Picard, Montel, Runge の定理総説

小櫃 邦夫

2024.2.12

目次

0　序文

Picard (1856 – 1941)

Runge (1856 – 1927)

Montel (1876 – 1975)

Picard の定理の証明は, さまざまなものが知られている. 1 章では, 楕円モジュラー関数, 普遍被覆写像, 双曲計量, 値分布論, 正規族を一切用いず, Bloch の定理から Picard の定理を導く証明をまとめた. 具体的に述べると, Bloch の定理 $\Longrightarrow$ Schottky の定理 $\Longrightarrow$ Picard の大定理 $\Longrightarrow$ Picard の小定理 の順に証明される. 2 章では正規族のいわゆる Montel の理論を解説し, Picard の定理の正規族を用いた別証明を解説した. 2.4 では Picard の小定理 $\Longrightarrow$ Montel-Carathéodory の定理 を, Zalcman の補題を用いて証明する. すなわち, これより Montel-Carathéodory の定理 $\Longleftrightarrow$ Schottky の定理 $\Longleftrightarrow$ Picard の大定理 $\Longleftrightarrow$ Picard の小定理 であることが従う. 2.5 では Riemann の写像定理の正規族を用いた証明を与える. 3 章では Runge の定理を主に文献 [20] に基づいて解説した. Runge の定理は複素平面上だけでなく, 開リーマン面や多変数関数の場合にも一般化され, それぞれがまた深い理論へと繋がっている. また, Runge の定理の応用として, Mittag-Leffler の定理, Weierstrass の定理の証明を解説した.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ で, それぞれを自然数全体, 有理数全体, 整数全体, 実数全体, 複素数全体を表し, $\hat{\mathbb{C}}$ により Riemann 球面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を表す. また, $\Delta(a, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$, $\overline{\Delta}(a, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq R\}$, $\Delta = \Delta(0, 1)$, $\overline{\Delta} = \overline{\Delta}(0, 1)$ とかき表す.

1 Picard の定理

1.1 Bloch の定理と Schottky の定理

真性特異点のもつ基本的な性質を述べる. これは Picard の定理よりかなり弱い主張である.

定理 1.1 (Casorati-Weierstrass の定理 (1868)) $\Delta^*(r) = \{0 < |z| < r\}$ 上の正則関数 f が $z = 0$ で真性特異点をもつとする. そのとき, 像 $f(\Delta^*(r))$ は $\mathbb{C}$ 上稠密である.

Picard の定理を示すための道具は, Bloch の定理と Schottky の定理である.

命題 1.2 単位円板 Δ 上の正則関数 f が $f(0) = 0, f'(0) = 1$ を満たし, $|f(z)| \leq M$ $(z \in \Delta)$ とする. そのとき, $f(\Delta) \supset \Delta(0, 1/4M)$.
したがって, もし f が $\Delta(0, R)$ 上正則で $f(0) = 0, |f| \leq M$ ならば,

$$f(\Delta(0, R)) \supset \Delta\left(0, \frac{|f'(0)|^2 R^2}{4M}\right).$$

定理 1.3 (Bloch の定理 (1925)) 単位円板 $\Delta = \{|z| < 1\}$ 上の正則関数 f が $f'(0) = 1$ を満たすとする. そのとき, 像 $f(\Delta)$ は半径 L の円板を含む. L は絶対定数である.
したがって, もし f が $\Delta(a, R)$ 上で正則であれば, 像 $f(\Delta(a, R))$ は半径 $|f'(a)|RL$ の円板を含む.

定理 1.3 から Picard の小定理を導くことができるが, それは次節で与える. 一方 Picard の大定理を示すためには, Schottky の定理が必要になる. Schottky の定理を示すために, まず補題を与える.

補題 1.4 次の性質が成り立つ.

(1) $\cos \pi a = \cos \pi b$ ならば, $b = \pm a + 2n,\ n \in \mathbb{Z}$.

(2) 任意の $w \in \mathbb{C}$ に対して, 次のような $v \in \mathbb{C}$ が存在する.

$$\cos \pi v = w,\ |v| \leq 1 + |w|.$$

(3) 単連結領域 U 上の正則関数 f が $1, -1$ をとらないとする. そのとき, 次のような U 上の正則関数 F が存在する.

$$f = \cos F.$$

補題 1.5　単連結領域 U 上の正則関数 f が $0, 1$ をとらないとする．そのとき, 次の条件を満たすような U 上の正則関数 g が存在する．

$$f(z) = \frac{1}{2}[1 + \cos \pi(\cos \pi g(z))], \ z \in U, \quad |g(0)| \leq 3 + 2|f(0)|. \tag{1.1}$$

(1.1) を満たす g は次の集合 E の値をとらない．

$$E = \left\{ m \pm \frac{i}{\pi} \log(n + \sqrt{n^2 - 1}) \;\middle|\; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{1.2}$$

さらに, $g(U)$ は半径 1 の円板を含まない．

定理 1.6　(Schottky の定理 (1904))　　$\alpha, r > 0$ のみに依存する正定数 $M(\alpha, r)$ が存在して, 次の不等式が成り立つ．
Δ 上の正則関数 f が $0, 1$ をとらず, $|f(0)| \leq \alpha$ を満たすならば,

$$|f(z)| \leq M(\alpha, r), \ |z| \leq r < 1.$$

1.2　Picard の定理

定理 1.3 (Bloch の定理) と 補題 1.5 を用いて, まず Picard の小定理を証明する．これは言うまでもなく, Liouville の定理を大きく一般化したものである．

定理 1.7　(Picard の小定理 (1879))　　整関数 f(複素平面全体で正則な関数) がとらない値が 2 個以上あれば, f は定数である．

注 1.8　整関数のとらない値の数については, 次のような簡単な例がある．

(1)　$f(z) = z$ は整関数として定義され, とらない値は 0 個である．
(2)　指数関数 $g(z) = e^z$ は整関数として定義され, とらない値は 0 ただ 1 個である．

定理 1.6 (Schottky の定理) からも, Picard の小定理の別証明が得られる．

定理 1.9　(Picard の小定理 (Landau の別証明 1904))

定理 1.6 (Schottky の定理) を用いて, Picard の大定理を証明する． これは定理 1.1 (Casorati-Weierstrass の定理) を大幅に一般化したものである．

定理 1.10　(Picard の大定理 (1879))　　f は点 a の穴あき近傍 $\Delta^*(a, r) = \{0 < |z - a| < r\}$ 上正則で, とらない値が 2 個以上あるとする．そのとき, 点 a は除去可能特異点かまたは極である．

次のような言い換えもよく用いられる．

系 1.11 (Picard の大定理) f は点 a の穴あき近傍 $\Delta^*(a,r) = \{0 < |z-a| < r\}$ 上正則で, 点 a で真性特異点をもつとする. そのとき, 点 a の各近傍で高々 1 つの値を除き, すべての複素数を f が無限回とる.

注 1.12 (Picard の大定理から小定理) Picard の大定理から Picard の小定理は直接従う.

有理型関数の場合の Picard の定理は, 次のように述べられる.

定理 1.13 (有理型関数の Picard の定理)

(1) $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 f がとらない値が $\widehat{\mathbb{C}}$ に 3 個以上あれば, f は定数である.
(2) f が点 a の穴あき近傍 $\Delta^*(a,r) = \{0 < |z-a| < r\}$ 上の有理型関数で, とらない値が $\widehat{\mathbb{C}}$に 3 個以上あるとする. そのとき, 点 a は除去可能特異点かまたは極である.

補足 1.14 ここでは, 主に文献 [1], [7], [22] を参考にした. [14], [28] もほぼ同様の証明を与えている. Picard による Picard の小定理の最初の証明は, 楕円モジュラー関数を用いていた. その証明については, [2], [21] を参照するとよい. 双曲計量を用いる証明も簡明である. [10], [20], [21], [25] に詳しく解説されている. [10], [21] には, 値分布論を用いた Picard の小定理の証明も解説されている. 正規族の Montel の理論を用いた証明も興味深い. それについては, [23] を参照するとよいが, 2 章でも解説する. Bloch は実際は定理 1.3 より精密な結果 (単射円板の半径評価) まで与えている. ([24] 6.12 Theorem 参照.) 定理 1.3 の定数 L は Landau 定数とよばれる. [6], [22] は Picard の定理の歴史について詳しい. これらには Bloch 定数や Landau 定数についての解説もある. 重要な補題 1.5 は [22] で紹介されたものであるが, これは 1957 年に H. König が与えた. また, 1904 年 Landau は Schottky の定理から Picard の小定理を直接導くことに成功したことも注意する ([14] 定理 37.3, [22] p.238, [26] 8.86).

2　正規族

2.1　正規族, Montel の定理

$\mathcal{F}$ を領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の連続関数からなる関数族とする.

定義 2.1　(正規族) $\mathcal{F}$ が**正規族**であるとは, $\mathcal{F}$ に含まれる任意の関数列が, D 上で局所一様収束する部分列をもつ, または局所一様発散する部分列をもつときをいう. ここで局所一様収束とは, D の任意のコンパクト部分集合上で一様収束することである. 局所一様発散とは, D の任意のコンパクト部分集合上で ∞ に一様発散することである

関数族が正規族になる条件について述べるために, いくつかの定義を与える.

定義 2.2　領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の連続関数族 $\mathcal{F}$ を考える.

(1)　$\mathcal{F}$ が点 $a \in D$ で**同程度連続**であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ を適当にとれば

$$z \in D,\ |z-a| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon,\ \forall f \in \mathcal{F}$$

が成り立つことをいう.

(2)　$\mathcal{F}$ が D 上で**局所有界**であるとは, 任意の点 $a \in D$ に対して, 正定数 M と a の近傍 $\Delta(a,r)$ が存在して, $|f(z)| < M, \forall z \in \Delta(a,r),\ \forall f \in \mathcal{F}$ が成り立つことをいう.

(3)　$\mathcal{F}$ がある点 $z_0 \in D$ で**正規**であるとは, z_0 のある近傍で $\mathcal{F}$ が正規族になるときをいう.

局所有界性について, 次の言い換えは有用である.

補題 2.3　領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の連続関数族 $\mathcal{F}$ が局所有界である. $\Longleftrightarrow$
D の任意のコンパクト集合 K に対して, 正定数 $M = M(K)$ が存在して次が成り立つ.

$$|f(z)| < M, \forall z \in K,\ \forall f \in \mathcal{F}.$$

次の定理はよく知られている. 証明は例えば [7] Ch.VII, 1.23 を参照.

定理 2.4　(Arzelà-Ascoli の定理 (1895)) 領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の連続関数族 $\mathcal{F}$ が次の 2 条件を満たすならば, 正規族になる.

(i)　任意の点 $a \in D$ に対して, $\mathcal{F}$ が一様有界である, すなわち $\sup\{|f(a)| \mid f \in \mathcal{F}\} < \infty$.

(ii)　任意の点 $a \in D$ に対して, $\mathcal{F}$ が a で同程度連続である.

正則関数からなる関数族を正則関数族とよぶが, 重要な結果をここで述べる.

命題 2.5　(Montel (1916)) 正則関数族 $\mathcal{F}$ が領域 D で正規族である. $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ が D の任意の点で正規である.

定理 2.6 (Montel の定理 (1907)) 領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数族 $\mathcal{F}$ が局所有界ならば, 正規族である.

2.2 Montel-Carathéodory の定理

ここでは Schottky の定理 (定理 1.6) を用いて, 拡張された Montel の定理, いわゆる Montel-Carathéodory の定理を示す.

定理 2.7 (Montel-Carathéodory の定理 (1912)) $\mathcal{F}$ は 2 個の異なる点 $a, b \in \mathbb{C}$ を値にとらない領域 D 上の正則関数からなる族とする. そのとき, $\mathcal{F}$ は D 上で正規族である.

注 2.8 (Montel-Carathéodory の定理から Schottky の定理) 定理 2.7 では Schottky の定理から Montel-Carathéodory の定理を導いたが, 逆も導ける.

注 2.8 の証明の局所有界性の証明と同様にして, 次の有用な系が示せる.

系 2.9 (Montel (1911)) 領域 D 上の正規族である正則関数族 $\mathcal{F}$ に対して, ある点 $z_0 \in D$ が存在して $\sup\{|f(z_0)| : f \in \mathcal{F}\} < \infty$ とする. そのとき, $\mathcal{F}$ は局所有界である.

すでに Picard の定理を Schottky の定理から導いた. Schottky の定理と同値な Montel-Carathéodory の定理からも Picard の定理が導けることが期待されるが, 実際そうであることを以下示していく.

定理 2.10 (Picard の小定理の正規族を用いた別証明 (Montel (1912)))

定理 2.11 (Picard の大定理の正規族を用いた別証明 (Montel (1912)))

補足 2.12 ここでは主に [7], [23], [24] を参考にした. とくに [23] は正規族に関する専門書で, さらに進んだ内容について解説している. 正規族の定義は, 文献によっては一様発散を含めない定義を採用しているものがあるため, 参照するときに注意が必要である.

2.3 有理型関数の正規族

有理型関数に対しては, リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の**球面距離** $\chi(z_1, z_2)$ を用いるのが便利である.

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z|^2}},\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad \chi(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}},\ z \in \mathbb{C}. \tag{2.1}$$

$\chi(z_1, z_2)$ が球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の距離になり, 次の有用な性質をもつことが容易にわかる.

$$\chi(z_1, z_2) = \chi\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right),\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad |z_1| \leq |z_2| \Rightarrow \chi(0, z_1) \leq \chi(0, z_2). \tag{2.2}$$

有理型関数の連続性を議論するために, 次の概念を導入する.

定義 2.13　f は $\mathbb{C}$ 上の関数, $\mathcal{F}$ は $D \subset \mathbb{C}$ 上の有理型関数の族とする.

(1)　f が $z_0 \in \mathbb{C}$ で**球面距離で連続**であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して次が成り立つときをいう.

$$|z - z_0| < \delta \Longrightarrow \chi(f(z), f(z_0)) < \varepsilon.$$

(2)　$\mathcal{F}$ が D 上で**球面距離で同程度連続**であるとは, 任意の点 $a \in D$ と $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在して次が成り立つことをいう.

$$|z - a| < \delta \Longrightarrow \chi(f(z), f(a)) < \varepsilon, \ \forall f \in \mathcal{F}.$$

定義 2.14　領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の有理型関数の族 $\mathcal{F}$ が D で**正規族**であるとは, $\mathcal{F}$ の任意の関数列が, D の各コンパクト部分集合上球面距離で一様収束する部分列をもつことをいう.

球面距離とユークリッド距離は $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合上で比較可能である. よって, $\{f_n\}$ が集合 S 上球面距離で一様に極限関数 $f \not\equiv \infty$ に収束したならば, f_n は f の極を除いた S の任意のコンパクト集合上で f に一様収束する. このことより, 正則関数に関しては 2 つの正規族の定義は一致することがわかる.

定理 2.15　領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の有理型 (正則) 関数の族 $\{f_n\}$ が, D の各コンパクト部分集合で球面距離で関数 f に一様収束する. $\Longleftrightarrow$ 任意の点 $z_0 \in D$ に対して, 閉円板 $\overline{\Delta}(z_0, r)$ が存在し, その上で $n \to \infty$ のとき

$$|f_n - f| \to 0 \ \text{または} \ \left|\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}\right| \to 0$$

に一様収束する.

有理型関数の正規族は, やはり同程度連続の概念と密接な関係にある.

定理 2.16　(Ostrowski (1926)) 領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上で定義された有理型関数の族 $\mathcal{F}$ が D 上正規である. $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ は D 上球面距離で同程度連続である.

球面距離について, ユークリッド距離に関するものと同様な微分が必要である. 領域 D 上の有理型関数 f と点 $z_0 \in D \subset \mathbb{C}$ について, **球面的微分** $f^{\#}(z_0)$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} f^{\#}(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{\chi(f(z), f(z_0))}{|z - z_0|} \\ &= \frac{|f'(z_0)|}{1 + |f(z_0)|^2}, \end{aligned}$$

f の極 z_0 については,

$$f^{\#}(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}.$$

$f^{\#}(z)$ は連続であり, $f^{\#} = \left(\frac{1}{f(z)}\right)^{\#}$ であることがわかる.

正則関数の正規族において, 鍵となる性質は関数が局所有界であることだった. 一方で, 有理型関数においては, その条件は球面的微分の局所有界性に置き換えられる.

定理 2.17 (Marty の定理 (1931)) 領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上定義された有理型関数の族 $\mathcal{F}$ が D 上正規である. $\Longleftrightarrow$ 各コンパクト集合 $K \subset D$ に対して, 正定数 $M = M(K)$ が存在し次が成り立つ.

$$f^{\#}(z) = \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \leq M, \quad \forall z \in K, \forall f \in \mathcal{F}.$$

正規性を再び局所的な性質として特徴づけることができる.

定義 2.18 有理型関数の族 $\mathcal{F}$ が点 z_0 で正規であるとは, $\mathcal{F}$ が z_0 のある近傍で正規であるときをいう.

定理 2.17 (Marty の定理) と標準的なコンパクト性の議論により, 容易に次の定理を得る.

定理 2.19 有理型関数の族が領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上で正規である. $\Longleftrightarrow$ その族が D の各点で正規である.

補足 2.20 ここでは主に [24] に従った. [23] はさらに発展的な内容を扱っている.

2.4 Bloch 原理

この節では, Zalcman の補題を用いて Picard の小定理から Montel-Carathéodory の定理を導く. さらに, Bloch 原理の改変である Robinson-Zalcman 原理を用いると, Picard の小定理と Montel-Carathéodory の定理の同値性が容易に従うことをみる.

Bloch 原理の起源は, Bloch 自身の 1926 年の論説の一節である. それは次のようである. "*Nihil est in infinito quod non prius fuerit in finito.*" 次のように訳せる. 有限円板で起きなかったことは, 無限平面でも決して起きない. 現代の表現では次のよう仮説である, 性質 $\mathcal{P}$ をもつ $\mathbb{C}$ 上の正則 (有理型) 関数が定数に限るならば, 領域 D 上で性質 $\mathcal{P}$ をもつ正則 (有理型) 関数からなる族は一般に正規であろう.

補題 2.21 (Zalcman の補題 (1975)) $\mathcal{F}$ は単位円板 Δ 上の正則 (有理型) 関数の族とする. そのとき, $\mathcal{F}$ が正規でないことは, 次の主張と同値である. 次の 4 つが存在し

(i) 実数 $0 < r < 1$,
(ii) $|z_n| < r$ である点列 z_n,
(iii) 関数 $f_n \in \mathcal{F}$,
(iv) $n \to \infty$ のとき $\rho_n \to 0$ となる正数 ρ_n,

次の主張が成り立つ.

$$f_n(z_n + \rho_n \zeta) \to g(\zeta),\ n \to \infty \tag{2.4}$$

$\mathbb{C}$ の各コンパクト集合上で球面距離で一様収束する．ただし，ここで $g(\zeta)$ は非定数の $\mathbb{C}$ 上の整関数 (有理型関数).

Picard の小定理から Montel-Carathéodory の定理を導くために，次の古典的な結果が必要である．

定理 2.22　(Hurwitz の定理 (1889)) 領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数族 $\{f_n\}$ は，関数 f に D の各コンパクト集合上で一様収束し $f_n \to f$, ある点 $z_0 \in D$ で $f(z_0) = 0$, $f \not\equiv$ 定数 とする．そのとき，十分小さい円板 $\Delta(z_0, r) \in D$ に対して $n_0(r)$ が存在し，$n > n_0(r)$ ならば関数 f_n と f は $\Delta(z_0, r)$ 内で同じ個数の零点をもつ．ただし，零点は重複を込めて数える．

定理 2.23　(Zalcman　(1975)) Picard の小定理から Montel-Carathéodory の定理が直接従う．

正規性の概念は，関数族が定義される領域に依存して決まる．Bloch 原理を厳密なものにするため，関数をその定義領域と対に考えるべきであり，$D \neq D'$ のとき要素 $\langle f, D\rangle$ と $\langle f, D'\rangle$ を異なるものとみなすべきである．与えられた性質 $\mathcal{P}$ に対し，記号 $\langle f, D\rangle \in \mathcal{P}$ は，関数 f は領域 D 上で性質 $\mathcal{P}$ を満たす，という意味を表すこととする．

Bloch 原理は次の 2 つ命題が同値であることを主張する．
(a) $\langle f, \mathbb{C}\rangle \in \mathcal{P}$ ならば，f は定数．
(b) 各領域 D について，関数族 $\{f : \langle f, D\rangle \in \mathcal{P}\}$ は D 上正規である．

しかし，Bloch 原理は一般には成立しない．Bloch 原理を満たさない例については，[4], [23], [29] を参照．Zalcman の補題は，次のような Bloch 原理の定式化を導く．

定理 2.24　(Robinson-Zalcman の原理 (1975)) 有理型関数の性質 $\mathcal{P}$ が次の 3 条件を満たすとする:

(i)　$\langle f, D\rangle \in \mathcal{P}$ ならば，各 $D' \subset D$ について $\langle f|_{D'}, D'\rangle \in \mathcal{P}$.
(ii)　$\langle f, D\rangle \in \mathcal{P}$ で $\varphi(z) = az + b$ $(a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0)$ ならば，$\langle f \circ \varphi, \varphi^{-1}(D)\rangle \in \mathcal{P}$.
(iii)　すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\langle f_n, D_n\rangle \in \mathcal{P}$ で，$D_1 \subset D_2 \subset \ldots$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \mathbb{C}$ のとき，$\mathbb{C}$ 上の各コンパクト集合上一様に $f_n \to f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ ならば，$\langle f, \mathbb{C}\rangle \in \mathcal{P}$.

そのとき，次の 2 つの主張は同値である．

(a)　$\langle f, \mathbb{C}\rangle \in \mathcal{P}$ ならば，f は定数．
(b)　各領域 D について，関数族 $\{f : \langle f, D\rangle \in \mathcal{P}\}$ は D 上正規である．

定理 2.24 (Robinson-Zalcman の原理) より，次の系を得る．

系 2.25　Picard の小定理と Montel-Carathéodory の定理は同値である．

補足 2.26　ここでは主に [4], [23], [24] に従った．Zalcman の原論文 [29] にあたるのもよい．

2.5 Riemann の写像定理

複素解析の最重要結果のひとつが Riemann の写像定理である．1851 年 Riemann は学位論文で Dirichlet の原理に基づいた証明を発表したが, 誤りを含んでいた．初めて厳密な証明を与えたのは, 1900 年の W.F. Osgood の論文である．ここでは正規族の議論に基づく証明を与えるが, その着想は主に P. Koebe の 1907 年の論文のものである．

定理 2.27 (Riemann の写像定理 (1900)) 単連結領域 $D \subsetneq \mathbb{C}$ と点 $z_0 \in D$ に対して, ただひとつの単葉正則関数 $w = f(z)$ で, D を単位円板 Δ に写し, $f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0$ となるものが存在する．

補足 2.28 ここでは [23], [24] を参考にした．Riemann の写像定理を含め, Riemann の一意化定理の歴史については [8], [22] が詳しい．

3　Runge の定理

ここでは, 主に文献 [20] に従って解説する.

3.1　非斉次 Cauchy-Riemann 方程式

Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合, $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ は Ω の開被覆とする.

定義 3.1　$\mathcal{U}$ に従属する 1 **の分割**とは, Ω 上の C^∞ 級関数の族 $\{\phi_i\}_{i\in I}$ で次の性質を満たすものである.

(1)　ϕ_i は実数値, $\phi_i \geq 0$ で, $\mathrm{supp}(\phi_i) \subset U_i$.
(2)　閉集合族 $\{\mathrm{supp}(\phi_i)\}_{i\in I}$ は局所有限である. つまり任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ に対し, 集合 $\{i \in I : K \cap \mathrm{supp}(\phi_i) \neq \phi\}$ は有限集合である.
(3)　Ω 上 $\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \equiv 1$.

1 の分割の存在定理はよく知られている. 証明は例えば [20] Ch.5, 1 を参照.

定理 3.2　Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合, $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ は Ω の開被覆とする. そのとき, $\mathcal{U}$ に従属する 1 の分割が存在する.

有用な命題を与える. $\boldsymbol{C^\infty(\Omega)}$ は Ω 上無限回微分可能な関数からなる集合, $\boldsymbol{C_C^\infty(\Omega)}$ は, Ω 上無限回微分可能で, サポートが Ω に含まれる関数からなる集合を表す.

命題 3.3　Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合, $F \subset \Omega$ は Ω の閉部分集合, U は $F \subset U$ となる Ω の開集合とする. そのとき, $\phi \in C^\infty(\Omega)$ で, $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi|_F = 1$, $\phi|_{\Omega - U} = 0$ となるものが存在する.

命題 3.4　Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合, $F_1, F_2 \subset \Omega$ は Ω の閉部分集合で $F_1 \cap F_2 = \phi$ とする. $\phi_1, \phi_2 \in C^\infty(\Omega)$ とする. そのとき, $\phi \in C^\infty(\Omega)$ で, $\phi|_{F_1} = \phi_1|_{F_1}$, $\phi|_{F_2} = \phi_2|_{F_2}$ となるものが存在する.

補題 3.5　R, R' は $\mathbb{C}$ の閉長方形で, $R' \subset \mathrm{int}R$ (R の内部) とする. U を $R - \mathrm{int}R'$ を含む開集合とする. $\phi \in C^\infty(U)$ について, 次の式が成り立つ.

$$2i \iint_{R-R'} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}\, dxdy = \int_{\partial R} \phi\, dz - \int_{\partial R'} \phi\, dz. \tag{3.1}$$

命題 3.6　$\phi \in C_C^\infty(\mathbb{C})$ とする. 任意の $w \in \mathbb{C}$ について, 次の等式が成り立つ.

$$\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z-w}\, dxdy = -\pi\phi(w). \tag{3.2}$$

定理 3.7　$\phi \in C_C^\infty(\mathbb{C})$ とする. $\mathbb{C}$ 上の関数 u を次のように定める.

$$u(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta,\ \zeta = \xi + i\eta. \tag{3.3}$$

そのとき, $u \in C^\infty(\mathbb{C})$ で, 次が成り立つ.

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \phi.$$

定理 3.8 (コーシーの積分公式の変異形) Ω を $\mathbb{C}$ の開集合, K を Ω のコンパクト部分集合とする. 関数 $\alpha \in C_C^\infty(\Omega)$ は K のある近傍で $\alpha = 1$ とする. そのとき, Ω 上の任意の正則関数 f について, 次がなりたつ.

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{\zeta}} \cdot \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta, \quad z \in K. \tag{3.4}$$

3.2 Runge の定理

ここで Runge の定理を述べるために, 位相について次の補題を用意する.

補題 3.9 X を位相空間, $A \subset B \subset X$ とする. B に X からの相対位相を入れ, A の B の相対位相に関する閉包を $\overline{A}^B$ とかき, A の X の位相に関する閉包を $\overline{A}$ とかく.

(1) $\overline{A}^B = \overline{A} \cap B.$

(2) A が B の相対位相でコンパクト $\Longleftrightarrow$ A が X の位相でコンパクト.

今 $A \subset B \subset \mathbb{C}$ とする. ($\mathbb{C}$ の代わりに, ハウスドルフ空間 X でもよい.)

(3) $\overline{A}^B$ がコンパクト (A は B で相対コンパクト) $\Longleftrightarrow$ $\overline{A} \subset B$ かつ $\overline{A}$ がコンパクト.

証明 (1) $A' = \{X$ における A の集積点 $\}$, $A'^B = \{B$ における A の集積点 $\}$ とおく. そのとき, $\overline{A} = A \cup A'$, $\overline{A}^B = A \cup A'^B$ とかける. $A'^B = A' \cap B$ から結論が従う. (2) は容易である. ([17] p.49 を参照.)
(3) ($\Longleftarrow$) $\overline{A}^B = \overline{A} \cap B = \overline{A}$ であるから明らか.
($\Longrightarrow$) $\overline{A}^B = A \cup (A' \cap B)$ がコンパクトとする. ハウスドルフ空間のコンパクト部分集合は閉集合であるから ([16] Prop. 4.36.), $\overline{A}^B$ は $\mathbb{C}$ の (または X の) 閉集合である. 今 $A' \subset B$ を示す. 任意の点 $a \in A'$ をとる. もし $a \in A$ ならば明らかに $a \in B$ であるから, $a \in A' \setminus A$ とする. a の任意の近傍 U について $U \cap (A - \{a\}) \neq \phi$ だから, $U \cap (\overline{A}^B - \{a\}) \neq \phi$. したがって, a は $\overline{A}^B$ の集積点であり, $\overline{A}^B$ は閉集合なので, $a \in \overline{A}^B$. よって $A' \subset \overline{A}^B = A \cup (A' \cap B)$, つまり $A' \subset B$ が従う. 以上より, $\overline{A} = A \cup A' \subset B$, $\overline{A} = \overline{A}^B$ がコンパクトがわかる. □

注 3.10 補題 3.9 (3) の状況を理解するためには, 次のような例を考えるとよい.
$A = \{0 < |z| < 1\}$, $B = \mathbb{C} - \{0\}$. そのとき, $\overline{A}^B = \{0 < |z| \leq 1\}$, $\overline{A} = \{|z| \leq 1\} \not\subset B$.

Ω を $\mathbb{C}$ の開集合, K を $\mathbb{C}$ のコンパクト集合とする. $\boldsymbol{\mathcal{O}(\Omega)}$ は Ω 上の正則関数全体からなる集合とする. また, $\boldsymbol{\mathcal{O}(K)}$ は K 上の連続関数で, K を含むある開集合上の正則関数の K への制限に一致するもの全体からなる集合とする. また, K 上の連続関数 ϕ に対し,

$$\|\phi\|_K = \sup_{z \in K} |\phi(z)|$$

とおく. K 上の連続関数 ϕ 全体からなる集合 $\boldsymbol{\mathcal{C}(K)}$ は, $\|\phi\|_K$ をノルムとする Banach 空間になる. $\mathcal{O}(K)$ は $\mathcal{C}(K)$ の部分集合と考える.

$\mathbb{C}$ の開集合 Ω に対して, $\mathcal{O}(\Omega)$ に位相を次のように定める. $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ の基本近傍系として次の集合をとる.

$$U(f; K, \varepsilon) = \{g \in \mathcal{O}(\Omega) : \|f - g\|_K < \varepsilon\},\ K \text{ は } \Omega \text{ のコンパクト部分集合},\ \varepsilon > 0.$$

この位相は距離付け可能である. 実際, この位相は次の距離で定まる.

Ω のコンパクト集合の列 $\{K_n\}_{n\geq 1}$ で, $K_n \subset \mathrm{int}(K_{n+1})$, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$ となるものを選ぶ. このとき, $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ に対して, 次のように f, g の距離 $d(f, g)$ を定義する.

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\|f - g\|_K}{1 + \|f - g\|_K}.$$

この距離に関して, $\mathcal{O}(\Omega)$ は完備距離空間になる. この位相はコンパクト一様収束の位相, またはコンパクト開位相とよばれることがある.

今, $\mathbb{C}$ の開集合 Ω と, Ω のコンパクト部分集合 K があるとする. そのとき, 制限写像 $\rho = \rho_{\Omega,K} : \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(K)$ を, $\rho(f) = f|_K$ と定める.

定理 3.11 (Runge の定理 : 第 1 型) $\mathbb{C}$ の開集合 Ω と, Ω のコンパクト部分集合 K があるとする. そのとき, 次の (i) $\sim$ (iii) は互いに同値である.

(i) $\rho(\mathcal{O}(\Omega))$ は $\mathcal{O}(K)$ で ($\mathcal{C}(K)$ から誘導される位相に関して) 稠密である.
(ii) $\Omega - K$ のいずれの連結成分も, Ω で相対コンパクトでない.
(注 : U が Ω で相対コンパクト $\Leftrightarrow$ ($\mathbb{C}$ での閉包) $\overline{U} \subset \Omega$ かつ $\overline{U}$ がコンパクト. 補題 3.9 (3) 参照.)
(iii) 任意の $a \in \Omega - K$ に対して, ある $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ が存在して, $|f(a)| > \|f\|_K$ となる.

定義 3.12 $\Omega \subset \mathbb{C}$ を開集合とする. A を Ω の部分集合とする. $\hat{A} = \boldsymbol{\hat{A}_\Omega}$ を, A と $\Omega - A$ の Ω で相対コンパクトな連結成分の和と定義する.

例 3.13 ($\hat{A}_\Omega$ の例)

(1) $\Omega = \mathbb{C}, K = \{|z| = 1\}$ のとき, $\hat{K}_\Omega = \{|z| \leq 1\}$, $\Omega - \hat{K}_\Omega = \{|z| > 1\}$ である.
(2) $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}, K = \{|z| = 1\}$ のとき, $\hat{K}_\Omega = K$, $\Omega - \hat{K}_\Omega = \{|z| > 1\} \cup \{0 < |z| < 1\}$ である.

注 3.14 $\Omega \subset \mathbb{C}$ を開集合, K を Ω のコンパクト部分集合とする. このとき, $\hat{K}_\Omega$ は次のようにかき表せることがわかる.

$$\hat{K}_\Omega = \{z \in \Omega : |f(z)| \leq \|f\|_K,\ \forall f \in \mathcal{O}(\Omega)\}. \tag{3.5}$$

この性質のため, $\hat{K}_\Omega$ は K の**正則凸包**とよばれる.

証明 (3.5) の右辺を L とおく．明らかに $K \subset L$ である．定理 3.11 の (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) により，$\Omega - \hat{K}_\Omega \subset \Omega - L$, つまり $L \subset \hat{K}_\Omega$ がわかる．次に, 定理 3.11 の (iii) $\Rightarrow$ (ii) の証明により，$\hat{K}_\Omega$ の K 以外の Ω で相対コンパクトな連結成分 U について, $U \subset L$ がわかる．よって，$\hat{K}_\Omega \subset L$ が従う． □

注 3.15　正則凸包の概念を用いると, 定理 3.11 (iii) の条件は, $K = \hat{K}_\Omega$ であることに他ならない．このとき, K は Ω 内の**正則凸集合**であるとよばれる．

命題 3.16　$\Omega \subset \mathbb{C}$ を開集合, K を Ω のコンパクト部分集合とする．そのとき, $\hat{K}_\Omega$ はまたコンパクトである．さらに, $\mathbb{C} - \hat{K}_\Omega$ は高々有限個の連結成分しかもたない．

定理 3.17　(古典的 Runge の定理 (1885)) $\Omega \subset \mathbb{C}$ は開集合, $\mathbb{C} - \Omega = \bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha$ は連結成分への分解とする．$A' \subset A$ を $A' = \{\alpha \in A : C_\alpha$ は有界 $\}$ とおく．任意の $\alpha \in A'$ について，$a_\alpha \in C_\alpha$ を選ぶ．そのとき, 任意の $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ は, $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A'}$ の中にのみ極をもつ有理関数によって, Ω の任意のコンパクト集合上で一様に近似できる．

3.3　Runge 対

ここでは主に [12], [20], [22] に従って解説する．定理 3.11 (Runge の定理 : 第 1 型) を 2 つの開集合の場合に一般化した問題を扱う．そのためにいくつか位相の性質について準備する．

補題 3.18　次の性質が成り立つ．

(1)　2 つの開集合 $\Omega \subset \Omega' \subset \mathbb{C}$ がある．$\Omega' \setminus \Omega$ の空でない $(\Omega' \setminus \Omega)$ 開コンパクト集合 A に対して, Ω' の相対コンパクトな (Ω') 開集合 V が存在して, $A \subset V$, $\partial V \subset \Omega$ を満たす．

(2)　位相空間 X の開かつ閉の集合 A は, X の連結成分の和で表せる．

定理 3.19　(Šura-Bura の定理 (1941)) 局所コンパクト Hausdorff 空間 X のコンパクトな連結成分 K は, X の開かつ閉である集合からなる基本近傍系をもつ．

直ちに, あとで必要となる重要な結果を得る．

系 3.20　局所コンパクト Hausdorff 空間 X について, X はコンパクトな連結成分をもつ．$\Longleftrightarrow$ X は空でない開コンパクト集合をもつ．

以上の準備の下, 2 つの開集合に関する Runge の問題を考える．

定義 3.21　2 つの開集合 $\Omega \subset \Omega' \subset \mathbb{C}$ について, (Ω, Ω') が **Runge 対**であるとは, 任意の関数 $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ が, $\mathcal{O}(\Omega')$ の関数によって Ω の各コンパクト集合上で一様に近似されるときをいう．つまり, $\forall \varepsilon > 0, \forall$ コンパクト集合 $K \subset \Omega$ に対して, $\exists g \in \mathcal{O}(\Omega')$ s.t. $\|f - g\|_K < \varepsilon$.

定理 3.11 (Runge の定理 : 第 1 型) を 2 つの開集合の場合に一般化した特徴づけを与

える.

定理 3.22 (Runge の定理 : 第 2 型) 2 つの開集合 $\Omega \subset \Omega' \subset \mathbb{C}$ に対して, 次の条件 (i) $\sim$ (vi) は同値である.

(i) (Ω, Ω') は Runge 対である.
(ii) 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について, $\hat{K}_{\Omega'} = \hat{K}_{\Omega}$.
(iii) 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について, $\hat{K}_{\Omega'} \cap \Omega = \hat{K}_{\Omega}$.
(iv) 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について, $\hat{K}_{\Omega'} \cap \Omega$ はコンパクトである.
(v) $\Omega' \setminus \Omega$ は 空でない $(\Omega' \setminus \Omega)$ 開コンパクト集合をもたない.
(vi) $\Omega' \setminus \Omega$ はコンパクトな連結成分をもたない.

3.4 Mittag-Leffler の定理

Runge の定理の応用として, Mittag-Leffler の定理を示す.

定理 3.23 (Mittag-Leffler の定理 (1884 : $\Omega = \mathbb{C}$ の場合)) $\Omega \subset \mathbb{C}$ は開集合, $E \subset \Omega$ は離散部分集合とする. $z \in \Omega$ に対して, $\mathbb{C}^*_z = \mathbb{C} - \{z\}$ とかく. 各 $a \in E$ に対して, $p_a \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*_a)$ が与えられたとする. そのとき, $f \in \mathcal{O}(\Omega - E)$ で, $f - p_a$ が各 $a \in E$ で正則であるようなものが存在する.

系 3.24 (Mittag-Leffler の定理 2) 定理 3.23 の条件「$p_a \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*_a)$」を, 「ある a の近傍 U_a と $\phi_a \in \mathcal{O}(U_a - \{a\})$」に置き換えた主張も正しい.

証明 p_a として ϕ_a の主要部をとり, 定理 3.23 を適用すればよい. □

次の定理は、定理 3.7 の一般化であるが, 応用上重要である.

定理 3.25 $\Omega \subset \mathbb{C}$ は開集合, $\phi \in C^\infty(\Omega)$ とする. そのとき, $u \in C^\infty(\Omega)$ で次の方程式を満たすものが存在する.

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(z) = \phi(z),\ z \in \Omega.$$

次の定理は, 層係数コホモロジー群の言葉で記述できる性質であるが, 色々な分野で重要である. ここで, $C^\infty(\phi) = \{0\}$ と定めておく.

定理 3.26 $\Omega \subset \mathbb{C}$ は開集合, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ は Ω の開被覆とする. 各 $i, j \in I$ について, 関数 $\phi_{ij} \in C^\infty(U_i \cap U_j)$ が与えられていて, 次の関係式が成り立つとする.

$$\phi_{ij} + \phi_{jk} = \phi_{ik},\ U_i \cap U_j \cap U_k \text{ 上},\ \forall i, j, k \in I. \tag{3.6}$$

そのとき, 関数族 $\{\phi_i\}_{i \in I}$, $\phi_i \in C^\infty(U_i)$ が存在して, 次が成り立つ.

$$\phi_i - \phi_j = \phi_{ij},\ U_i \cap U_j \text{ 上},\ \forall i, j \in I.$$

次の定理より, 系 3.24 (Mittag-Leffler の定理 2) の別証明を与えることができる. ここで, $\mathcal{O}(\phi) = \{0\}$ と定めておく.

定理 3.27　$\Omega \subset \mathbb{C}$ は開集合, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ は Ω の開被覆とする. 各 $i, j \in I$ について, 関数 $f_{ij} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ が与えられていて, 次の関係式が成り立つとする.

$$f_{ij} + f_{jk} = f_{ik},\ U_i \cap U_j \cap U_k \text{ 上},\ \forall i, j, k \in I.$$

そのとき, 関数族 $\{f_i\}_{i\in I},\ f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ が存在して, 次が成り立つ.

$$f_i - f_j = f_{ij},\ U_i \cap U_j \text{ 上},\ \forall i, j \in I.$$

注 3.28　層係数コホモロジー群の言葉を用いると, 定理 3.26, 定理 3.27 の主張はそれぞれ, $H^1(\mathcal{U}, C^\infty) = 0,\ H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = 0$ と述べることができる. 詳しくは [9], [20] を参照.

注 3.29　(Mittag-Leffler の定理 2 の別証明) 定理 3.27 を用いて, 系 3.24 の別証明を与えることができる.

証明 $E \subset \Omega$ は離散集合とする. U_a を点 $a \in E$ の近傍で $U_a \cap E = \{a\}$ となるものとし, $p_a \in \mathcal{O}(U_a - \{a\})$ とする. 新しい記号 $*$ を導入し, $I = \{*\} \cup E$ とおく. $U_* = \Omega - E,\ p_* = 0$ と定める. 各 $i, j \in I$ に対し, $f_{ij} = p_i - p_j$ ($U_i \cap U_j$ 上) とおく. このとき, $f_{ij} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ である. 定理 3.27 より, 関数族 $\{f_i\}_{i\in I},\ f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ で, $f_i - f_j = f_{ij} = p_i - p_j$ ($U_i \cap U_j$ 上) を満たすものが存在する. このとき, 関数 f を $f = p_i - f_i$ ($U_i - E$ 上) と定めると, $f \in \mathcal{O}(\Omega - E)$ となる. また, $f - p_a = -f_a \in \mathcal{O}(U_a)$ だから, f が求める関数である. □

3.5　Weierstrass の定理

$\mathbb{C}$ 上の領域で与えられた離散的な点集合で指定された位数をもつ有理型関数の存在を, 定理 3.11(Runge の定理 : 第 1 型) を用いて証明する.

定理 3.30　(Weierstrass の定理 (1876 : $\Omega = \mathbb{C}$ の場合)) $\Omega \subset \mathbb{C}$ は開集合, $E \subset \Omega$ は離散部分集合とする. 各 $a \in E$ に対して, 整数 k_a が与えられている. そのとき, Ω 上の有理型関数 f で, 次の条件を満たすものが存在する:

(i)　$f|_{\Omega - E}$ が正則で, 至るところ 0 にならない.
(ii)　任意の $a \in E$ で, $(z - a)^{-k_a} f(z)$ は正則で 0 でない.

Weierstrass の定理の応用として, 開集合上の正則関数ですべての境界点で特異であるようなものが構成できる. これは, Mittag-Leffler と Runge によって独立に示された.

定義 3.31　$\Omega \subset \mathbb{C}$ は連結開集合とする. $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, X は $\partial\Omega$ の閉部分集合とする. f が X のすべての点で**特異**であるとは, 次が成り立つことをいう:
$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ は連続曲線で, $\gamma(t) \in \Omega$ $(0 \le t < 1)$, $\gamma(1) \in X$ とする. そのとき f の $\gamma(0)$ における芽が γ に沿って解析接続できない.

もし $X = \partial\Omega$ の場合, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ は $\partial\Omega$ のすべての点で特異であるといい, $\partial\Omega$ は f の**自然境界**であるという.

定理 3.32 (Mittag-Leffler (1884), Runge (1885)) $\Omega \subset \mathbb{C}$ は連結開集合とする．そのとき, $\partial\Omega$ を自然境界にもつ $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ が存在する.

次の定理も有用である.

定理 3.33 $\Omega \subset \mathbb{C}$ は開集合, $E \subset \Omega$ は離散部分集合とする．各 $a \in E$ と a の近傍 $U_a \subset \Omega$ に対して, 自然数 k_a と関数 $\phi_a \in \mathcal{O}(\Omega - \{a\})$ が与えられている．そのとき, $f \in \mathcal{O}(\Omega - E)$ で, 次の条件を満たすものが存在する:

$$f - \phi_a \text{ は } a \text{ で正則}, \ \mathrm{ord}_a(f - \phi_a) > k_a \ (\forall a \in E).$$

補足 3.34 ここでは, 主に [20] に従って解説した．ただし, 補題 3.16 の証明の一部は, [13] に習い, 正則凸包の性質を用いる証明を採用した．Runge の定理を解説した他の書籍は, [1], [5], [6], [7], [9], [10], [11], [12], [13], [15], [18], [21], [22], [27], [28] などがある．これらはほとんど全て, Mittag-Leffler の定理, Weierstrass の定理も解説している．しかし, 非斉次コーシー・リーマン方程式を用いた Runge の定理の証明を解説した書籍は [12], [18], [19], [20] のみであるが, その手法は B. Malgrange のものである．また, ここでは Mittag-Leffler の定理と Weierstrass の定理をともに Runge の定理を用いて示したが, Runge の定理を用いなくても証明することはできる．それについては, 上記の書籍のどれかを参照するとよい.

参考文献

[1] M. Andersson, *Topics in Complex Analysis*, Springer, 1997.

[2] R. Beals, R. S. C. Wong, *Explorations in Complex Functions*, Springer, 2020.

[3] R. Beals, R. S. C. Wong, *More Explorations in Complex Functions*, Springer, 2023.

[4] W. Bergweiler, *Bloch Principle*, Comput. Methods Funct. Theory, 6 (2006), 77-108.

[5] J. Bruna, J. Cufí, *Complex Analysis*, European Mathematical Society, 2013.

[6] R.B. Burckel, *Classical Analysis on the Complex Plane*, Birkhäuser, 2021.

[7] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable I*, Second Edition, Springer, 1978. (初版 1973.)

[8] H.P. de Saint-Gervais, *Uniformization of Riemann Surfaces*, European Mathematical Society, 2016.

[9] O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Springer, 1981. (初版 1977.)

[10] 藤本担孝, 複素解析, 岩波オンデマンド, 2019. (初版 2006.)

[11] M. Heins, *Complex Function Theory*, Academic Press, 1968.

[12] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Third Edition, North-Holland, 1990. (初版 1966.)

[13] 笠原乾吉, 複素解析, 筑摩書房, 2016. (初版 1978.)

[14] 小松勇作, 復刊 函数論, 朝倉書店, 2004. (初版 1960.)

[15] 楠幸男, 復刊 函数論 – リーマン面と等角写像 –, 朝倉書店, 2023. (初版 1973.)

[16] J. M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, Second Edition, Springer, 2011. (初版 2000.)

[17] 宮島静雄, 関数解析, 横浜図書, 2005.

[18] T. Napier, M. Ramachandran, *An Introduction to Riemann Surfaces*, Birkhäuser, 2011.

[19] R. Narasimhan, *Analysis on Real and Complex Manifolds*, North-Holland, 1985. (初版 1968.)

[20] R. Narasimhan, Y. Nievergelt, *Complex Analysis in One Variable*, Second Edition, Birkhäuser, 2001. (初版 1985.)

[21] 野口潤次郎, 複素解析概論, 裳華房, 1993.

[22] R. Remmert, *Classical Topics in Complex Function Theory*, Springer, 2010. (初版 1994.)

[23] J. L. Schiff, *Normal Families*, Springer, 1993.

[24] J. L. Schiff, *Topics in Complex Analysis*, De Gruyter, 2022.

[25] 志賀啓成, 複素解析学 II, 培風館, 1999.

[26] E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Second Edition, Oxford University Press, 1979. (初版 1932.)

[27] D. Varolin, *Riemann Surfaces by way of Complex Analytic Geometry*, American Mathematical Society, 2011.

[28] 吉田洋一, 函数論 第 2 版, 岩波オンデマンド, 2015. (初版 1965.)

[29] L. Zalcman, *A heuristic principle in complex function theory*, Amer. Math. Monthly, 82 (1975), 813-817.