則だから, k が十分大きければ f_{n_k} も $\overline{\Delta}(z_0, r)$ 上で正則である. よって, Weierstrass の定理より $\overline{\Delta}(z_0, r)$ 上一様に $f_{n_k}^{\#} \to f^{\#}$. $f^{\#}$ は $\overline{\Delta}(z_0, r)$ 上有界だから, k が十分大きければ $f_{n_k}^{\#}$ もまた有界である.

同様に 2 番目の場合, $|\frac{1}{f_{n_k}} - \frac{1}{f}| \to 0$ に対して, f_{n_k} を $\frac{1}{f_{n_k}}$ に f を $\frac{1}{f}$ に取り替えて同じ議論を適用できる. よって同じ結論, k が十分大きければ $f_{n_k}^{\#}$ が有界になる.

コンパクト集合 K を f_{n_k} がそこで有界となるような円板有限個で覆うと, f_{n_k} は K 上で有界となり, 仮定に矛盾する. □

正規性を再び局所的な性質として特徴づけることができる.

定義 2.18　有理型関数の族 $\mathcal{F}$ が点 z_0 で正規であるとは, $\mathcal{F}$ が z_0 のある近傍で正規であるときをいう.

定理 2.17 (Marty の定理) と標準的なコンパクト性の議論により, 容易に次の定理を得る.

定理 2.19　有理型関数の族が領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上で正規である. $\Longleftrightarrow$ その族が D の各点で正規である.

補足 2.20　ここでは主に [26] に従った. [25] はさらに発展的な内容を扱っている.

2.4　Bloch 原理

この節では, Zalcman の補題を用いて Picard の小定理から Montel-Carathéodory の定理を導く. さらに, Bloch 原理の改変である Robinson-Zalcman 原理を用いると, Picard の小定理と Montel-Carathéodory の定理の同値性が容易に従うことをみる.

Bloch 原理の起源は, Bloch 自身の 1926 年の論説の一節である．それは次のようである． ”*Nihil est in infinito quod non prius fuerit in finito.*” 次のように訳せる．有限円板で起きなかったことは, 無限平面でも決して起きない．現代の表現では次のような仮説である, 性質 $\mathcal{P}$ をもつ $\mathbb{C}$ 上の正則 (有理型) 関数が定数に限るならば, 領域 D 上で性質 $\mathcal{P}$ をもつ正則 (有理型) 関数からなる族は一般に正規であろう．

Bloch 原理のひとつの定式化, Robinson と Zalcman による, を解説する． そこから Montel-Carathéodory の定理などの標準的ないくつかの結果のほとんど自明な証明が得られる．Zalcman が導いたのは, 次の重要な正規性の特徴づけである．

補題 2.21 (Zalcman の補題 (1975)) $\mathcal{F}$ は単位円板 Δ 上の正則 (有理型) 関数の族とする．そのとき, $\mathcal{F}$ が正規でないことは, 次の主張と同値である．次の 4 つが存在し

(i) 実数 $0 < r < 1$,
(ii) $|z_n| < r$ である点列 z_n,
(iii) 関数 $f_n \in \mathcal{F}$,
(iv) $n \to \infty$ のとき $\rho_n \to 0$ となる正数 ρ_n,

次の主張が成り立つ．

$$f_n(z_n + \rho_n \zeta) \to g(\zeta),\ n \to \infty \tag{2.4}$$

$\mathbb{C}$ の各コンパクト集合上で球面距離で一様収束する．ただし, ここで $g(\zeta)$ は非定数の $\mathbb{C}$ 上の整関数 (有理型関数).

証明 $\mathcal{F}$ が Δ 上正規でないとする． 定理 2.17 (Marty の定理) より, $0 < r_0 < 1$ と点列 $z'_n \subset \{|z| \le r_0\}$ と関数列 $f_n \in \mathcal{F}$ が存在して, $f_n^{\#}(z'_n) \to \infty$ $(n \to \infty)$ となる． $r_0 < r < 1$ となる r を固定する． $f_n^{\#}$ は連続だから, 次の最大値が存在する．

$$M_n = \max_{|z| \le r} \Big(1 - \frac{|z|^2}{r^2}\Big) f_n^{\#}(z) = \Big(1 - \frac{|z_n|^2}{r^2}\Big) f_n^{\#}(z_n), \tag{2.5}$$

この式で z_n を定める． $f_n^{\#}(z'_n) \to \infty$ であるから, $M_n \to \infty$ が従う．よって

$$\rho_n = \frac{1}{M_n}\Big(1 - \frac{|z_n|^2}{r^2}\Big) = \frac{1}{f_n^{\#}(z_n)} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.6}$$

この式を書き換えて次を得る．

$$\frac{\rho_n}{r - |z_n|} = \frac{r + |z_n|}{r^2 M_n} \le \frac{2}{r M_n} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.7}$$

次の関数を考える．

$$g_n(\zeta) = f_n(z_n + \rho_n \zeta), \quad |\zeta| < \frac{r - |z_n|}{\rho_n} = R_n.$$

ここで $R_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ である. $\zeta = 0$ とおくと, 次を得る.

$$g_n^{\#}(0) = \rho_n f_n^{\#}(z_n) = 1, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

$g_n^{\#}(\zeta)$ が $\mathbb{C}$ の各コンパクト集合上で一様有界であることを示す. そのために, $|\zeta| \le R < R_n$ をとると $|z_n + \rho_n \zeta| < r$ となり, (2.5) と (2.6) から次を得る.

$$g_n^{\#}(\zeta) = \rho_n f_n^{\#}(z_n + \rho_n \zeta) \le \frac{\rho_n M_n}{1 - \frac{|(z_n+\rho_n\zeta)|^2}{r^2}} \le \frac{r + |z_n|}{r + |z_n| + \rho_n R} \cdot \frac{r - |z_n|}{r - |z_n| - \rho_n R}.$$

右辺の第 1 因子は 1 で押さえられ, 一方第 2 因子は $n \to \infty$ のとき 1 に近づく ((2.7) より). したがって, 定理 2.17 (Marty の定理) より, $\{g_n\}$ は正規族であり, 部分列 $\{g_{n_k}\}$ で $\mathbb{C}$ の各コンパクト集合上で関数 g に球面距離で一様収束するものがある. さらに

$$g^{\#}(0) = \lim_{k \to \infty} g_{n_k}^{\#}(0) = 1,$$

より g は非定数で $\mathbb{C}$ 上整関数, または有理型関数である.

逆を示すために, $\mathcal{F}$ は正規族で, かつすべての仮定の条件を満たすとする. Marty の定理より, $M > 0$ が存在して次が成り立つ.

$$\max_{|z| \le \frac{1+r}{2}} f^{\#}(z) \le M, \ \forall f \in \mathcal{F}.$$

(2.4) が成り立つと仮定し, $\zeta \in \mathbb{C}$ を固定する. 十分大きなすべての n について, $|z_n + \rho_n \zeta| \le \frac{1+r}{2}$, よって $\rho_n f_n^{\#}(z_n + \rho_n \zeta) \le \rho_n M$. したがって, すべての $\zeta \in \mathbb{C}$ について,

$$g^{\#}(\zeta) = \lim_{n \to \infty} \rho_n f_n^{\#}(z_n + \rho_n \zeta) = 0.$$

g は定数となり, g が非定数という仮定に矛盾する. □

Picard の小定理から Montel-Carathéodory の定理を導くために, 次の古典的な結果が必要である.

定理 2.22 (Hurwitz の定理 (1889)) 領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数族 $\{f_n\}$ は, 関数 f に D の各コンパクト集合上で一様収束し $f_n \to f$, ある点 $z_0 \in D$ で $f(z_0) = 0$, $f \not\equiv$ 定数 とする. そのとき, 十分小さい円板 $\Delta(z_0, r) \in D$ に対して $n_0(r)$ が存在し, $n > n_0(r)$ ならば関数 f_n と f は $\Delta(z_0, r)$ 内で同じ個数の零点をもつ. ただし, 零点は重複を込めて数える.

証明 十分小さい r をとれば, z_0 は $f(z)$ の $\Delta(z_0, r)$ 内でただひとつの零点になる. そのとき, f の連続性により, ある定数 m がとれて境界 $\partial\Delta(z_0, r)$ 上で $|f(z)| > m > 0$ となる. また, $\partial\Delta(z_0, r)$ 上の一様収束性 $f_n \to f$ により, 十分大きなすべての n に対して次を得る.

$$|f_n(z) - f| < m < |f(z)|, \quad z \in \partial\Delta(z_0, r).$$

したがって, Rouché の定理より結果が従う. □

定理 2.23　(Zalcman　(1975)) Picard の小定理から Montel-Carathéodory の定理が直接従う.

証明 領域 D 上の正則関数族 $\mathcal{F}$ が D 上で正規でなく, かつ異なる値 a_1, a_2 を取らないとする. 正規性は局所的な性質だから (定理 2.5), 単位円板 Δ は D に含まれ, かつ $\mathcal{F}$ が Δ で正規でないとして構わない.

f_n, z_n, ρ_n と g を補題 2.21 (Zalcman の補題) のようにとる. 明らかに $f_n(z_n + \rho_n\zeta) \neq a_j$, $\forall n$, $j = 1, 2$. したがって, 定理 2.22 より $g(\zeta) \neq a_j$, $j = 1, 2$, $\forall\zeta \in \mathbb{C}$. これは Picard の小定理に矛盾する. □

正規性の概念は, 関数族が定義される領域に依存して決まる. Bloch 原理を厳密なものにするため, 関数をその定義領域と対に考えるべきであり, $D \neq D'$ のとき要素 $\langle f, D\rangle$ と $\langle f, D'\rangle$ を異なるものとみなすべきである. 与えられた性質 $\mathcal{P}$ に対し, 記号 $\langle f, D\rangle \in \mathcal{P}$ は, 関数 f は領域 D 上で性質 $\mathcal{P}$ を満たす, という意味を表すこととする.

Bloch 原理は次の 2 つ命題が同値であることを主張する.

(a) $\langle f, \mathbb{C}\rangle \in \mathcal{P}$ ならば, f は定数.

(b) 各領域 D について, 関数族 $\{f : \langle f, D\rangle \in \mathcal{P}\}$ は D 上正規である.

しかし, Bloch 原理は一般には成立しない. Bloch 原理を満たさない例については, [6], [25], [31] を参照. Zalcman の補題は, 次のような Bloch 原理の定式化を導く.

定理 2.24　(Robinson-Zalcman の原理 (1975)) 有理型関数の性質 $\mathcal{P}$ が次の 3 条件を満たすとする:

(i)　$\langle f, D\rangle \in \mathcal{P}$ ならば, 各 $D' \subset D$ について $\langle f|_{D'}, D'\rangle \in \mathcal{P}$.

(ii)　$\langle f, D\rangle \in \mathcal{P}$ で $\varphi(z) = az + b$ $(a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0)$ ならば, $\langle f \circ \varphi, \varphi^{-1}(D)\rangle \in \mathcal{P}$.

(iii)　すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\langle f_n, D_n\rangle \in \mathcal{P}$ で, $D_1 \subset D_2 \subset \ldots$, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \mathbb{C}$ のとき, $\mathbb{C}$ 上の各コンパクト集合上一様に $f_n \to f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ ならば, $\langle f, \mathbb{C}\rangle \in \mathcal{P}$.

そのとき, 次の 2 つの主張は同値である.

(a)　$\langle f, \mathbb{C}\rangle \in \mathcal{P}$ ならば, f は定数.

(b)　各領域 D について, 関数族 $\{f : \langle f, D\rangle \in \mathcal{P}\}$ は D 上正規である.

証明 $(a) \Longrightarrow (b)$

定理 2.19 より正規性は局所的な性質だから, ある関数族 $\mathcal{F} = \{f : \langle f, D\rangle \in \mathcal{P}\}$ が正規でないと仮定すると, ある円板 $\Delta(z, r) \subset D$ で正規でないとしてよい. このとき, 性質 (i) より $\langle f, \Delta(z, r)\rangle \in \mathcal{P}$, $\forall f \in \mathcal{F}$. さらに性質 (ii) より, $\Delta(z, r) = \Delta$ 単位円板としてよい. 補題 2.21 (Zalcman の補題) を非正規族 $\langle \mathcal{F}, \Delta\rangle$ に適用すると, r, z_n, ρ_n, R_n を得る. $R_n \to \infty$ であるから, 必要ならば部分列をとることにより, 増大列であるとしてよい. そのとき, 補題の関数 $g_n(\zeta) = f_n(z_n + \rho_n\zeta)$ は, $\Delta_n = \{|\zeta| < R_n\}$ で定義されている. すると各 n に対して, $|z_n + \rho_n\zeta| < r < 1$ であるから, 性質 (ii) より $\langle g_n, \Delta_n\rangle \in \mathcal{P}$. $\mathbb{C}$ の各コンパクト集合上

一様に $g_n \to g$ かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n = \mathbb{C}$ だから, 性質 (iii) より $\langle g, \mathbb{C} \rangle \in \mathcal{P}$. このとき条件 (a) より $g \equiv$ 定数 が従うが, これは矛盾である.

$(b) \Longrightarrow (a)$

f が $\langle f, \mathbb{C} \rangle \in \mathcal{P}$ を満たすとする. 任意の点 $z \in \mathbb{C}$ をとる. 次の関数族を考える

$$\mathcal{F} = \{f_R(\zeta) = f(z + R\zeta) : R > 0, |\zeta| < 1\}.$$

性質 (i) から, $\langle f, \mathbb{C} \rangle \in \mathcal{P}$ より $\langle f, \Delta(z, R) \rangle \in \mathcal{P}$, $R > 0$ が従う. よって, 性質 (ii) から $\langle f_R, \Delta \rangle \in \mathcal{P}$, $R > 0$ が従う. したがって, 条件 (b) より $\mathcal{F}$ は Δ 上正規である. 定理 2.17 (Marty's theorem) より,

$$f_R^{\#}(0) = Rf^{\#}(z)$$

すべての $R > 0$ に対して有界でなければならない. よって, $f^{\#}(z) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, 結局 $f \equiv$ 定数 である. □

定理 2.24 (Robinson-Zalcman の原理) より, 次の系を得る.

系 2.25 Picard の小定理と Montel-Carathéodory の定理は同値である.

証明 性質 $\mathcal{P}$ を次のように定める.

$$\langle f, D \rangle \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow f \text{ 定数, または異なる値 } a_1, a_2 \in \mathbb{C} \text{ を } D \text{ 上でとらない.}$$

今, 性質 $\mathcal{P}$ が定理 2.24 の (i), (ii), (iii) を満たすことを確認すれば十分である. (i), (ii) は自明, (iii) は定理 2.22(Hurwitz の定理) の結果である. □

補足 2.26 ここでは主に [6], [25], [26] に従った. Zalcman の原論文 [31] にあたるのもよい.

2.5 Riemann の写像定理

複素解析の最重要結果のひとつが Riemann の写像定理である. 1851 年 Riemann は学位論文で Dirichlet の原理に基づいた証明を発表したが, 誤りを含んでいた. 初めて厳密な証明を与えたのは, 1900 年の W.F. Osgood の論文である. ここでは正規族の議論に基づく証明を与えるが, その着想は主に P. Koebe の 1907 年の論文のものである.

定理 2.27 (Riemann の写像定理 (1900)) 単連結領域 $D \subsetneq \mathbb{C}$ と点 $z_0 \in D$ に対して, ただひとつの単葉正則関数 $w = f(z)$ で, D を単位円板 Δ に写し, $f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0$ となるものが存在する.

証明 次の関数族 $\mathcal{F}$ を考える.

$$\mathcal{F} = \{D \text{ 上の単葉正則関数 } f : |f(z)| \le 1,\ f(z_0) = 0,\ f'(z_0) \ge \alpha > 0\}.$$

ここで, $\alpha > 0$ はあとで決める. 仮定より $a \notin D$ となる複素数 a がある. D は単連結だから, D 上で $\sqrt{z-a}$ の一価分枝 $g(z)$ を得る. このとき, g は単葉で D を領域 $\tilde{D}$ の上へ写し,

$g(z_0) = w_0 \in \tilde{D}$ である．g は $w \in \tilde{D}$ と $-w$ の両方の値をとることはないから, ある円板 $\Delta(w_0, \rho_0) \subset \tilde{D}$ があり, $\Delta(-w_0, \rho_0)$ は $\tilde{D}$ の外部にある．よって

$$|g(z) + w_0| \geq \rho_0, \ \forall z \in D.$$

また $g(z_0) = w_0$ だから, $|w_0| \geq \rho_0/2$ である．

次に関数 $h(z)$ $(z \in D)$ を考える．

$$h(z) = \frac{\rho_0}{4} \frac{|g'(z_0)|}{g'(z_0)} \frac{w_0}{|w_0|^2} \frac{g(z) - w_0}{g(z) + w_0}.$$

ここで, $\alpha = \frac{\rho_0}{8} \frac{|g'(z_0)|}{|w_0|^2}$ とすると, $h \in \mathcal{F}$ であることを示す．まず $h(z_0) = 0,\ h'(z_0) = \frac{\rho_0}{8} \frac{|g'(z_0)|}{|w_0|^2} > 0$. h は D 上で単葉で正則．また

$$|h(z)| = \frac{\rho_0}{4|w_0|} \left| \frac{g(z) - w_0}{g(z) + w_0} \right| = \frac{\rho_0}{4} \left| \frac{1}{w_0} - \frac{2}{g(z) + w_0} \right| \leq 1, \quad z \in D.$$

したがって, $\mathcal{F} \neq \phi$. Riemann 写像は, $\mathcal{F}$ の関数のうち, z_0 での微分が最大のものになる．そのような関数が存在することを示すために, 次の量 β を考察する．

$$\beta = \sup_{h \in \mathcal{F}} h'(z_0) \leq \infty.$$

そのとき, 関数列 $h_n \in \mathcal{F}$ が存在して $\lim_{n \to \infty} h'_n(z_0) = \beta$. 各 $h \in \mathcal{F}$ は $|h(z)| \leq 1$ を満たすので, $\mathcal{F}$ は D 上正規であるから, 部分列 h_{n_k} で各コンパクト集合上で正則関数 f に収束する部分列が選べる．よって $|f(z)| \leq 1,\ f(z_0) = 0$. また定理 2.22 より, f は単葉である．さらに, 微分の Cauchy の積分公式より $\lim_{k \to \infty} h'_{n_k}(z_0) = f'(z_0)$. したがって, $f'(z_0) \geq \alpha > 0$. また $f'(z_0) = \beta = \sup_{h \in \mathcal{F}} h'(z_0) < \infty$ が従う．

f が全射であることを示す．もし $\zeta_0 \in \Delta$ が $\zeta_0 \notin f(D)$ としよう．D 上で一価正則関数の分枝

$$G(z) = \sqrt{\frac{f(z) - \zeta_0}{1 - \overline{\zeta_0} f(z)}}$$

は, 単葉で $|G(z)| \leq 1$ を満たすことがわかる．そのとき, 関数 H

$$H(z) = \frac{|G'(z_0)|}{G'(z_0)} \frac{G(z) - G(z_0)}{1 - \overline{G(z_0)} G(z)}$$

は D 上の単葉正則関数で, $|H(z)| \leq 1,\ H(z_0) = 0$ を満たす．さらに

$$H'(z_0) = \frac{|G'(z_0)|}{1 - |G(z_0)|^2} = \frac{1 + |\zeta_0|}{2\sqrt{|\zeta_0|}} f'(z_0).$$

ここで $|\zeta_0| < 1$ より

$$1 + |\zeta_0| = (1 - \sqrt{|\zeta_0|})^2 + 2\sqrt{|\zeta_0|} > 2\sqrt{|\zeta_0|}$$

となり, $H'(z_0) > f'(z_0)$ になるが, $f'(z_0)$ の最大性に反する. したがって, $f: D \to \Delta$ は全射である.

最後に一意性を示す. もし条件を満たす関数が 2 つ f_1, f_2 あったとする. そのとき, 関数 $g(w) = f_1 \circ f_2^{-1}(w)$ は, 単位円板から単位円板への単葉正則関数で $g(0) = 0$ である. Schwarz の補題を用いると $|f_1(z)| \leq |f_2(z)|$ を得るが, f_1 と f_2 を入れ替えれば, $|f_2(z)| \leq |f_1(z)|$ を得るので, 結局 $|f_1(z)| = |f_2(z)|$ $(z \in \Delta)$. これより, $|c| = 1$ となる定数が存在して, $f_2(z) = cf_1(z)$ となる. さらに原点における微分の正値性から $c = 1$, つまり $f_1 \equiv f_2$ が従う. □

補足 2.28　ここでは [25], [26] を参考にした. Riemann の写像定理を含め, Riemann の一意化定理の歴史については [10], [24] が詳しい.

3 Runge の定理

ここでは, 主に文献 [22] に従って解説する.

3.1 非斉次 Cauchy-Riemann 方程式

Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合, $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ は Ω の開被覆とする.

定義 3.1 $\mathcal{U}$ に従属する **1 の分割**とは, Ω 上の C^∞ 級関数の族 $\{\phi_i\}_{i\in I}$ で次の性質を満たすものである.

(1) ϕ_i は実数値, $\phi_i \geq 0$ で, $\mathrm{supp}(\phi_i) \subset U_i$.
(2) 閉集合族 $\{\mathrm{supp}(\phi_i)\}_{i\in I}$ は局所有限である. つまり任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ に対し, 集合 $\{i \in I : K \cap \mathrm{supp}(\phi_i) \neq \phi\}$ は有限集合である.
(3) Ω 上 $\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \equiv 1$.

1 の分割の存在定理はよく知られている. 証明は例えば [22] Ch.5, 1 を参照.

定理 3.2 Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合, $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ は Ω の開被覆とする. そのとき, $\mathcal{U}$ に従属する 1 の分割が存在する.

有用な命題を与える. $\boldsymbol{C^\infty(\Omega)}$ は Ω 上無限回微分可能な関数からなる集合, $\boldsymbol{C^\infty_C(\Omega)}$ は, Ω 上無限回微分可能で, サポートが Ω に含まれる関数からなる集合を表す.

命題 3.3 Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合, $F \subset \Omega$ は Ω の閉部分集合, U は $F \subset U$ となる Ω の開集合とする. そのとき, $\phi \in C^\infty(\Omega)$ で, $0 \leq \phi \leq 1,\ \phi|_F = 1,\ \phi|_{\Omega - U} = 0$ となるものが存在する.

証明 $V = \Omega - F$, $\{\phi_U, \phi_V\}$ を, Ω の開被覆 $\{U, V\}$ に従属する 1 の分解とする. そのとき, $\mathrm{supp}(\phi_V) \subset V$ だから, $\phi_V|_F = 0$. $\phi_U + \phi_V = 1$ より, $\phi_U|_F = 1$. $\mathrm{supp}(\phi_U) \subset U$ だから, $\phi = \phi_U$ ととればよい. □

命題 3.4 Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合, $F_1, F_2 \subset \Omega$ は Ω の閉部分集合で $F_1 \cap F_2 = \phi$ とする. $\phi_1, \phi_2 \in C^\infty(\Omega)$ とする. そのとき, $\phi \in C^\infty(\Omega)$ で, $\phi|_{F_1} = \phi_1|_{F_1},\ \phi|_{F_2} = \phi_2|_{F_2}$ となるものが存在する.

証明 命題 3.3 より $\alpha \in C^\infty(\Omega)$ で, $0 \leq \alpha \leq 1,\ \alpha|_{F_1} = 1,\ \alpha|_{F_2} = 0$ となるものが作れる. $\phi = \alpha\phi_1 + (1-\alpha)\phi_2$ とすればよい. □

補題 3.5 R, R' は $\mathbb{C}$ の閉長方形で, $R' \subset \mathrm{int}R$ (R の内部) とする. U を $R - \mathrm{int}R'$ を含む開集合とする. $\phi \in C^\infty(U)$ について, 次の式が成り立つ.

$$2i \iint_{R-R'} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}\, dxdy = \int_{\partial R} \phi\, dz - \int_{\partial R'} \phi\, dz. \tag{3.1}$$

証明 $K = R - \mathrm{int}R'$ とおく．命題 3.3 より $\alpha \in C^\infty_C(U)$ で $\alpha|_K = 1$ となるものが作れる．R の近傍 V 上の関数 ψ を次のように定義する．

$$\psi(z) = \begin{cases} \alpha(z)\phi(z), & z \in U \\ \\ \quad 0, & z \in V - U. \end{cases}$$

このとき, 次がなりたつ．(Stokes の定理)

$$2i \iint_R \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}\, dxdy = \int_{\partial R} \psi\, dz = \int_{\partial R} \phi\, dz,$$
$$2i \iint_{R'} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}\, dxdy = \int_{\partial R'} \psi\, dz = \int_{\partial R'} \phi\, dz.$$

最初の式から 2 番目の式を引けば, 主張が得られる． □

命題 3.6 $\phi \in C^\infty_C(\mathbb{C})$ とする．任意の $w \in \mathbb{C}$ について, 次の等式が成り立つ．

$$\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z-w}\, dxdy = -\pi\phi(w). \tag{3.2}$$

証明 $w \in \mathbb{C}$ を固定する．z を $z+w$ と変数変換すると, 式 (3.2) の左辺は次のようになる．

$$\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z-w}\, dxdy = \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(z+w)\frac{1}{z}\, dxdy.$$

原点を含む十分大きな長方形領域 R で, $\phi(z+w) = 0$ for $\forall z \notin R$ となるものを選ぶ．十分小さな $\varepsilon > 0$ を選び, 長方形領域 $R_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \subset \mathrm{int}R$ をとる．補題 3.5 より

$$\begin{aligned} 2i \iint_{R-R_\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(z+w)\frac{1}{z}\, dxdy &= 2i \iint_{R-R_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\phi(z+w)}{z} \right) dxdy \\ &= -\int_{\partial R_\varepsilon} \frac{\phi(z+w)}{z}\, dz. \end{aligned}$$

ここで

$$\int_{\partial R_\varepsilon} \frac{\phi(z+w)}{z}\, dz = \int_{\partial R_\varepsilon} \frac{\phi(z+w) - \phi(w)}{z}\, dz + 2\pi i \phi(w)$$

であるが, $\phi \in C^\infty_C(\mathbb{C})$ より, $M > 0$ が存在して, $|\phi(z+w) - \phi(w)| \le M|z|$ となるので,

$$\left| \int_{\partial R_\varepsilon} \frac{\phi(z+w) - \phi(w)}{z}\, dz \right| \le 8\varepsilon M \to 0,\ (\varepsilon \to 0).$$

したがって, $\varepsilon \to 0$ とすると,

$$2i \iint_R \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(z+w)\frac{1}{z}\, dxdy = -2\pi i \phi(w).$$

ここで $\phi(z+w)=0$ for $\forall z \notin R$ だから,

$$\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z-w}\, dxdy = \iint_R \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(z+w)\frac{1}{z}\, dxdy = -\pi\phi(w).$$

□

定理 3.7 $\phi \in C_C^\infty(\mathbb{C})$ とする. $\mathbb{C}$ 上の関数 u を次のように定める.

$$u(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta,\ \zeta = \xi + i\eta. \tag{3.3}$$

そのとき, $u \in C^\infty(\mathbb{C})$ で, 次が成り立つ.

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \phi.$$

証明 まず $u(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\phi(\zeta+z)}{\zeta}\, d\xi d\eta$ とかき換えられる. u は連続である. $h \in \mathbb{R},\ h \neq 0$ とする. そのとき

$$\frac{u(z+h)-u(z)}{h} = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{1}{\zeta}\frac{\phi(\zeta+z+h)-\phi(\zeta+z)}{h}\, d\xi d\eta.$$

z, ζ を固定したとき, $(\phi(\zeta+z+h)-\phi(\zeta+z))/h \to (\partial\phi/\partial\xi)(\zeta+z)$ $(h \to 0)$ である. さらに, ϕ はコンパクトな台をもつので, この収束は z を $\mathbb{C}$ の任意のコンパクト集合にあるとき, ζ について一様収束である. したがって,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(z) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(u(z+h)-u(z)) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{1}{\zeta}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}(\zeta+z)\, d\xi d\eta \\ &= -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial\phi}{\partial\xi}(\zeta)\frac{1}{\zeta-z}\, d\xi d\eta.\end{aligned}$$

この収束は, z が $\mathbb{C}$ の任意のコンパクト集合にあるとき一様収束するので, $\partial u/\partial x$ は連続である. 同様に次を得る.

$$\frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{1}{\zeta}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}(\zeta+z)\, d\xi d\eta = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial\phi}{\partial\eta}(\zeta)\frac{1}{\zeta-z}\, d\xi d\eta.$$

これを繰り返すと, $u \in C^\infty(\mathbb{C})$ が従う. 上の $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y$ の公式から次が従う.

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial\phi}{\partial\bar{\zeta}}(\zeta)\frac{1}{\zeta-z}\, d\xi d\eta.$$

最後に (3.2) より結論を得る. □

定理 3.8 (コーシーの積分公式の変異形) Ω を $\mathbb{C}$ の開集合, K を Ω のコンパクト部分集合とする. 関数 $\alpha \in C_C^\infty(\Omega)$ は K のある近傍で $\alpha = 1$ とする. そのとき, Ω 上の任意の正則関数 f について, 次がなりたつ.

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial\alpha}{\partial\bar{\zeta}} \cdot \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta, \quad z \in K. \tag{3.4}$$

証明 関数 $\phi \in C_C^\infty(\mathbb{C})$ を次のように定める.

$$\phi(z) = \begin{cases} \alpha(z)f(z), & z \in \Omega \\ \\ \quad 0, & z \in \mathbb{C} - \Omega. \end{cases}$$

このとき, (3.2) より $z \in K$ に対して, 次を得る.

$$f(z) = \phi(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}} \cdot \frac{1}{\zeta - z}\, d\xi d\eta = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{\zeta}} \cdot \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta.$$

□

3.2 Runge の定理

ここで Runge の定理を述べるために, 位相について次の補題を用意する.

補題 3.9 X を位相空間, $A \subset B \subset X$ とする. B に X からの相対位相を入れ, A の B の相対位相に関する閉包を $\overline{A}^B$ とかき, A の X の位相に関する閉包を $\overline{A}$ とかく.

(1) $\overline{A}^B = \overline{A} \cap B$.
(2) A が B の相対位相でコンパクト $\Longleftrightarrow$ A が X の位相でコンパクト.

今 $A \subset B \subset \mathbb{C}$ とする. ($\mathbb{C}$ の代わりに, ハウスドルフ空間 X でもよい.)

(3) $\overline{A}^B$ がコンパクト (A は B で相対コンパクト) $\Longleftrightarrow$ $\overline{A} \subset B$ かつ $\overline{A}$ がコンパクト.

証明 (1) $A' = \{X$ における A の集積点 $\}$, $A'^B = \{B$ における A の集積点 $\}$ とおく. そのとき, $\overline{A} = A \cup A'$, $\overline{A}^B = A \cup A'^B$ とかける. $A'^B = A' \cap B$ から結論が従う. (2) は容易である. ([19] p.49 を参照.)
(3) ($\Longleftarrow$) $\overline{A}^B = \overline{A} \cap B = \overline{A}$ であるから明らか.
($\Longrightarrow$) $\overline{A}^B = A \cup (A' \cap B)$ がコンパクトとする. ハウスドルフ空間のコンパクト部分集合は閉集合であるから ([18] Prop. 4.36.), $\overline{A}^B$ は $\mathbb{C}$ の (または X の) 閉集合である. 今 $A' \subset B$ を示す. 任意の点 $a \in A'$ をとる. もし $a \in A$ ならば明らかに $a \in B$ であるから, $a \in A' \setminus A$ とする. a の任意の近傍 U について $U \cap (A - \{a\}) \neq \phi$ だから, $U \cap (\overline{A}^B - \{a\}) \neq \phi$. したがって, a は $\overline{A}^B$ の集積点であり, $\overline{A}^B$ は閉集合なので, $a \in \overline{A}^B$. よって $A' \subset \overline{A}^B = A \cup (A' \cap B)$, つまり $A' \subset B$ が従う. 以上より, $\overline{A} = A \cup A' \subset B$, $\overline{A} = \overline{A}^B$ がコンパクトがわかる. □

注 3.10 補題 3.9 (3) の状況を理解するためには, 次のような例を考えるとよい.
$A = \{0 < |z| < 1\}$, $B = \mathbb{C} - \{0\}$. そのとき, $\overline{A}^B = \{0 < |z| \leq 1\}$, $\overline{A} = \{|z| \leq 1\} \not\subset B$.

Ω を $\mathbb{C}$ の開集合, K を $\mathbb{C}$ のコンパクト集合とする. $\boldsymbol{\mathcal{O}(\Omega)}$ は Ω 上の正則関数全体からなる集合とする. また, $\boldsymbol{\mathcal{O}(K)}$ は K 上の連続関数で, K を含むある開集合上の正則関数の K

への制限に一致するもの全体からなる集合とする．また, K 上の連続関数 ϕ に対し,

$$\|\phi\|_K = \sup_{z\in K} |\phi(z)|$$

とおく．K 上の連続関数 ϕ 全体からなる集合 $\boldsymbol{\mathcal{C}(K)}$ は, $\|\phi\|_K$ をノルムとする Banach 空間になる．$\mathcal{O}(K)$ は $\mathcal{C}(K)$ の部分集合と考える．

$\mathbb{C}$ の開集合 Ω に対して, $\mathcal{O}(\Omega)$ に位相を次のように定める．$f \in \mathcal{O}(\Omega)$ の基本近傍系として次の集合をとる．

$$U(f;K,\varepsilon) = \{g \in \mathcal{O}(\Omega) : \|f-g\|_K < \varepsilon\},\ K \text{ は } \Omega \text{ のコンパクト部分集合},\ \varepsilon > 0.$$

この位相は距離付け可能である．実際, この位相は次の距離で定まる．

Ω のコンパクト集合の列 $\{K_n\}_{n\geq 1}$ で, $K_n \subset \mathrm{int}(K_{n+1})$, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$ となるものを選ぶ．このとき, $f,g \in \mathcal{O}(\Omega)$ に対して, 次のように f,g の距離 $d(f,g)$ を定義する．

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\|f-g\|_K}{1+\|f-g\|_K}.$$

この距離に関して, $\mathcal{O}(\Omega)$ は完備距離空間になる．この位相はコンパクト一様収束の位相, またはコンパクト開位相とよばれることがある．

今, $\mathbb{C}$ の開集合 Ω と, Ω のコンパクト部分集合 K があるとする．そのとき, 制限写像 $\rho = \rho_{\Omega,K} : \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(K)$ を, $\rho(f) = f|_K$ と定める．

定理 3.11 (Runge の定理：第 1 型) $\mathbb{C}$ の開集合 Ω と, Ω のコンパクト部分集合 K があるとする．そのとき, 次の (i) $\sim$ (iii) は互いに同値である．

(i) $\rho(\mathcal{O}(\Omega))$ は $\mathcal{O}(K)$ で ($\mathcal{C}(K)$ から誘導される位相に関して) 稠密である．

(ii) $\Omega - K$ のいずれの連結成分も, Ω で相対コンパクトでない．
(注：U が Ω で相対コンパクト $\Leftrightarrow$ ($\mathbb{C}$ での閉包) $\overline{U} \subset \Omega$ かつ $\overline{U}$ がコンパクト．補題 3.9 (3) 参照.)

(iii) 任意の $a \in \Omega - K$ に対して, ある $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ が存在して, $|f(a)| > \|f\|_K$ となる．

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Omega - K$ のある連結成分 U が, Ω で相対コンパクトであると仮定する．このとき, $\partial U \subset K$ を示す．もし $a \in \partial U, a \notin K$ となる点 a があったとする．$\overline{U} \subset \Omega$ だから, a の近傍 $\Delta(a,r)$ で $\Delta(a,r) \subset \Omega - K$ となるものが存在する．このとき, $\Delta(a,r) \cap U \neq \phi$. よって, $\Delta(a,r) \cup U$ は連結で, $\Delta(a,r) \cup U \subset \Omega - K$. U は $\Omega - K$ の連結成分だから, $\Delta(a,r) \subset U$ となり, $a \in \partial U$ に矛盾する．

次に $z_0 \in U, f(z) = (z-z_0)^{-1}$ を考える．そのとき, $f|_K \in \mathcal{O}(K)$ である．(i) の仮定より, 関数列 $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(U)$ で, $f|_K$ に K 上一様収束するものがある．最大値原理より

$$\sup_{\overline{U}} |f_n - f_m| = \sup_{\partial U} |f_n - f_m| \leq \|f_n - f_m\|_K.$$

したがって, $\{f_n|_U\}$ は関数 $g \in \mathcal{O}(U)$ に U 上一様収束する. 今 $(z-z_0)f_n(z)$ は, $n \to \infty$ のとき $\partial U \subset K$ 上 1 に一様収束するから, 再び最大値原理により, $(z-z_0)f_n(z) \to 1$ $(z \in U)$. したがって, $(z-z_0)g(z) \equiv 1$ $(z \in U)$. これは矛盾である.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\rho(\mathcal{O}(\Omega)) = E$ とおく. $E \subset \mathcal{O}(K) \subset \mathcal{C}(K)$ である. Hahn-Banach の定理を $\mathcal{C}(K)$ に適用すると, E が $\mathcal{O}(K)$ で稠密であるための必要十分条件は, 任意の連続線形汎関数 $\lambda : \mathcal{C}(K) \to \mathbb{C}$ について, $\lambda|_E = 0 \Rightarrow \lambda|_{\mathcal{O}(K)} = 0$ となることである.

任意の $\mathcal{C}(K)$ 上の線形汎関数 λ に対して, 関数 $\Phi = \Phi_\lambda : \mathbb{C} - K \to \mathbb{C}$ を, 次のように定義する.

$$\Phi(w) = \lambda(\phi_w),\ w \notin K, \phi_w(z) = \frac{1}{z-w}\ (z \in K).$$

このとき, $\Phi \in \mathcal{O}(\mathbb{C} - K)$ であることを示す. 実際, $a \notin K$ ならば, $r > 0$ が存在して, $\overline{\Delta}(a,r) \cap K = \phi$. よって

$$\phi_w(z) = \frac{1}{z-w} = \frac{1}{(z-a)\left(1 - \frac{w-a}{z-a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}},$$

$z \in K$ のとき $|w-a| < r$ で一様収束する. λ は $\mathcal{C}(K)$ 上で連続であるから

$$\Phi(w) = \lambda(\phi_w) = \sum_{n=0}^{\infty} (w-a)^n \lambda(\phi_{a,n}),\ \phi_{a,n}(z) = (z-a)^{-n-1}.$$

したがって, $\Phi \in \mathcal{O}(\Delta(a,r))$, $\Phi^{(n)}(a) = n!\lambda(\phi_{a,n})$. a は任意だから, $\Phi \in \mathcal{O}(\mathbb{C} - K)$.

今 $\lambda|_E = 0$ とする. (ii) を仮定すると, $\mathbb{C} - K$ 上で $\Phi \equiv 0$ であることを示す. そのために, 今 U を $\mathbb{C} - K$ の連結成分とする.

場合 (a) U が非有界な場合:

$R > 0$ を $K \subset \Delta(0,R)$ となるように選ぶ. $w \in U$, $|w| > R$ ととる. そのとき, $\phi_w(z) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}}$ は, $z \in K$ について一様収束する. よって, $\Phi(w) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} w^{-n-1}\lambda(z^n|_K) = 0$. (なぜなら $z^n|_K \in E$.) したがって, $\Phi = 0$ $(w \in U \cap \{|w| > R\} (\neq \phi))$. U は連結だから, $\Phi|_U \equiv 0$.

場合 (b) U が有界な場合:

(i) $\Rightarrow$ (ii) の証明のときと同様に考えると, $\partial U \subset K$ が示せる. まず, $U \not\subset \Omega$ を示す. もし $U \subset \Omega$ とすると $\overline{U} \subset \Omega$ となる. さらに, U は $\Omega - K$ の連結成分でなければならない. なぜならば, $\mathbb{C} - K$ の U を含む U より大きな連結成分は存在しないから, $\Omega - K$ の U を含む U より大きな連結成分は存在しないからである. したがって, $\overline{U}$ はコンパクトで $\overline{U} \subset \Omega$ である. 結局, U は $\Omega - K$ の連結成分で Ω で相対コンパクトになり, 矛盾する.

$U \not\subset \Omega$ より, $a \in U$, $a \notin \Omega$ となる点 a を選ぶ. そのとき, $\Phi(a) = \lambda(\frac{1}{z-a})$ は, a の近傍で正則である. $\Phi^{(n)}(a) = n!\lambda(\phi_{a,n}) = 0$, $\phi_{a,n}(z) = (z-a)^{-n-1} \in \mathcal{O}(\Omega)$. U は連結だから $\Phi|_U \equiv 0$.

したがって, $\mathbb{C} - K$ 上で $\Phi \equiv 0$ であることが示せた.

$f \in \mathcal{O}(K)$ とし, W は K を含む開集合で, $F \in \mathcal{O}(W)$ は $F|_K = f$ となるものとする. K の近傍 W_0 上で $\alpha = 1$ となるような $\alpha \in C_C^\infty(W)$ を選ぶ. そのとき, 定理 3.8 より $z \in K$ について, 次を得る.

$$f(z) = F(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_W \frac{\partial\alpha}{\partial\overline{\zeta}} \cdot \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta = -\frac{1}{\pi}\iint_{W-W_0} \frac{\partial\alpha}{\partial\overline{\zeta}} \cdot \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta. \qquad (3.5)$$

有限個の長方形閉領域 $\{R_\nu\}$ を選び, お互いの内部は共通部分をもたず, $\mathrm{supp}(\alpha) - W_0$ を覆うようにする. ζ_ν を $R_\nu \cap \mathrm{supp}(\alpha)$ の点とする. そのとき, R_ν の最大の直径を 0 に近づけると,

$$-\frac{1}{\pi}\sum_\nu \frac{\partial\alpha}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta_\nu) \cdot \frac{F(\zeta_\nu)}{\zeta_\nu - z}|R_\nu| \quad (|R_\nu| \text{ は Lebesgue 測度})$$

は, $z \in K$ 上一様に (3.5) の最右辺の積分に収束する. よって,

$$\lambda(f) = -\frac{1}{\pi}\iint_{W-W_0} \frac{\partial\alpha}{\partial\overline{\zeta}} \cdot F(\zeta)\lambda\left(\frac{1}{\zeta - z}\right)\, d\xi d\eta = \frac{1}{\pi}\iint_{W-W_0} \frac{\partial\alpha}{\partial\overline{\zeta}} \cdot F(\zeta)\Phi(\zeta)\, d\xi d\eta = 0.$$

ここで, $\Phi(\zeta) \equiv 0$ ($\mathbb{C} - K \supset W - W_0$) を用いた.

したがって, $\lambda|_E = 0 \Rightarrow \lambda|_{\mathcal{O}(K)} = 0$ が示せた.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) 対偶を示す. U は $\Omega - K$ の連結成分で, $U \Subset \Omega$ であるする. そのとき $\partial U \subset K$ である. 最大値の原理より, $a \in U(\subset \Omega - K)$ について,

$$|f(a)| \le \sup_{z \in \partial U} |f(z)| \le \|f\|_K,\ \forall f \in \mathcal{O}(\Omega).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Omega - K = \bigcup_\nu U_\nu$ を, $\Omega - K$ の連結成分への分解とする. 仮定より, すべての $\overline{U}_\nu$ は, Ω のコンパクト集合でない. $a \in \Omega$, $a \notin K$ となる点 a を選ぶ. $a \in U_\nu$ となる ν の値を μ とおく. $L = K \cup \{a\}$ とする. そのとき, $\Omega - L$ の連結成分への分解は次のようになる.

$$\Omega - L = \bigcup_{\nu \ne \mu} U_\nu \cup (U_\mu - \{a\}).$$

$\overline{U}_\mu = \overline{U_\mu - \{a\}}$ であるから, $\Omega - L$ のすべての成分は Ω で相対コンパクトでない. (ii) $\Rightarrow$ (i) の証明ですでに示したように, $\{f|_L : f \in \mathcal{O}(\Omega)\}$ は $\mathcal{O}(L)$ で稠密である. いま, ϕ を K 上で $\phi \equiv 0$, $\phi(a) = 1$ とすると, 明らかに $\phi \in \mathcal{O}(L)$ である. このとき, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ を, $\|f - \phi\|_L < \frac{1}{2}$ と選ぶ. このとき, 次を得る.

$$\begin{aligned}|f(a)| &= |\phi(a) + (f(a) - \phi(a))| \ge |\phi(a)| - |f(a) - \phi(a)| \\ &\ge |\phi(a)| - \|f - \phi\|_L > \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

したがって, $|f(a)| > \frac{1}{2} > \|f - \phi\|_L \ge \|f - \phi\|_K = \|f\|_K$. □

定義 3.12 $\Omega \subset \mathbb{C}$ を開集合とする. A を Ω の部分集合とする. $\hat{A} = \boldsymbol{\hat{A}_\Omega}$ を, A と $\Omega - A$ の Ω で相対コンパクトな連結成分の和と定義する.

例 3.13 （$\hat{A}_\Omega$ の例）

(1) $\Omega = \mathbb{C}, K = \{|z| = 1\}$ のとき, $\hat{K}_\Omega = \{|z| \leq 1\}$, $\Omega - \hat{K}_\Omega = \{|z| > 1\}$ である.

(2) $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}, K = \{|z| = 1\}$ のとき, $\hat{K}_\Omega = K$, $\Omega - \hat{K}_\Omega = \{|z| > 1\} \cup \{0 < |z| < 1\}$ である.

注 3.14 $\Omega \subset \mathbb{C}$ を開集合, K を Ω のコンパクト部分集合とする. このとき, $\hat{K}_\Omega$ は次のようにかき表せることがわかる.

$$\hat{K}_\Omega = \{z \in \Omega : |f(z)| \leq \|f\|_K,\ \forall f \in \mathcal{O}(\Omega)\}. \tag{3.6}$$

この性質のため, $\hat{K}_\Omega$ は K の**正則凸包**とよばれる.

証明 (3.6) の右辺を L とおく. 明らかに $K \subset L$ である. 定理 3.11 の (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) により, $\Omega - \hat{K}_\Omega \subset \Omega - L$, つまり $L \subset \hat{K}_\Omega$ がわかる. 次に, 定理 3.11 の (iii) $\Rightarrow$ (ii) の証明により, $\hat{K}_\Omega$ の K 以外の Ω で相対コンパクトな連結成分 U について, $U \subset L$ がわかる. よって, $\hat{K}_\Omega \subset L$ が従う. □

注 3.15 正則凸包の概念を用いると, 定理 3.11 (iii) の条件は, $K = \hat{K}_\Omega$ であることに他ならない. このとき, K は Ω 内の**正則凸集合**であるとよばれる.

命題 3.16 $\Omega \subset \mathbb{C}$ を開集合, K を Ω のコンパクト部分集合とする. そのとき, $\hat{K}_\Omega$ はまたコンパクトである. さらに, $\mathbb{C} - \hat{K}_\Omega$ は高々有限個の連結成分しかもたない.

証明 まず, $\mathbb{C}$ は局所連結であるから, 開集合 $\Omega - K$ の連結成分も Ω の開集合, つまり $\mathbb{C}$ の開集合であることに注意する.

次に $\hat{K}_\Omega$ が有界であることを示すために, 注 3.14 の (3.6) を用いる. $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ について, 次がなりたつ.

$$\sup_{z \in \hat{K}_\Omega} |f(z)| = \sup_{z \in K} |f(z)|.$$

もし $\hat{K}_\Omega$ が非有界とすると, 上の等式で $f(z) = z$ をとると,

$$\infty = \sup_{z \in \hat{K}_\Omega} |z| = \sup_{z \in K} |z| < \infty$$

となり矛盾する. したがって, $\hat{K}_\Omega$ が有界であることがわかった.

$\hat{K}_\Omega$ が閉集合であることを示す. 点列 $\{z_n\} \subset \hat{K}_\Omega (\subset \Omega)$ で, $z_n \to z_0$ となるものをとる. もし $z_0 \in \partial\Omega$ とすると, $f(z) = 1/(z - z_0) \in \mathcal{O}(\Omega)$ を考えると,

$$\infty = \sup_{\hat{K}_\Omega} |f| = \sup_K |f| < \infty$$

となり矛盾する. よって, $z_0 \in \Omega$ である. 次にもし $z_0 \notin \hat{K}_\Omega$ とすると, $\Omega - K$ の Ω で相対コンパクトでない連結成分 U が存在して, $z_0 \in U$. 最初の注意より U は開集合だから, ある

n_0 が存在して $z_{n_0} \in U \cap \hat{K}_\Omega$. つまり $U \cap \hat{K}_\Omega \neq \phi$ となるが, これは矛盾. したがって, $\hat{K}_\Omega$ が ($\mathbb{C}$ の) 閉集合であることがわかった.

$R > 0$ を選べば, $\hat{K}_\Omega \subset \Delta(0, R)$ となる. $\mathbb{C} - \Delta(0, R)$ は連結で, $(\mathbb{C} - \Delta(0, R)) \cap \hat{K}_\Omega = \phi$. したがって, $\mathbb{C} - \hat{K}_\Omega$ の連結成分 U_0 で, $U_0 \supset \mathbb{C} - \Delta(0, R)$ となるものがある. また, $\mathbb{C} - \hat{K}_\Omega$ の他の連結成分を, $\{U_1, U_2, \ldots\}$ とする. そのとき, $U_j \subset \Delta(0, R)$ $(\forall j \geq 1)$ である. 今, $U_j \not\subset \Omega$ $(\forall j \geq 1)$ を示す. 定理 3.11 (i) $\Rightarrow$ (ii) の証明と同様に考えると, $\partial U_j \subset \hat{K}_\Omega$ がわかる. もし $U_j \subset \Omega$ とすると, U_j は $\Omega - \hat{K}_\Omega$ の連結成分になる. なぜならば, もし U_j より大きい $\Omega - \hat{K}_\Omega$ の連結成分があると, それは U_j より大きい $\mathbb{C} - \hat{K}_\Omega$ の連結成分になり矛盾するからである. したがって, $\overline{U}_j \subset \Omega$ となり, U_j は Ω で相対コンパクトな $\Omega - \hat{K}_\Omega$ の連結成分になり, 矛盾が生じる. したがって, $U_j \not\subset \Omega$ $(\forall j \geq 1)$ である.

$\{U_j\}$ が有限個でないとする. $z_j \in U_j \cap (\mathbb{C} - \Omega)(\neq \phi)$ を選ぶ. $U_j \subset \Delta(0, R)$ だから, 部分列 $\{z_{j_\nu}\}$ が $\zeta \in \mathbb{C} - \Omega$ に収束する. $\rho > 0$ を $\Delta(\zeta, \rho) \cap \hat{K}_\Omega = \phi$ であるように選ぶ. $\Delta(\zeta, \rho)$ は連結だから, $\Delta(\zeta, \rho)$ は $\mathbb{C} - \hat{K}_\Omega$ のある連結成分 $\tilde{U}$ に含まれる. しかし, $\Delta(\zeta, \rho) \cap U_{j_\nu} \neq \phi$ (無限個の j_ν) だから, $\tilde{U} \cap U_{j_\nu} \neq \phi$ (無限個の j_ν). 異なる連結成分が交わるのはおかしい. したがって, $\{U_j\}$ は有限個である. □

定理 3.17 (古典的 Runge の定理 (1885)) $\Omega \subset \mathbb{C}$ は開集合, $\mathbb{C} - \Omega = \bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha$ は連結成分への分解とする. $A' \subset A$ を $A' = \{\alpha \in A : C_\alpha$ は有界 $\}$ とおく. 任意の $\alpha \in A'$ について, $a_\alpha \in C_\alpha$ を選ぶ. そのとき, 任意の $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ は, $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A'}$ の中にのみ極をもつ有理関数によって, Ω の任意のコンパクト集合上で一様に近似できる.

証明 $K \subset \Omega$ をコンパクト集合, $L = \hat{K}_\Omega$ とする. 命題 3.16 より, $\mathbb{C} - L$ はひとつの非有界成分 U と有限個の有界成分 $W_1, \ldots, W_p$ をもつ. このとき, 命題 3.16 の証明より, $W_j \not\subset \Omega$ $(\forall j)$. 今もし C が $\mathbb{C} - \Omega$ の連結成分で, $C \ni \zeta (\zeta \in W_j, \zeta \notin \Omega)$ とする. そのとき, $C \subset W_j$ がわかる. ($\mathbb{C} - \Omega \subset \mathbb{C} - L$ からわかる.) 特に, C は有界である.

任意の W_j は $W_j \cap (\mathbb{C} - \Omega) \neq \phi$ だから, ある $\alpha_j \in A$ が存在して, $W_j \cap C_{\alpha_j} \neq \phi$. すると上の議論より, $C_{\alpha_j} \subset W_j$ が従う. よって, $\alpha_j \in A'$.

ここで, $\Omega_0 = \mathbb{C} - \{a_{\alpha_1}\} - \cdots - \{a_{\alpha_p}\}$ とおく. $L \subset \Omega_0$ である. このとき, 明らかに $\Omega_0 - L$ の連結成分は, $U, W_1 - \{a_{\alpha_1}\}, \ldots, W_p - \{a_{\alpha_p}\}$ である. 特に, $\Omega_0 - L$ のすべての連結成分は, Ω_0 で相対コンパクトでない. したがって, 定理 3.11 (i) $\Leftrightarrow$ (ii) より, 任意の $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ について, $f|_L \in \mathcal{O}(L)$ で, $F \in \mathcal{O}(\Omega_0)$ が存在して, $\|F - f\|_L < \varepsilon$ となる. g_j を F の a_{α_j} における主要部とする. すると, $F = h + g_1 + \cdots + g_p$, $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ とかける. 与えられた $\delta > 0$ に対して, 多項式 P が存在して, $\|P - h\|_L < \delta$ とできる. (テイラー展開の有限部分をとればよい.) さらに, もし $g_j(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n^{(j)} (z - a_{\alpha_j})^n$ であれば, $g_{j,N}(z) = \sum_{n=-N}^{-1} c_n^{(j)} (z - a_{\alpha_j})^n$ とおけば, $\|g_j - g_{j,N}\|_L < \delta$, $j = 1, 2, \ldots, p$ (十分大きなすべての N) となる. δ を $(p+1)\delta < \varepsilon$ ととれば,

$$G = P + g_{1,N} + \cdots + g_{p,N}$$

は, $a_{\alpha_1}, \ldots a_{\alpha_p}$ のみに極をもつ有理関数で,

$$\|G - f\|_L \leq \|G - F\|_L + \|F - f\|_L < (p+1)\delta + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

□

3.3 Runge 対

ここでは主に [14], [22], [24] に従って解説する．定理 3.11 (Runge の定理：第 1 型) を 2 つの開集合の場合に一般化した問題を扱う．そのためにいくつか位相の性質について準備する．

補題 3.18　次の性質が成り立つ．

(1)　2 つの開集合 $\Omega \subset \Omega' \subset \mathbb{C}$ がある．$\Omega' \setminus \Omega$ の空でない $(\Omega' \setminus \Omega)$ 開コンパクト集合 A に対して, Ω' の相対コンパクトな (Ω') 開集合 V が存在して, $A \subset V$, $\partial V \subset \Omega$ を満たす．

(2)　位相空間 X の開かつ閉の集合 A は, X の連結成分の和で表せる．

証明 (1) ([24] p. 295 参照) $\Omega' \setminus \Omega = A \cup B, A \cap B = \phi$ とおく．B は $\Omega' \setminus \Omega$ 閉であり, $\Omega' \setminus \Omega$ は Ω' 閉であるから, B は Ω' 閉である．$\mathbb{C}$ は正則空間であるから, A を $\Omega' \setminus B$ で相対コンパクトであるような開円版で覆うことができる．Heine-Borel の定理より, Ω' の相対コンパクトな開集合 V が存在して, $A \subset V$, $\overline{V} \cap B = \phi$ となる．そのとき $\partial V \cap A = \phi = \partial V \cap B$ であるから, $\partial V \cap (\Omega' \setminus \Omega) = \phi$. しかし $\partial V \subset \Omega'$ であるから, $\partial V \subset \Omega$ である．
(2) ([24] p. 303 参照) X の連結成分による分解 $X = \bigcup_{i \in I} C_i$ をとる．このとき

$$A = \bigcup_{C_i \cap A \neq \phi} C_i \cap A$$

とかける．$C_i \cap A \neq \phi$ のとき $C_i \subset A$ となることを示す．そうでないとすると, $C_i \cap A^c \neq \phi$ であり,

$$C_i = (C_i \cap A) \cup (C_i \cap A^c)$$

となり, 連結成分 C_i が空でない 2 つの閉集合の和で表されるので矛盾．したがって, $A = \bigcup_{C_i \cap A \neq \phi} C_i$ と表せる．　□

定理 3.19　(Šura-Bura の定理 (1941)) 局所コンパクト Hausdorff 空間 X のコンパクトな連結成分 K は, X の開かつ閉である集合からなる基本近傍系をもつ．

証明 ([21]pp. 234-235, [22] p. 107, [24] pp. 305-306 参照) X は局所コンパクトな Hausdorff 空間であるから, X がもしコンパクトでなければ, X の代わりに K のコンパクト近傍をとることにすれば, 最初から X がコンパクトであるとして構わない．次の集合族を考える．

$$\mathcal{F} = \{\text{ 開かつ閉である } K \text{ の近傍 }\}.$$

$X \in \mathcal{F}$ であるから, $\mathcal{F} \neq \phi$ である. $L = \bigcap_{N \in \mathcal{F}} N$ とおく. L は閉集合だから, コンパクトである. $\mathcal{F}$ は有限交叉性をもつので, L は $\mathcal{F}$ の元からなる基本近傍系をもつ. したがって, $L = K$ を示せばよい. $K \subset L$ で K は連結成分であるから, L が連結であることを示せば十分である. L が連結でないと仮定する. そのとき

$$L = A_0 \cup A_1,\ A_0 \cap A_1 = \phi,\ A_0, A_1 \text{ は空でない } L \text{ の閉集合}$$

とかける. このとき, A_0, A_1 はコンパクトである. X は局所コンパクト Hausdorff 空間だから正則空間であり, A_j はコンパクトだから, $A_j \subset U_j$ $(j = 0, 1)$, $U_0 \cap U_1 = \phi$ となる開集合 U_0, U_1 がとれる. $U = U_0 \cup U_1$ とおく. $L \subset U$ より

$$\phi = L \cap U^c = \bigcap_{N \in \mathcal{F}} (N \cap U^c).$$

$\mathcal{F}$ は有限交叉で閉じていて U^c はコンパクトだから, $\exists N \in \mathcal{F}$ s.t. $N \cap U^c = \phi$. つまり $N \subset U$. $K \subset N \subset U = U_0 \cup U_1$ であるから, K の連結性より K は U_0, U_1 のどちらかに入る, 例えば $K \subset U_0$ としてよい. $N \subset U$ より

$$N \cap U_0 = N \cap U_1^c$$

となるが, この集合は開かつ閉である. また $K \subset N \cap U_0$ だから, $N \cap U_0 \in \mathcal{F}$ である. よって $L \subset N \cap U_0 \subset U_0$ となる. しかし, $L \cap U_1 \supset A_1 \neq \phi$ であるから, これらは $U_0 \cap U_1 = \phi$ に矛盾する. 以上より L が連結であることがわかり, $L = K$ が示せた. □

直ちに, あとで必要となる重要な結果を得る.

系 3.20 局所コンパクト Hausdorff 空間 X について, X はコンパクトな連結成分をもつ. $\Longleftrightarrow$ X は空でない開コンパクト集合をもつ.

証明 ([24] p. 304 参照)
$(\Leftarrow)$ X が空でない開コンパクト集合 A をもつとする. 補題 3.18 (2) より, A はコンパクトな連結成分の和にかける.
$(\Rightarrow)$ X がコンパクトな連結成分 K をもつとする. そのとき, 定理 3.19 より開かつ閉である K の近傍 V をもつ. X の代わりに必要であれば K のコンパクトな近傍に取り替えて考えれば, V として開コンパクトなものを選べる. □

以上の準備の下, 2 つの開集合に関する Runge の問題を考える.

定義 3.21 2 つの開集合 $\Omega \subset \Omega' \subset \mathbb{C}$ について, (Ω, Ω') が **Runge 対**であるとは, 任意の関数 $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ が, $\mathcal{O}(\Omega')$ の関数によって Ω の各コンパクト集合上で一様に近似されるときをいう. つまり, $\forall \varepsilon > 0, \forall$ コンパクト集合 $K \subset \Omega$ に対して, $\exists g \in \mathcal{O}(\Omega')$ s.t. $\|f - g\|_K < \varepsilon$.

定理 3.11 (Runge の定理 : 第 1 型) を 2 つの開集合の場合に一般化した特徴づけを与える.

定理 3.22 (Runge の定理 : 第 2 型) 2 つの開集合 $\Omega \subset \Omega' \subset \mathbb{C}$ に対して, 次の条件 (i) $\sim$ (vi) は同値である.

(i) (Ω, Ω') は Runge 対である.
(ii) 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について, $\hat{K}_{\Omega'} = \hat{K}_{\Omega}$.
(iii) 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について, $\hat{K}_{\Omega'} \cap \Omega = \hat{K}_{\Omega}$.
(iv) 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について, $\hat{K}_{\Omega'} \cap \Omega$ はコンパクトである.
(v) $\Omega' \setminus \Omega$ は 空でない $(\Omega' \setminus \Omega)$ 開コンパクト集合をもたない.
(vi) $\Omega' \setminus \Omega$ はコンパクトな連結成分をもたない.

証明 (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) は自明である. (i) $\Rightarrow$ (iii) も難しくない.
(iv) $\Rightarrow$ (i), (ii) 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ をとる. ここで, $K' = \hat{K}_{\Omega'} \cap \Omega$, $K'' = \hat{K}_{\Omega'} \cap \Omega^c$ とおく. ただし, $\Omega^c = \mathbb{C} \setminus \Omega$ である. 仮定より, K', K'' はともにコンパクトである. 任意の $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ に対して, 関数 F を $\hat{K}_{\Omega'} = K' \cup K''$ 上で次のように定義する.

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in K', \\ \\ 2, & z \in K''. \end{cases}$$

定理 3.11 より, F は $\mathcal{O}(\Omega')$ の関数で $K' \cup K''$ 上一様に近似できる. つまり, f は K 上 $\mathcal{O}(\Omega')$ の関数で一様近似できるので, (i) が示せた. また, f として $f \equiv 0$ をとると, $h \in \mathcal{O}(\Omega')$ が存在して

$$\|h\|_K \leq \|h\|_{K'} < 1 < |h(w)|, \ \forall w \in K''.$$

これは $w \in K'' \Rightarrow w \notin \hat{K}_{\Omega'}$ を意味するから, $K'' = \phi$ がわかる. よって $\hat{K}_{\Omega'} \cap \Omega = \hat{K}_{\Omega'}$ である. 今 (i) が成り立っているから, (iii) も成り立つ. したがって, $\hat{K}_{\Omega'} = \hat{K}_{\Omega'} \cap \Omega = \hat{K}_{\Omega}$ が従うので, (ii) が示せた. ここまでで, (i) $\sim$ (iv) が同値であることがわかった.
(v) $\Leftrightarrow$ (vi) $\Omega' \setminus \Omega$ は局所コンパクト Hausdorff 空間であるから, 系 3.20 より直ちに従う.
　ここから, [14] p. 9 を参照する.
(ii) $\Rightarrow$ (v) $\Omega' \setminus \Omega$ が空でない $(\Omega' \setminus \Omega)$ 開コンパクト集合 L をもったとする. そのとき補題 3.18 (1) より, Ω' の相対コンパクトな開集合 V が存在して, $L \subset V$, $\partial V \subset \Omega$ となる. 最大値の原理より $\hat{\partial V}_{\Omega'} \supset V$ となるから, $\hat{\partial V}_{\Omega'} \supset L$. (ii) より $\hat{\partial V}_{\Omega} = \hat{\partial V}_{\Omega'} \supset L$ だから, $\Omega \supset L$. これは $\Omega' \setminus \Omega \supset L$ に矛盾.
(v) $\Rightarrow$ (ii) 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ をとる. $\Omega' \setminus K$ の Ω' で相対コンパクトな連結成分 O を考える. このとき $\partial O \subset K \subset \Omega$ がわかる. (もし $\partial O \not\subset K$ とすると, O より真に大きな連結集合が作れてしまう.)

$$L = \overline{O} \cap (\Omega' \setminus \Omega) = \overline{O} \cap \Omega^c = O \cap (\Omega' \setminus \Omega) = \mathring{O} \cap (\Omega' \setminus \Omega)$$

は $\Omega' \setminus \Omega$ の開コンパクト集合であるから, (v) より $L = \phi$. よって $O \subset \Omega$. O は Ω の相対コンパクトな連結成分でもある. したがって, $\hat{K}_{\Omega'} \subset \hat{K}_{\Omega}$ となる. 逆向きの包含関係は自明なので, $\hat{K}_{\Omega'} = \hat{K}_{\Omega}$ が示せた. □

3.4 Mittag-Leffler の定理

Runge の定理の応用として, Mittag-Leffler の定理を示す.

定理 3.23 (Mittag-Leffler の定理 (1884 : $\Omega = \mathbb{C}$ の場合)) $\Omega \subset \mathbb{C}$ は開集合, $E \subset \Omega$ は離散部分集合とする. $z \in \Omega$ に対して, $\mathbb{C}_z^* = \mathbb{C} - \{z\}$ とかく. 各 $a \in E$ に対して, $p_a \in \mathcal{O}(\mathbb{C}_a^*)$ が与えられたとする. そのとき, $f \in \mathcal{O}(\Omega - E)$ で, $f - p_a$ が各 $a \in E$ で正則であるようなものが存在する.

証明 $K \subset \Omega$ をコンパクト部分集合とする. 命題 3.16 より, $\hat{K} = \hat{K}_\Omega$ もコンパクトで, $\Omega - \hat{K}$ のすべての連結成分は Ω で相対コンパクトでない. よって, Ω のコンパクト集合からなる列 $\{K_p\}_{p \geq 1}$ で次のようなものが存在する.

$$K_p \subset \mathrm{int} K_{p+1},\ \bigcup_{p \geq 1} K_p = \Omega,\ K_p = \hat{K}_p.$$

ここで, $g_p = \sum_{a \in E \cap K_p} p_a$ と定める. E は離散集合であるから, この和は有限和である. 明らかに $g_{p+1} - g_p = \sum_{a \in E \cap (K_{p+1} - K_p)} \in \mathcal{O}(K_p)$. $K_p = \hat{K}_p$ だから, 定理 3.11 (i) より, $h_p \in \mathcal{O}(\Omega)$ で $\|g_{p+1} - g_p - h_p\|_{K_p} < 2^{-p}$. ここで, 関数 f を $K_p - E$ 上で次のように定める.

$$f = g_p + \sum_{q \geq p} (g_{q+1} - g_q - h_q) - h_1 - \cdots - h_{p-1}.$$

このとき

$$\begin{aligned} & g_p + \sum_{q \geq p} (g_{q+1} - g_q - h_q) - h_1 - \cdots - h_{p-1} \\ &= g_p + (g_{p+1} - g_p - h_p) - h_1 - \cdots - h_{p-1} + \sum_{q \geq p+1} (g_{q+1} - g_q - h_q) \\ &= g_{p+1} + \sum_{q \geq p+1} (g_{q+1} - g_q - h_q) - h_1 - \cdots - h_p. \end{aligned}$$

したがって, この定義で $f \in \mathcal{O}(\Omega - E)$ を定めている. ここで, $\sum_{q \geq p} (g_{q+1} - g_q - h_q)$ は K_p 上で一様収束するのでこの和は $\mathcal{O}(\mathrm{int} K_p)$ に属し, $g_p - p_a$ は $a \in E \cap K_p$ で正則で, $h_1 + \cdots + h_{p-1} \in \mathcal{O}(\Omega)$ であるから, f は所望の性質を満たしている. □

系 3.24 (Mittag-Leffler の定理 2) 定理 3.23 の条件「$p_a \in \mathcal{O}(\mathbb{C}_a^*)$」を, 「ある a の近傍 U_a と $\phi_a \in \mathcal{O}(U_a - \{a\})$」に置き換えた主張も正しい.

証明 p_a として ϕ_a の主要部をとり, 定理 3.23 を適用すればよい. □

次の定理は、定理 3.7 の一般化であるが, 応用上重要である.

定理 3.25　$\Omega \subset \mathbb{C}$ は開集合, $\phi \in C^\infty(\Omega)$ とする. そのとき, $u \in C^\infty(\Omega)$ で次の方程式を満たすものが存在する.

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(z) = \phi(z),\ z \in \Omega.$$

証明 まず次のことに注意する. $K \subset \Omega$ がコンパクト部分集合のとき, K のある近傍で $\partial v/\partial \bar{z} = \phi$ を満たす $v \in C^\infty(\Omega)$ が存在する. なぜならば, K のある近傍で恒等的に 1 であるような $\alpha \in C_C^\infty(\Omega)$ を用いて, ϕ を $\alpha \cdot \phi$ にとり換えて定理 3.7 を適用すればよいからである.

ここで, $\{K_p\}_{p\geq 1}$ をコンパクト集合の列で, $K_p \subset \mathrm{int}K_{p+1},\ \cup K_p = \Omega,\ K_p = \hat{K}_p$ となるものを選ぶ. そのとき上の注意より, K_p のある近傍上で $\partial v_p/\partial \bar{z} = \phi$ を満たす $v_p \in C^\infty(\Omega)$ が存在する. $v_{p+1} - v_p \in \mathcal{O}(K_p)$ である. よって定理 3.11 (i) より, $\|v_{p+1} - v_p - h_p\|_{K_p} < 2^{-p}$ となる $h_p \in \mathcal{O}(\Omega)$ が選べる. ここで Ω 上の関数 u を, 次のように定める.

$$u = v_p + \sum_{q\geq p}(v_{q+1} - v_q - h_q) - h_1 - \cdots - h_{p-1}\ (K_p\ \text{上}).$$

すると, 定理 3.23 の証明と同様, この表現は p によらず u を定義することがわかる. $v_{q+1} - v_q - h_q \in \mathcal{O}(\mathrm{int}K_p)\ (\forall q \geq p)$ に対して, $\sum_{q\geq p}(v_{q+1} - v_q - h_q)$ は K_p 上一様収束するので, $u - v_p \in \mathcal{O}(\mathrm{int}K_p)$ となる. したがって, $\partial u/\partial \bar{z} = \partial v_p/\partial \bar{z} = \phi\ (\mathrm{int}K_p\text{上}),\ \forall p \geq 1$. よって, 証明が完了した. □

次の定理は, Čech コホモロジー群の言葉で記述できる性質であるが, 色々な分野で重要である. ここで, $C^\infty(\phi) = \{0\}$ と定めておく.

定理 3.26　$\Omega \subset \mathbb{C}$ は開集合, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ は Ω の開被覆とする. 各 $i, j \in I$ について, 関数 $\phi_{ij} \in C^\infty(U_i \cap U_j)$ が与えられていて, 次の関係式が成り立つとする.

$$\phi_{ij} + \phi_{jk} = \phi_{ik},\ U_i \cap U_j \cap U_k\ \text{上},\ \forall i, j, k \in I. \tag{3.7}$$

そのとき, 関数族 $\{\phi_i\}_{i\in I},\ \phi_i \in C^\infty(U_i)$ が存在して, 次が成り立つ.

$$\phi_i - \phi_j = \phi_{ij},\ U_i \cap U_j\ \text{上},\ \forall i, j \in I.$$

証明 まず, $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ は $\mathcal{U}$ に従属する 1 の分割とする. 関数 $\psi \in C^\infty(U_i)\ (i \in I)$ を次のように定める.

$$\psi(z) = \begin{cases} \alpha_j(z)\phi_{ij}(z), & z \in U_i \cap U_j \\ \\ 0, & z \in U_i - U_i \cap U_j. \end{cases}$$

簡単のため, この関数を $\alpha_j\phi_{ij}$ とかくことにする. ここで, 次のように定める.

$$\phi_i = \sum_{j\in I}\alpha_j\phi_{ij},\ U_i\ \text{上}.$$

$\{\mathrm{supp}(\alpha_j)\}$ は局所有限だから, U_i の任意の点の近傍でこの和は有限和であり, $\phi_i \in C^\infty(U_i)$. (3.7) で $i = j = k$ ととることにより, $\phi_{ii} = 0$ (U_i 上) がわかる. 次に $k = i$ ととることにより, $\phi_{ij} = -\phi_{ji}$ ($U_i \cap U_j$ 上) がわかる. すると, 任意の $k, l \in I$ について $U_k \cap U_l$ 上で,

$$\phi_k - \phi_l = \sum_{j \in I} \alpha_j (\phi_{kj} - \phi_{lj}) = \sum_{j \in I} \alpha_j \phi_{kl} = \phi_{kl}.$$

□

次の定理より, 系 3.24 (Mittag-Leffler の定理 2) の別証明を与えることができる. ここで, $\mathcal{O}(\phi) = \{0\}$ と定めておく.

定理 3.27 $\Omega \subset \mathbb{C}$ は開集合, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ は Ω の開被覆とする. 各 $i, j \in I$ について, 関数 $f_{ij} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ が与えられていて, 次の関係式が成り立つとする.

$$f_{ij} + f_{jk} = f_{ik},\ U_i \cap U_j \cap U_k \text{ 上},\ \forall i, j, k \in I.$$

そのとき, 関数族 $\{f_i\}_{i \in I},\ f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ が存在して, 次が成り立つ.

$$f_i - f_j = f_{ij},\ U_i \cap U_j \text{ 上},\ \forall i, j \in I.$$

証明 定理 3.26 により, 関数族 $\{\phi_i\}_{i \in I},\ \phi_i \in C^\infty(U_i)$ で, $\phi_i - \phi_j = f_{ij}$ ($U_i \cap U_j$ 上), $\forall i, j \in I$ を満たすものが存在する. よって, $\partial\phi_i/\partial\bar{z} - \partial\phi_j/\partial\bar{z} = 0$ ($U_i \cap U_j$ 上). したがって, 関数 $\phi \in C^\infty(\Omega)$ で $\phi|_{U_i} = \partial\phi_i/\partial\bar{z}, \forall i \in I$ となるものがある.

定理 3.25 より, 関数 $u \in C^\infty(\Omega)$ で, $\partial u/\partial\bar{z} = \phi$ (Ω 上) となるものが存在する. ここで, $f_i = \phi_i - u$ (U_i 上) と定める. そのとき, $\partial f_i/\partial\bar{z} = \partial\phi_i/\partial\bar{z} - \phi = 0$ (U_i 上) だから, $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$. 任意の $i, j \in I$ について, $f_i - f_j = (\phi_i - u) - (\phi_j - u) = f_{ij}$ ($U_i \cap U_j$ 上). □

注 3.28 Čech コホモロジー群の言葉を用いると, 定理 3.26, 定理 3.27 の主張はそれぞれ, $H^1(\mathcal{U}, C^\infty) = 0,\ H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = 0$ と述べることができる. 詳しくは [11], [22] を参照.

注 3.29 (Mittag-Leffler の定理 2 の別証明) 定理 3.27 を用いて, 系 3.24 の別証明を与えることができる.

証明 $E \subset \Omega$ は離散集合とする. U_a を点 $a \in E$ の近傍で $U_a \cap E = \{a\}$ となるものとし, $p_a \in \mathcal{O}(U_a - \{a\})$ とする. 新しい記号 $*$ を導入し, $I = \{*\} \cup E$ とおく. $U_* = \Omega - E,\ p_* = 0$ と定める. 各 $i, j \in I$ に対し, $f_{ij} = p_i - p_j$ ($U_i \cap U_j$ 上) とおく. このとき, $f_{ij} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ である. 定理 3.27 より, 関数族 $\{f_i\}_{i \in I},\ f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ で, $f_i - f_j = f_{ij} = p_i - p_j$ ($U_i \cap U_j$ 上) を満たすものが存在する. このとき, 関数 f を $f = p_i - f_i$ ($U_i - E$ 上) と定めると, $f \in \mathcal{O}(\Omega - E)$ となる. また, $f - p_a = -f_a \in \mathcal{O}(U_a)$ だから, f が求める関数である. □

3.5 Weierstrass の定理

$\mathbb{C}$ 上の領域で与えられた離散的な点集合で指定された位数をもつ有理型関数の存在を, 定理 3.11(Runge の定理 : 第 1 型) を用いて証明する.

定理 3.30 (Weierstrass の定理 (1876 : $\Omega=\mathbb{C}$ の場合)) $\Omega\subset\mathbb{C}$ は開集合, $E\subset\Omega$ は離散部分集合とする．各 $a\in E$ に対して, 整数 k_a が与えられている．そのとき, Ω 上の有理型関数 f で, 次の条件を満たすものが存在する:

(i) $f|_{\Omega-E}$ が正則で, 至るところ 0 にならない.

(ii) 任意の $a\in E$ で, $(z-a)^{-k_a}f(z)$ は正則で 0 でない.

証明 Ω 内のコンパクト集合の列 $\{K_p\}_{p\geq 1}$ で, $K_p\subset \mathrm{int}K_{p+1},\ \cup_p K_p=\Omega,\ K_p=(\hat{K}_p)_\Omega$ となるものをとる．$F_p(z)=\prod_{a\in E\cap K_p}(z-a)^{k_a}$ とする．そのとき, $F_{p+1}/F_p\in\mathcal{O}(K_p)$ で, K_p 上で 0 にならない．ここで, 定理 3.11 (i) を用いると, Ω で零点をもたない $h_p\in\mathcal{O}(\Omega)$ で, 次を満たすものが選べる.

$$\left\|\frac{F_{p+1}}{F_p}h_p-1\right\|_{K_p}\leq\left\|\frac{F_{p+1}}{F_p}\right\|_{K_p}\cdot\left\|h_p-\frac{F_p}{F_{p+1}}\right\|_{K_p}<2^{-p-1},\quad p\geq 1. \tag{3.8}$$

ここで, Ω 上の有理型関数 f を, 各 K_p で次を満たすように作る.

$$f=F_p\cdot\prod_{q\geq p}\left(\frac{F_{q+1}}{F_q}\cdot h_q\right)\cdot h_1\cdots h_{p-1}\quad (K_p\text{上}). \tag{3.9}$$

(3.8) より (3.9) の中の無限積は一様収束し, K_p 上 0 をとらない．さらに, f は p によらず Ω 全体で定義されることがわかるので, これで証明された. □

Weierstrass の定理の応用として, 開集合上の正則関数ですべての境界点で特異であるようなものが構成できる．これは, Mittag-Leffler と Runge によって独立に示された.

定義 3.31 $\Omega\subset\mathbb{C}$ は連結開集合とする．$f\in\mathcal{O}(\Omega)$, X は $\partial\Omega$ の閉部分集合とする．f が X のすべての点で**特異**であるとは, 次が成り立つことをいう:
$\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ は連続曲線で, $\gamma(t)\in\Omega$ $(0\leq t<1)$, $\gamma(1)\in X$ とする．そのとき f の $\gamma(0)$ における芽が γ に沿って解析接続できない.

もし $X=\partial\Omega$ の場合, $f\in\mathcal{O}(\Omega)$ は $\partial\Omega$ のすべての点で特異であるといい, $\partial\Omega$ は f の**自然境界**であるという.

定理 3.32 (Mittag-Leffler (1884), Runge (1885)) $\Omega\subset\mathbb{C}$ は連結開集合とする．そのとき, $\partial\Omega$ を自然境界にもつ $f\in\mathcal{O}(\Omega)$ が存在する.

証明 $\{D_n\}_{n\geq 1}$ は, 次のような性質をもつ円板の列である:
$\overline{D}_n\subset\Omega,\ \{D_n\}$ は局所有限, $\bigcup_n D_n=\Omega,\ D_n$の直径 $r_n\to 0$ $(n\to\infty)$.

このような列は存在する．以下のように構成すればよい．$\{K_p\}_{p\geq 1}$ は Ω 内のコンパクト集合の列で, $K_p\subset\mathrm{int}K_{p+1},\ \bigcup_p K_p=\Omega$ であるとする．円板の列 D_n を次のようにとっていく．$\overline{D}_n\subset\Omega,\ K_1\subset D_1\cup\cdots\cup D_{n_1},\ K_{p+1}-\mathrm{int}K_p\subset D_{n_p+1}\cup\cdots\cup D_{n_{p+1}}$ $(p\geq 1)$, $\mathrm{radius}(D_n)<1/p$ $(n_p\leq n\leq n_{p+1})$. これは必要な条件を満たしている.

ここで, 点列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を, $a_n \in D_n,\ a_n \neq a_m\ (n \neq m)$ ととる. 定理 3.30 (Weierstrass の定理) より, $f(a_n) = 0, f \not\equiv 0$ となる $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ が存在する.

$\partial\Omega$ が f の自然境界であることを示す. $\gamma : [0,1] \to \overline{\Omega}$ は, $\gamma(t) \in \Omega\ (0 \leq t < 1), a = \gamma(1) \in \partial\Omega$ とする. f の $\gamma(0)$ における芽が γ に沿って解析接続され, $\gamma(1)$ で F_a が得られたとする. ここで F_a の代表元を $(D, F),\ D = \Delta(a, \rho),\ \rho > 0,\ F \in \mathcal{O}(D)$ とする. このとき, $\varepsilon > 0$ が存在して, $1 - \varepsilon \leq t < 1, \gamma(t) \in D$ について, F の $\gamma(t)$ における芽と f の $\gamma(t)$ における芽は同じである. $\{\gamma(t) : 1 - \varepsilon \leq t < 1\}$ を含む $D \cap \Omega$ の連結成分を U とする. 一致の定理より $F|_U = f|_U$.

ここで, $D' = \Delta(a, \frac{\rho}{2})$ とする. このとき, $D' \cap U \subset \bigcup_{n\geq 1} D_n$ であるが, 任意の自然数 N について $D' \cap U \not\subset \bigcup_{n\geq 1}^{N} D_n$. なぜならば, $D' \cap U$ は Ω で相対コンパクトではないが, $\bigcup_{n\geq 1}^{N} D_n$ は Ω で相対コンパクトだからである. したがって, 無限個の $\{n_k\}$ があって, $D_{n_k} \cap (D' \cap U)) \neq \phi,\ \mathrm{radius}(D_{n_k}) < \rho/4\ (\forall k)$ となるものが選べる. $D_{n_k} \cap U \neq \phi$ で D_{n_k} は連結だから, $D_{n_k} \subset U\ (\forall k)$ となる. 今 $F|_U = f|_U$ だから, 特に $F(a_{n_k}) = 0$. $a_{n_k} \in D_{n_k} \subset \Delta(a, 3\rho/4) \Subset D$ であるから, F は D 内のコンパクト集合で無限個の零点をもつ. したがって, D 上 $F \equiv 0$, $f|_U \equiv 0$ が従う. Ω は連結だから, Ω 上 $f \equiv 0$. これは矛盾. したがって, 上のような解析接続は存在しないので, 証明が完了した. □

次の定理も有用である.

定理 3.33　$\Omega \subset \mathbb{C}$ は開集合, $E \subset \Omega$ は離散部分集合とする. 各 $a \in E$ と a の近傍 $U_a \subset \Omega$ に対して, 自然数 k_a と関数 $\phi_a \in \mathcal{O}(\Omega - \{a\})$ が与えられている. そのとき, $f \in \mathcal{O}(\Omega - E)$ で, 次の条件を満たすものが存在する:

$$f - \phi_a \text{ は } a \text{ で正則},\ \mathrm{ord}_a(f - \phi_a) > k_a\ (\forall a \in E).$$

証明 定理 3.30 (Weierstrass の定理) より $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ で, g は $\Omega - E$ で零点をもたず, $\mathrm{ord}_a(g) > k_a\ (\forall a \in E)$ となるものが存在する. また系 3.24 (Mittag-Leffler の定理 2) より, $h \in \mathcal{O}(\Omega - E)$ で, a のある近傍 V_a で $\psi_a = h - (\phi_a/g) \in \mathcal{O}(V_a)$ となるものが存在する. ここで, $f = gh$ とする. 明らかに $f \in \mathcal{O}(\Omega - E)$ である. さらに, 各 $a \in E$ において, $f = \phi_a + g\psi_a,\ f - \phi_a \in \mathcal{O}(V_a)$. 最後に, $\mathrm{ord}_a(f - \phi_a) = \mathrm{ord}_a(g\psi_a) \geq \mathrm{ord}_a(g) > k_a$. □

補足 3.34　ここでは, 主に [22] に従って解説した. ただし, 補題 3.16 の証明の一部は, [15] に習い, 正則凸包の性質を用いる証明を採用した. Runge の定理を解説した他の書籍は, [1], [7], [8], [9], [11], [12], [13], [14], [15], [17], [20], [23], [24], [29], [30] などがある. これらはほとんど全て, Mittag-Leffler の定理, Weierstrass の定理も解説している. しかし, 非斉次コーシー・リーマン方程式を用いた Runge の定理の証明を解説した書籍は [14], [20], [21], [22] のみであるが, その手法は B. Malgrange のものである. また, ここでは Mittag-Leffler の定理と Weierstrass の定理をともに Runge の定理を用いて示したが, Runge の定理を用いなくても証明することはできる. それについては, 上記の書籍のどれかを参照するとよい.

参考文献

[1] M. Andersson, *Topics in Complex Analysis*, Springer, 1997.

[2] L. Ahlfors, *An Extension of Schwarz's Lemma*, Trans. Amer. Math. Soc., 43 (1938), 359-364.

[3] L. Ahlfors, *Conformal Invariants*, AMS Chelsea Publishing, 2010. (初版 1973.) 邦訳: 等角不変量, 大沢健夫訳, 現代数学社, 2020.

[4] R. Beals, R. S. C. Wong, *Explorations in Complex Functions*, Springer, 2020.

[5] R. Beals, R. S. C. Wong, *More Explorations in Complex Functions*, Springer, 2023.

[6] W. Bergweiler, *Bloch Principle*, Comput. Methods Funct. Theory, 6 (2006), 77-108.

[7] J. Bruna, J. Cufí, *Complex Analysis*, European Mathematical Society, 2013.

[8] R.B. Burckel, *Classical Analysis on the Complex Plane*, Birkhäuser, 2021.

[9] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable I*, Second Edition, Springer, 1978. (初版 1973.)

[10] H.P. de Saint-Gervais, *Uniformization of Riemann Surfaces*, European Mathematical Society, 2016.

[11] O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Springer, 1981. (初版 1977.)

[12] 藤本担孝, 複素解析, 岩波オンデマンド, 2019. (初版 2006.)

[13] M. Heins, *Complex Function Theory*, Academic Press, 1968.

[14] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Third Edition, North-Holland, 1990. (初版 1966.)

[15] 笠原乾吉, 複素解析, 筑摩書房, 2016. (初版 1978.)

[16] 小松勇作, 復刊 函数論, 朝倉書店, 2004. (初版 1960.)

[17] 楠幸男, 復刊 函数論 – リーマン面と等角写像 –, 朝倉書店, 2023. (初版 1973.)

[18] J. M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, Second Edition, Springer, 2011. (初版 2000.)

[19] 宮島静雄, 関数解析, 横浜図書, 2005.

[20] T. Napier, M. Ramachandran, *An Introduction to Riemann Surfaces*, Birkhäuser, 2011.

[21] R. Narasimhan, *Analysis on Real and Complex Manifolds*, North-Holland, 1985. (初版 1968.)

[22] R. Narasimhan, Y. Nievergelt, *Complex Analysis in One Variable*, Second Edition, Birkhäuser, 2001. (初版 1985.)

[23] 野口潤次郎, 複素解析概論, 裳華房, 1993.

[24] R. Remmert, *Classical Topics in Complex Function Theory*, Springer, 2010. (初版 1994.)

[25] J. L. Schiff, *Normal Families*, Springer, 1993.

[26] J. L. Schiff, *Topics in Complex Analysis*, De Gruyter, 2022.

[27] 志賀啓成, 複素解析学 II, 培風館, 1999.

[28] E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Second Edition, Oxford University Press, 1979. (初版 1932.)

[29] D. Varolin, *Riemann Surfaces by way of Complex Analytic Geometry*, American Mathematical Society, 2011.

[30] 吉田洋一, 函数論 第 2 版, 岩波オンデマンド, 2015. (初版 1965.)

[31] L. Zalcman, *A heuristic principle in complex function theory*, Amer. Math. Monthly, 82 (1975), 813-817.