Meromorphic solutions of linear difference equations [*1]

「等角写像論・値分布論」研究集会　九州大学・西新プラザ

2024 年 2 月 12 日

石崎 克也 (放送大学)[*2*3]

1　導入

本講演では，複素領域での多項式係数線型差分方程式の有理型函数解の存在定理と増大の位数の関係について，これまでの先行研究と最近の結果を踏まえて報告する。線型・非線型によらず複素平面上での差分方程式に代表される離散函数方程式の可積分性の判定には様々な方法が知られている[*4*5]。

線型差分方程式の解の存在定理については，Nörlund [48], Praagman [49] などの成果が知られているが，解の函数論的性質を知る情報はあまり得られない。ここでは，Nevanlinna 理論と 2 項級数（binomial series）を用いた有理型函数解の構成法を紹介する。

函数 f に対して，差分作用素を $\Delta f(z) = f(z+1) - f(z)$ で定義する。$\Delta^0 f = f$ とし，自然数 n に対して高階差分を $\Delta^n f(z) = \Delta(\Delta^{n-1} f(z))$ で与える。次に，下降階乗冪（falling factorial）を $z^{\underline{0}} = 1$,

$$z^{\underline{n}} = z(z-1)\cdots(z-n+1) = n!\binom{z}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{1.1}$$

とする。下降階乗冪について，微分演算の $(z^n)' = nz^{n-1}$ に対応する特徴的な公式

$$\Delta z^{\underline{n}} = (z+1)^{\underline{n}} - z^{\underline{n}} = nz^{\underline{n-1}} \tag{1.2}$$

が成立する。下降階乗冪を用いて表される形式級数

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\underline{n}}, \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1.3}$$

を以下で評価をしていく。任意に固定された z に対して，$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z^{\underline{n}}|$ が収束するとき，(1.3) の $Y(z)$ は z において絶対収束すると言う。ここでは，$Y(z)$ の極限函数を $y(z)$ と表す。複素数列 $\{\alpha_n\}$ に対して，$\{\alpha_n\}$ の特徴を表す値として

$$\chi(\{\alpha_n\}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{n \log n}{-\log|\alpha_n|} \tag{1.4}$$

[*1] Keywords: difference operator, difference equations, binomial series, recurrence relations, order of growth, entire and meromorphic functions, difference Riccati equation

[*2] Supported by JSPS KAKENHI Grant Number 23K03154

[*3]2-11 Faculty of Liberal Arts, The Open University of Japan, Wakaba 2-11, 261-8586 Mihama-ku, Chiba, Japan

[*4]判定法には，連続極限法，Nevanlinna 理論，特異点拘束法，代数的エントロピー法などがある。例えば [1], [16], [17], [18] などを参照のこと。

[*5]一般の差分方程式の解説書には [32], [33] などがある。

を定義する[*6]。今回の講演の主定理は

定理 1.1 ([26, Theorem 1.1]) 形式級数 (1.3) において $\chi(\{a_n\}) < 1$ とする。このとき，$Y(z)$ は $\mathbb{C}$ 上の任意のコンパクト集合上一様に整函数 $y(z)$ に収束する。さらに，$y(z)$ の増大の位数[*7]は，$\chi(\{a_n\})$ と一致する。

2 準備

先ず，Euler の Γ 函数の性質を思い起こす[*8]

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!\ n^z}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}. \tag{2.1}$$

上式 (2.1) において z のところを $-z$ で置き換えて

$$z^{\underline{n}} = \frac{(-1)^n (n-1)! n^{-z}}{\Gamma(-z)}(1+o(1)) = \frac{(-1)^n n!}{\Gamma(-z) n^{1+z}}(1+o(1)), \quad n\to\infty \tag{2.2}$$

を得る。Γ 函数は $\mathbb{C}$ で零点を持たないことから，(2.2) より，次の補題を得る：

補題 2.1 任意の $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$ に対して

$$|z^{\underline{n}}| \sim \frac{n!}{n^{1+\Re z}}, \quad n\to\infty$$

が成り立つ[*9*10]。

次に，下降階乗巾 $z^{\underline{n}}$ と単項式 z^n の関係を記述する Stirling 数の性質について復習する。$n \geq 2$ を整数として

$$z^{\underline{n}} = z^n + \sum_{j=1}^{n-1} \eta_{j,n}\, z^j, \tag{2.3}$$

[*6] 第 7 節 第 7.4 項を参照のこと。

[*7] 複素平面上で有理型函数 f に対して，f の増大の位数は

$$\rho(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}$$

で与えられる。特に，f が整函数の場合は，$\rho(f) = \limsup_{r\to\infty} \log\log M(r,f)/\log r$ と表すことができる。ここで，$T(r,f)$ は Nevanlinna の特性函数で，$M(r,f) = \max_{|z|=r}|f(z)|$ である。第 7 節 7.4 項も参照のこと。

[*8] 例えば，[44, p. 257], [59, p. 237] などを参照のこと。

[*9] $\{\phi_n\}$ と $\{\psi_n\}$ を正値数列とする。$n\to\infty$ のとき，$\phi_n = O(\psi_n)$ と $\psi_n = O(\phi_n)$ が共に成立するとき $\phi_n \sim \psi_n$ と表す。

[*10] 記号 $\Re z$ で複素数 z の実部を表す。

ここで，$\eta_{n,n}=1$，$\eta_{0,n}=0$ とする。このとき，$\eta_{j,n}$ は漸化式

$$\eta_{j,n+1}=\eta_{j-1,n}-n\,\eta_{j,n},\quad 1\le j\le n \tag{2.4}$$

満たす。また，

$$z^n=z^{\underline{n}}+\sum_{k=1}^{n-1}\widetilde{\eta}_{k,n}\,z^{\underline{k}}, \tag{2.5}$$

ここで，$\widetilde{\eta}_{n,n}=1$, $\widetilde{\eta}_{0,n}=0$ とする。$\widetilde{\eta}_{j,n}=0$ について

$$\widetilde{\eta}_{k,n+1}=\widetilde{\eta}_{k-1,n}+k\,\widetilde{\eta}_{k,n},\quad 1\le k\le n \tag{2.6}$$

が成立する。式 (2.3) の $\eta_{j,n}$ と式 (2.5) の $\tilde{\eta}_{k,n}$ はそれぞれ $z^{\underline{n}}$ に関する第 1 種，第 2 種の Stirling 数と呼ばれている。

補題 2.2 （[26, Lemma 2.2]） 第 1 種，第 2 種の Stirling 数に対して，以下の評価式が成り立つ

$$|\eta_{j,n}|\le\left(\frac{(n-1)!}{(j-1)!}\right)^2\frac{1}{(n-j)!},\quad 1\le j\le n, \tag{2.7}$$

$$|\widetilde{\eta}_{k,n}|\le\left(\frac{(n-1)!}{(k-1)!}\right)^2\frac{1}{(n-k)!},\quad 1\le k\le n. \tag{2.8}$$

3 定理 1.1 の証明

定理 1.1 の証明の前に，Stirling の公式を思い出しておく

$$n!\sim n^n\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n},\quad n\to\infty \tag{3.1}$$

この公式は，(1.3) の $\{a_n\}$ の漸近評価に役立つ[*11]。

定理 1.1 の証明 先ず，形式級数 $Y(z)$ が整函数 $y(z)$ に収束することを示す。(1.4) より，任意の $\varepsilon>0$ に対して，十分大きな n に関して

$$\frac{n\log n}{-\log|a_n|}\le\chi(\{a_n\})+\varepsilon$$

が成り立つ。正数 ε を $\chi(\{a_n\})+\varepsilon<1$ を満たすように十分小さく選ぶ。簡単のため，$\gamma=1/(\chi(\{a_n\})+\varepsilon)>1$ と置く。このとき，十分大きな n に対して $|a_n|<n^{-\gamma n}$ が成り立つ。定義から，$z^{\underline{n}}$ は大きな自然数 n では零になるので，z が非負の整数であれば，$Y(z)$ は z において収束する。以下では，z は自然数でないとする。補題 2.1 と (3.1) より，

$$|a_n||z^{\underline{n}}|\le n^{-\gamma n}\frac{n!}{n^{1+\Re z}}\sim\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}\frac{1}{n^{1+\Re z}}n^{(1-\gamma)n} \tag{3.2}$$

*11 例えば，[56, p. 58], [59, p. 253] などを参照のこと。

を得る。式 (3.2) の右辺に d'Alembert's の判定法[*12]を用いて，$Y(z)$ は $y(z)$ に $\mathbb{C}$ 上広義一様収束することが解る。

次に，$\rho(y)$ が $\chi(\{a_n\})$ と一致することを示す。整函数 y を Taylor 展開して

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad b_n \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

と表すと，(1.3) と (2.3) から

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\underline{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{j=0}^{n} \eta_{j,n} z^j \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k \eta_{n,k} \right) z^n \tag{3.4}$$

となる。ここで，$\eta_{n,n} = 1$, $\eta_{n,0} = 0$ である。また，(3.3) と (3.4) より，$b_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \eta_{n,k}$ が得られる。補題 2.2 の (2.7) と (3.1) より，

$$\begin{aligned} |b_n| &\le \sum_{k=n}^{\infty} |a_k||\eta_{n,k}| \le K_1 \sum_{k=n}^{\infty} k^{-\gamma k} \left(\frac{(k-1)!}{(n-1)!} \right)^2 \frac{1}{(k-n)!} \\ &= K_1 \frac{n^2}{(n!)^2} \sum_{k=n}^{\infty} k^{-\gamma k} \frac{(k!)^2}{k^2} \frac{1}{(k-n)!} \\ &\le K_2 \frac{n^2}{(n!)^2} \sum_{k=n}^{\infty} k^{-\gamma k} \frac{1}{k^2} \left(\frac{k^{2k} k}{e^{2k}} \right) \left(k^{-k} e^k \frac{k^n}{\sqrt{k}} \right) \\ &= K_2 \frac{n^2}{(n!)^2} \sum_{k=n}^{\infty} k^{(1-\gamma)k} \frac{k^n}{k\sqrt{k} e^k} \end{aligned}$$

を得る。ここで，K_1, K_2 は正定数である。$\gamma > 1$ であること，k^n/e^k は $k \ge n$ に関して減少することから，

$$|b_n| \le K_3 \frac{n^2}{(n!)^2} \sum_{k=n}^{\infty} n^{(1-\gamma)k} \frac{n^n}{e^n} \le K_4 \frac{n^2}{(n!)^2} n^{(1-\gamma)n} \frac{n^n}{e^n},$$

が導かれる。ここで，K_3, K_4 は正定数である。再び，(3.1) を用いて

$$|b_n| \le K_5 n^2 \left(\frac{e^n}{n^n \sqrt{n}} \right)^2 n^{(1-\gamma)n} \frac{n^n}{e^n} = K_5 \frac{n e^n}{n^{\gamma n}} \tag{3.5}$$

を得る。ここで，K_5 は正定数である。Lindelöf–Pringsheim の定理[*13]と (3.5) より $\rho(y) \le \chi(\{a_n\})$ が示させる。

[*12] 例えば，[59, p. 22] などを参照のこと。
[*13] 第 7 節 7.4 項を参照のこと。

反対方向の不等号 $\rho(y) \geq \chi(\{a_n\})$ について以下で説明する。Lindelöf–Pringsheim の定理から，$\varepsilon > 0$ を小さく選べば，十分大きな n に対して，$|b_n| < n^{-\tilde{\gamma}n}$ が言える。ここで，$\tilde{\gamma} = 1/(\rho(y) + \varepsilon) > 1$ である。それゆえ，

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{k=0}^{n} \widetilde{\eta}_{k,n} z^{\underline{k}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} b_k \widetilde{\eta}_{n,k} \right) z^{\underline{n}}$$

が成り立つ。ここで，$\widetilde{\eta}_{n,n} = 1, \widetilde{\eta}_{n,0} = 0$ である。ゆえに，$a_n = \sum_{k=n}^{\infty} b_k \widetilde{\eta}_{n,k}$ を得る。同様の議論を補題 2.2 の (2.8) について行えば，ある正数 $K > 0$ に対して

$$|a_n| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |b_k||\widetilde{\eta}_{n,k}| \leq K \frac{ne^n}{n^{\tilde{\gamma}n}}$$

が成り立つことが解る。式 (1.4) より，$\chi(\{a_n\}) \leq \rho(y)$ を得る。以上より，定理 1.1 は証明された。 □

正定数 K と定数 $a \neq 0$ が存在して，(1.3) において $a_n = Ka^n/n!$ が成り立つならば，(1.4) より $\chi(\{a_n\}) = 1$ が成立する。補題 2.1 より，ある正定数 $\tilde{K}$ があり，$|a_n||z^{\underline{n}}| \leq \tilde{K}|a^n|/n^{1+\Re z}$ が得られる。したがって，定理 1.1 の証明と同様の議論から，次の系が導かれる。

系 3.1 正定数 K が存在して，十分大きな n に対して，$|a_n| \leq K/n!$ が成り立つとする。このとき，(1.3) の形式級数 $Y(z)$ は，右半平面 $\Re z > 0$ において広義一様収束する。

n を自然数とし，函数 f に対して，$f(z+n)$ を $f(z)$ の n-th シフト (shift) と言い，特に $f(z+1)$ を単に $f(z)$ のシフトと呼ぶ。差分作用素 Δ で表現された差分方程式は，必要に応じて，シフトで表現することも可能で，この逆も可能である[*14]。定理 1.1 と系 3.1 の差分方程式への応用として，次の系を得る。

系 3.2 k を自然数，$R(z, y_1, \ldots, y_k)$ を有理函数を係数とする $y_1, \ldots, y_k$ の有理函数とする。差分方程式

$$y(z) = R(z, y(z+1), \ldots, y(z+k)) \tag{3.6}$$

が (1.3) で表される形式級数解 $Y(z)$ を持つとする。もし，$\chi(\{a_n\}) < 1$，または，ある正定数 K があり $|a_n| \leq K/n!$ が十分大きな n に対して成り立つならば，(3.6) は $\mathbb{C}$ 上有理型な解を持つ。

4 例

差分方程式を満たす 2 項級数の例を紹介する前に，基本的な計算の道具を上げておく。

[*14] 第 7 節 7.1 項を参照のこと。

補題 4.1 $Y(z)$ を (1.3) で与えらる形式級数とする。このとき,

$$zY(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(na_n + a_{n-1})z^{\underline{n}}, \quad z\Delta Y(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\left((n+1)a_{n+1} + a_n\right) z^{\underline{n}},$$
$$z\Delta^2 Y(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\left((n+2)a_{n+2} + a_{n+1}\right) z^{\underline{n}}$$

が成り立つ。

ここでは，1 階および 2 階の線型差分方程式の例を紹介する[15]。

Example 4.1 $\lambda(\neq 0,\ -1)$, $|\lambda| \leq 1$ を定数とし，差分方程式

$$\Delta y(z) = \lambda y(z) \tag{4.1}$$

を考える。(4.1) の (1.3) で与えられる形式級数の係数は $(n+1)a_{n+1} = \lambda a_n$ を満たす。したがって，任意に与えられる a_0 により，$a_n = a_0\lambda^n/n!$ と記述される。(1.4) を使い計算をすると $\chi(\{a_0\lambda^n/n!\}) = 1$ である。系 3.2 と λ についての仮定から，(4.1) は $\mathbb{C}$ 上有理型函数解を持つことが解る。実際，$Y(z) = a_0\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^n/n!)z^{\underline{n}}$ は少なくとも右半平面で広義一様収束する。これを (4.1) を用いて複素平面全体に解析接続すればよい。実際，函数 $a_0(1+\lambda)^z$ の右半平面での 2 項級数表現を与えている。

Example 4.2 2 階線型差分方程式

$$(4z+6)\Delta^2 y(z) + 3\Delta y(z) + y(z) = 0 \tag{4.2}$$

を考える。先ず，(1.3) で与えられる (4.2) の形式級数を求める。(1.2) と補題 4.1 を用いて

$$4\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)((n+2)a_{n+2} + a_{n+1})z^{\underline{n}} + 6\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}z^{\underline{n}}$$
$$+ 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^{\underline{n}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\underline{n}} = 0$$

が導かれる。この関係式から，漸化式

$$2(n+2)(n+1)(2n+3)a_{n+2} + (n+1)(4n+3)a_{n+1} + a_n = 0, \quad n \geq 0$$

を得る。ここで，$A_n = 2(n+1)(2n+1)a_{n+1} + a_n$, $n \geq 0$ と置くと

$$(n+1)A_{n+1} + A_n = 0, \quad n \geq 0 \tag{4.3}$$

[15] 3 階，4 階さらに一般の階数の線型差分方程式の例や関連のある結果は，[29, Example 6.1], [28, Example 7.1, 7.2, 7.3, Theorem 6.1] などを参照のこと。

に至る。更に，$2a_1+a_0=0$ を仮定すると，$A_0=0$ となる，ゆえに (4.3) より，$A_n=0$, $n\geq 0$ を得る。ゆえに，

$$2a_1+a_0=0, \quad 2(n+1)(2n+1)a_{n+1}+a_n=0, \quad n\geq 0 \tag{4.4}$$

である。これから，$a_n=(-1)^n/(2n)!$, $n\geq 0$ を得る。この a_n を係数として記述される (1.3) の形式級数の収束を考察する。(1.4) と (3.1) を用いて $\chi(\{a_n\})$ を計算すると

$$\chi(\{a_n\})=\limsup_{n\to\infty}\frac{n\log n}{\log|(2n)!|}=\frac{1}{2}$$

となる。定理 1.1 より，(4.4) を満たす形式級数 (1.3) で $\mathbb{C}$ 上広義一様収束するものが存在することが示される。

5　差分方程式の解の位数

この節では，線型差分方程式の有理型函数の増大の位数について考察する。先ず，多項式係数線型差分方程式

$$a_p(z)\Delta^p y(z)+\cdots+a_1(z)\Delta y(z)+a_0(z)y(z)=0, \quad a_p(z)\not\equiv 0 \tag{5.1}$$

について，知られている結果を紹介しておく。ここで，$a_j(z)$ は多項式で，次数は A_j, $j=0,1,\ldots,p$ としておく。

$$\mathfrak{N}_j=\{(x,y)\,;\,x\geq j,\ y\leq A_{p-j}-(p-j)\}, \quad 0\leq j\leq p$$

とし，(5.1) の Newton polygon を $\mathfrak{N}=\bigcup_{j=0}^{p}\mathfrak{N}_j$ の convex hull で定義する。(5.1) の整函数解の増大の位数は Newton polygon と関連付けて考察されて来た。以下で述べる定理 5.1 は [29, Theorem 1.1] においては，位数についての条件 $\rho(y)<1/2$ のもとで示された。Chiang–Feng は [11] において位数についての条件を改善した。

定理 5.1　[11, Theorem 4] 線型差分方程式 (5.1) の整函数解 y が増大の位数について $\rho(y)<1$ を満たすとする。このとき，$\rho(y)$ は有理数で (5.1) の Newton polygon の傾きのいずれかと一致する。更に，

$$\log M(r,y)=Lr^{\rho(y)}(1+o(1)),$$

が成り立つ。ここで，$L>0$ は正定数で $M(r,y)=\max_{|z|=r}|y(z)|$ である。

Remark 5.1 例 4.2 において，線型差分方程式 (4.2) を考察した。2 項級数で表される (4.2) の形式解 $Y(z)$ は整函数 $y(z)$ に収束することを示した。更に，定理 1.1 を用いて，増大の位数 $\rho(y)$ は 1/2 であることを証明した。実際に，(4.2) の Newton polygon を描いてみることで，1/2 が唯一の傾きであることが確認される。

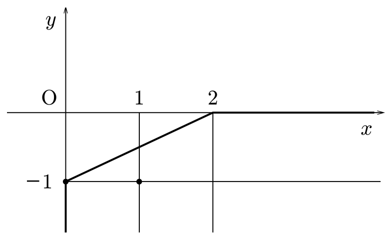

Figure 1: Remark 5.1

6　差分 Riccati 方程式

ここでは，応用の 1 つとして差分 Riccati 方程式

$$f(z+1) = \frac{f(z)+A(z)}{1-f(z)} \tag{6.1}$$

の増大の位数を考察する。ここで，$A(z)$ は有理函数とする。文献 [23, Theorem 3.1] において，もし (6.1) が有理函数解を持たないならば，(6.1) は増大の位数 1/2 未満の超越的有理型函数解を持たないことを証明した。Chen–Shon は [7, Theorem 1.1] でもし (6.1) が有理函数解を持つならば，全ての超越的有理型函数解の増大の位数は 1 以上であることを示した。実際に，[23, Example 3.1] において，差分 Riccati 方程式 (6.1) で有理函数解を持ち，位数が 1 以上の超越的有理型函数解を持つものを構成した。しかしながら，差分 Riccati 方程式 (6.1) が増大の位数 $0 \le \rho(f) < 1$ なる超越的有理型函数解 f を持つかどうかは未解決問題であった。以下で，増大の位数 1/2 を超越的有理型函数解に持つ差分 Riccati 方程式を構成する。補題を用意する。

補題 6.1　$a(\neq 0)$, b, c を複素定数とする。線型差分方程式

$$(az+b)\Delta^2 y(z) + c\Delta y(z) + y(z) = 0 \tag{6.2}$$

が超越整函数解 y を持ち，$\rho(y) < 1$ であれば

$$f(z) = \frac{2(az-a+b)}{2az-2a+2b-c}\left(-\frac{\Delta y(z)}{y(z)}\right) + \frac{c}{2az-2a+2b-c} \tag{6.3}$$

は

$$A(z) = \frac{4az-4a+4b+2ac-c^2}{(2az+2b-c)(2az+2b-2a-c)} \tag{6.4}$$

とする差分 *Riccati* 方程式 (6.1) を満たす。更に，$\rho(f) = 1/2$ である。

補題 6.1 の証明　文献 [24, p. 111], [42, §7] で利用した変換法を採用する。実際，$g(z) = -\Delta y(z)/y(z)$ と置くと，$\Delta^2 y = -y(z)\Delta g(z) + g(z+1)g(z)y(z)$ となる。これらの関係式と (6.2) を併せることで，$g(z)$ は

$$g(z+1) = \frac{1+(az+b-c)g(z)}{az+b-(az+b)g(z)} \tag{6.5}$$

を満たすことが解る。函数 $f(z)$ を (6.3) で定義すれば，(6.3) と (6.5) から，$A(z)$ として (6.4) を伴う (6.1) を得る。Valiron–Mohon'ko の定理[*16]から，$T(r,f)=T(r,g)+O(\log r)$, $r\to\infty$ を得る。また，$T(r,g)\le T(r,y)+T(r,\overline{y})+O(1)$, $r\to\infty$ である。ここで，$\overline{y}(z)=y(z{+}1)$ である。条件より $\rho(y)<1$ であるから，$T(r,\overline{y})=T(r,y)(1{+}o(1))$, $r\to\infty$, $r\notin E$ である。ここで，$E\subset\mathbb{R}$ は対数測度有限な除外集合である[*17]。更に，定理 5.1 と値分布論についての議論 [21, pp. 259–261], [29, Remark 1.2] より，$T(r,\overline{y})=T(r,y)(1{+}o(1))$, $r\to\infty$ である。したがって，$\rho(f)=\rho(g)\le\rho(y)=1/2$ を得る。

一方，[15, Theorem 4.2] により，$\rho(y)=\lambda(y)$ である。ここで，$\lambda(y)$ は函数 y の零点の収束指数[*18]である。周期的な y の零点 z, $y(z)=y(z+1)=0$ は有限個である。もし仮に無限個あるとすれば，(6.2) より，ある z_0 で全ての自然数 j に対して $y(z_0+j)=0$ なるものが存在する。これは，$\rho(y)\ge\lambda(y)\ge 1$ を意味し矛盾である。したがって，$1/2=\lambda(y)=\lambda(1/f)\le\rho(f)$ である。以上より，$\rho(f)=1/2$ が証明された。 □

命題 6.1 差分 Riccati 方程式 (6.1) には，$\rho(f)=1/2$ を満たす超越的有理型函数解を有するものが存在する。

命題 6.1 の証明 例 4.2 で取り上げたように，2 階線型差分方程式 (4.2) は増大の位数 1/2 となる超越整函数解を持つ。補題 6.1 から，(6.1) で

$$A(z)=\frac{16z+23}{64z^2+80z+9}$$

とした差分 Riccati 方程式は，増大の位数が 1/2 となる超越的有理型函数解を持つ。 □

7 歴史的背景

ここでは，複素領域での差分方程式の研究について簡単に振り返ることにする。Ablowitz, Halburd, Herbst の 2000 年の論文 [1] で Yanagihara（柳原二郎）による 1980 年代の論文 [61], [62] などが取り上げられ，Nevanlinna 理論の複素函数方程式への応用が呼び起こされた[*19]。この後，2000 年代の前半に，Nevanlinna 理論や Wiman–Valiron 理論の差分類似 [8], [9, 10, 12], [18], [19] などが発表され，ある増大度に関する条件のもとに Yanagihara の結果は一般化された。

差分演算における 2 項級数と整函数の値分布理論の関係について振り返る。後続の第 7.1 項では，19 世紀中頃の議論に遡って，差分演算における下降階乗冪の特徴と，Stirling 数の性質について紹介する。次の第 7.2 項と第 7.3 項では，20 世紀前半の Nörlund, Milne-Thomson らによる 2 項級数と線型差分方程式への応用を解説する。更に，第 7.4 項では，19 世紀後半から 20 世紀初頭における整函数の増大度についての研究に触れる。これらの結果は，第 7.5 項の 2 項級数と解析函数に関わる Carlson の定理に繋がる。

[*16] [45], [35, Theorem 2.2.5] を参照のこと。
[*17] [9, Theorem 2.1], [19, Theorem 8.1] などを参照のこと。
[*18] $\lambda(y)=\limsup_{r\to\infty}\log N(r,1/y)/\log r$，詳細は [15], [35], [46] などを参照のこと。
[*19] Kimura(木村俊房) [34] の影響を受けた 1978 年から 1985 年に出版された 19 編の学術論文の中で，様々な角度から値分布理論の複素函数方程式への応用が試みられた。

7.1 差分演算

1687 年の Newton の Principia [47] に遡る。以下で紹介する Newton 級数は同氏の名前に由来する。Boole [4, p. 61] は，Newton の Principia が補間公式を導き出そうとする最初の文献だと述べている。Jordan [31] によれば，Taylor [55] は 1715 年に差分演算について概説をし，Stirling [54] は 1730 年に差分演算を円滑に進めるために Stirling 数を導入している。更に，Jordan は Euler の差分法についての考察にも触れいてる。Euler は 1755 年の [13] の中で，現在でも幅広く用いられている差分演算の記号 Δ を導入している[*20]。

第 2 節において，Stirling 数の性質を復習した。漸近的な関係式 (2.4) と (2.6) は，Stirling 数における所謂 Pascal rule として知られている[*21]。Stirling 数の記号は，研究者により様々であり，統一されている感じはしない。このことは，下降階乗巾についても同様である[*22]。

第 1 節の導入で述べたように，下降階乗巾は (1.1) で定義され，微分演算の $(z^n)' = nz^{n-1}$ に対応する公式 (1.2) を与える。下降階乗巾の記号もそれぞれの研究者により様々である[*23]。一方，どの研究者も (1.2) が成立し，この公式が微分演算と差分演算を結びつける重要な役割を演じると言及している。この予稿では，比較的近年の [2, p. 10] や [32, p. 17] に従って (1.1) を採用している。

次に，高階差分作用素と高階シフトとの関係を記述する公式を紹介する[*24]。

$$\Delta^n f(z) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} f(z+j), \tag{7.1}$$

$$f(z+n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \Delta^j f(z). \tag{7.2}$$

これらの関係式 (7.1), (7.2) は，差分方程式が差分演算子とシフトの双方で表現可能なことを意味している。実際，k を自然とする。$\Xi(x, x_0, x_1, \ldots, x_k)$ は $x, x_0, x_1, \ldots, x_k$ の多項式として，差分方程式

$$\Xi(z, y, \Delta y, \ldots, \Delta^k y) = 0 \tag{7.3}$$

を考える。関係式 (7.1) を用いれば，(7.3) は y のシフトを用いて

$$\tilde{\Xi}(z, y(z), y(z+1), \ldots, y(z+k)) = 0 \tag{7.4}$$

[*20] Nörlund の著書 [48, pp. 244–531] は文献の取り扱いが丁寧である。特に，古典的な文献を調べる際には有効である。

[*21] 例えば，[2, Chapter 1] などを参照のこと。

[*22] 例えば，Nörlund は，通常の多項式と 2 項多項式（$z^{\underline{n}}$ の多項式）の関係 [48, p. 148] を議論する際に，第 1 種 Stirling 数に対応するものとして $(-1)^j\binom{n}{j}B_j^n$ を用いている。Milne-Thomson も [44, Chapter 6] において同様の問題意識で取り扱っている。また，Stirling 数の (2.3)–(2.6) などの関係式は [31, pp. 142–224] に詳しく述べられている。そこで，Jordan は第 1 種 Stirling 数を S_n^j で第 2 種 Stirling 数を $\mathfrak{S}_n^j$ で表している。

[*23] 例えば，Boole [4, p. 6] と Milne-Thomson [44, p. 25] は $z^{(n)}$ で factorial expression と呼んで，下降階乗巾を表している。Jordan [31, p. 45] は，$(z)_n$ を用いて，次数 n の factorial と呼んでいる。Nörlund [48, p. 5, (9)] は，特に記号を設定せず $z(z-1)\cdots(z-n+1)$ で議論を展開している。

[*24] 例えば，[48, p. 4, (5), (7) など] 参照のこと。

と表せる。ここで，$\Xi(x, x_0, x_1, \ldots, x_k)$ は $x, x_0, x_1, \ldots, x_k$ の多項式である。逆に，関係式 (7.2) を利用して，シフト表示の差分方程式 (7.4) は (7.3) の形で表現することが出来る[*25]。

7.2　2 項級数 (Newton 級数，階乗巾級数)

文献 [22, p. 198], [29] に従って，この予稿では，2 項級数（binomial series）と呼んできた形式級数 (1.3) について振り返る。歴史的には，様々な呼び名がある。例えば，Boole [4, p. 11] は，$\phi(z) = a + bz + cz^{(2)} + dz^{(3)} + \cdots + hz^{(m)} + \cdots$ を階乗巾級数と呼んでいる。ここで，$z^{(m)}$ は Boole の記号で，下降階乗巾を表している。Nörlund は，[48, p. 15, (35)] において，級数

$$F_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n f(a)}{n!}(z-a)^{\underline{n}} \tag{7.5}$$

を取り上げている。Jordan も [31, pp. 357–368] において (1.2) を取り扱っている。更に，Nörlund は [48, pp. 205, 222–233, (17)] で，また Milne-Thomson は [44, pp. 57–60] において

$$\tilde{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \binom{z-1}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{a}_n}{n!}(z-1)^{\underline{n}}, \quad \tilde{a}_n \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.6}$$

の形で Newton 級数として紹介している。これは，(7.5) で $a = 1$ とした場合である。

7.3　2 項級数の収束

本講演での問題意識の一つは 2 項級数の収束である。ここでは，(1.3) または (7.6) の収束に関する先行研究を古典的な文献から振り返る。Landau [36] は 2 項級数に関しての複素領域における収束について基礎的な研究をしている。後に，Nörlund [48, pp. 205, 257–262] や Milne-Thomson [44, Chapter 10] により (7.6) の形式級数の収束についての考察が行われた。ここでは，[48], [44] に従って，これらの研究成果を紹介する。

定理 7.1 (Landau, Nörlund, Milne-Thomson) もし (1.3) が $z = z_0$ で収束すれば，(1.3) は，$\Re z > \Re z_0$ なる z について収束する。

定理 7.1 は，2 項級数の収束領域の分類には右半平面が適当であると主張している。任意に ε を小さな正数とする。実数 λ を $\Re z > \lambda + \varepsilon$ では，(1.3) が収束し，$\Re z < \lambda - \varepsilon$ では (1.3) が発散する数とし，収束横座標（abscissa）と呼ぶ[*26]。$\lambda = \infty$ のときは，(1.3) は複素平面の全ての点で発散するとし，$\lambda = -\infty$ のときは，(1.3) は複素平面の全ての点で収束すると設定する。Landau は，[36] において収束横座標 λ を定める方法を見つけたと言われ，その後わかりやすい解説がなされている[*27]。これらとは別に，第 3 節の

[*25] [25], [27] では，シフト表示を採用している。また，[27] では下降階乗冪の性質を応用している。
[*26] 適当な日本語訳が知る限りの文献に見当たらない。
[*27] 例えば，Milne-Thomson [44, p. 279] など参照のこと。

系 3.2 において，$\chi(\{a_n\}) < 1$ のときに $\lambda = -\infty$ であり，$\chi(\{a_n\}) = 1$ のときは，ある条件のもとに $\lambda \leq 0$ であることを示した。仮に，差分方程式 (3.6) の形式解 $Y(z)$ が有限な収束横座標を持てば，系 3.2 と同様の方法で複素平面上の有理型函数解が構成できる。

7.4 整函数解の増大度

19 世紀に Liouville [41] は，記号 $M(x, y)$, $z = x + y\sqrt{-1}$ を用いて矩形において複素函数の増大を取り扱い，1847 年に Liouville の定理の原型となる結果を示したと言われている。この後，Lindelöf [40, p. 371], Phragmén–Lindelöf [50] や Wiman [60] は，記号 $M(r)$ を用いて $|z| = r$ における最大値を評価するようになる。与えられた値分布から整函数を構成する方法は，Weierstrass [57] によりなされた。1876 年のことである。この有名な Weierstrass の定理は，全ての整函数は無限乗積で表現が可能であると言うものである[*28]。

超越整函数の増大度や値分布の研究について振り返る。多くの学術書があるが，ここでは，[3, pp. 8–9] に沿って解説する。整函数 f に対して増大の位数（order of growth）は，

$$\rho = \rho(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r, f)}{\log r}, \quad 0 \leq \rho \leq \infty$$

で定義される。$0 < \rho < \infty$ のときに，整函数の増大の型（type）は，

$$\tau = \tau(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r, f)}{r^\rho}, \quad 0 \leq \tau \leq \infty$$

で定義される。増大の位数 ρ が有限であることの必要十分条件は，任意の正数 ε に対して

$$M(r, f) = O(e^{r^{\rho+\varepsilon}}), \quad r \to \infty. \tag{7.7}$$

が成り立つことである。Nevanlinna [46, p. 30] によれば，増大度の概念は，1897 年に (7.7) のような形式から Borel [5, p. 362] により導入されたと言われている[*29][*30]。整函数 f の Taylor 展開を

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{7.8}$$

とし，

$$\chi = \limsup_{n\to\infty} \frac{n\log n}{-\log|a_n|} \tag{7.9}$$

と定義する。f の増大の位数と Taylor 展開 (7.8) との関係は，Lindelöf [38, Chapter III], [39] により調べられ，Pringsheim [52, pp. 260–263] により深められた。特に，$\rho = \chi$ であることは有名である[*31]。

[*28] 例えば，[3, pp.18–24], [22, pp. 225–229], [43, pp. 282–285] などを参照のこと。

[*29] Borel はこのとき既に iterating order の考え方を持っていたと言われている。また，Pringsheim [52, pp. 260–263] や Lindelöf [40, pp. 373–374] も (7.7) の形式を採用している。

[*30] Whittaker は [58] の中で有理型函数とその差分の原始函数（和分）の増大の位数について考察している。

[*31] 例えば，[3, pp. 9–11], [30, pp. 24–25], [56, pp. 253–254] などを参照のこと。ここでは，(7.9) を Lindelöf–Pringsheim 指数，$\rho = \chi$ を [30] に従い Lindelöf–Pringsheim の定理と呼ぶ。

7.5 Carlson の定理と Newton 級数

Newton 級数と複素函数論の関係を与える古典的な Carlson [6] の定理を紹介する*32。Carlson の定理の証明の中心的な道具は，Phragmén–Lindelöf [50]*33により得られた結果である。ここでは，[20, pp. 328–330], [56, pp. 185–186] に従って，Carlson の定理とその系として，Newton 級数 (7.5) への応用を紹介する。

定理 7.2 (Carlson) もし，(i) f が角領域 $-\alpha < \theta < \alpha,\ \alpha \geq \pi/2$ で正則で，(ii) この領域で $|f(z)| \leq Ae^{kr},\ k < \pi,\ A > 0$ とし，(iii) $f(n) = 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ とする。このとき，$f(z) \equiv 0$ である。

p を任意の自然数とし，$F_0(z)$ を (7.5) で $a = 0$ とした級数とする。(1.2) から $p^{\underline{n}} = 0$, $n \geq p+1$ である。このことは，$F_0(p)$ は任意の p に対して収束することを示している。(7.2) より

$$F_0(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n f(0)}{n!} p^{\underline{n}} = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} \Delta^n f(0) = f(p), \quad p = 0, 1, 2, \ldots$$

である。したがって，$f(p) - F_0(p) = 0,\ p = 0, 1, 2, \ldots$ である。Newton 級数の収束についての考察から，次の系を得る*34。

系 7.1 整函数 f は増大の位数が $\rho < \infty$ で増大の型が τ とする。もし，$\rho < 1$ または，$\rho = 1$ で $\tau < \log 2$ であれば，$f(z) \equiv F_0(z)$ である。すなわち，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n f(0)}{n!} z^{\underline{n}}$$

である。

系 7.1 は，整函数 $f(z)$ はある増大の条件のもとに，2 項級数で表現されることを述べている。逆に，定理 1.1 は，2 項級数はその係数がある条件を満たせば，整函数を与えることを示している。

References

[1] Ablowitz, M. J., Halburd, R., Herbst, B., *On the extension of the Painlevé property to difference equations*, Nonlinearity **13** (2000), no. 3, 889–905.

[2] Aigner, M., *A course in enumeration*, Graduate Texts in Mathematics, 238. Springer, Berlin, 2007.

*32 例えば，[3, p. 171], [14], [20], [37, p. 58], [51], [53] などを参照のこと。
*33 他には，[37, pp. 37–39] なども詳しい。
*34 [44, pp. 310-311], [48, pp. 233-237] などを参照のこと。

[3] Boas, R. P., *Entire functions*, Academic Press Inc., New York, 1954.

[4] Boole, G., *A treatise on the calculus of finite differences*, MacMillan and co. London, 1860.

[5] Borel, É., *Sur les zéros des fonctions entières*, Acta Math. **20** (1897), no. 1, 357–396.

[6] Carlson, F., *Sur une classe de séries de Taylor*, Thèse Upsala, 1914.

[7] Chen, Z.-X. and Shon, K.-H., *Growth and difference properties of meromorphic solutions on difference equations*, Taiwan. Jour. Math. **19** (5) (2015), 1401–1414.

[8] Cheng, K.-H. and Chiang, Y.-M., *Wiman-Valiron theory for a polynomial series based on the Askey-Wilson operator*, Constr. Approx. **54**, no.2 (2021), 259–294.

[9] Chiang, Y.-M. and Feng, S.-G., *On the Nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane*, Ramanujan J., **16** (2008), 105–129.

[10] Chiang, Y.-M. and Feng, S.-J., *On the growth of logarithmic differences, difference quotients and logarithmic derivatives of meromorphic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), no. 7, 3767–3791.

[11] Chiang, Y.-M. and Feng, S.-J., *On the growth of logarithmic difference of meromorphic functions and a Wiman–Valiron estimate*, Constr. Approx. **44** (3) (2016), 313–326.

[12] Chiang, Y.-M. and Feng, S.-J., *Nevanlinna theory of the Askey-Wilson divided difference operator*, Adv. Math. **329** (2018), 217–272.

[13] Euler, L., *Institutiones calculi differentialis cum ejus in analysi finitorum ac doctrina serierum*, Petersburg, 1755.

[14] Gervais, R. and Rahman, Q. I., *An extension of Carlson's theorem for entire functions of exponential type*, Trans. Amer. Math. Soc. **235** (1978), 387–394.

[15] Goldberg, A. A. and Ostrovskii, I. V., *Value distribution of meromorphic functions*, Transl. from the Russian by Mikhail Ostrovskii. With an appendix by Alexandre Eremenko and James K. Langley, Translations of Mathematical Monographs 236. Providence, RI: American Mathematical Society, 2008.

[16] Grammaticos, B., Halburd, R. G., Ramani, A. and Viallet, C.-M., *How to detect the integrability of discrete systems*, J. Phys. A **42** (2009), no. 45, 454002, 30 pp.

[17] Halburd, R. G., *Elementary exact calculations of degree growth and entropy for discrete equations*, Proc. A. **473** (2017), no. 2201, 20160831, 13 pp.

[18] Halburd, R. G. and Korhonen, R. J., *Existence of finite–order meromorphic solutions as a detector of integrability in difference equations*, Physica D **218** (2006), no. 2, 191–203.

[19] Halburd, R. G., Korhonen, R. J. and Tohge, K., *Holomorphic curves with shift-invariant hyperplane preimages*, Trans. Amer. Math. Soc. **366** (8) (2014), 4267–4298.

[20] Hardy, G. H., *On two theorems of F. Carlson and S. Wigert*, Acta Math. **42** (1) (1920), 327–339.

[21] Helmrath, W. and Nikolaus, J., *Ein elementarer Beweis bei der Anwendung der Zentralindexmethode auf Differentialgleichungen*, Complex Variables Theory Appl., **3** (1984), 253–262.

[22] Hille, E., *Analytic function theory*, Vol. I, Boston, New York, Chicago, Atlanta, Dallas, Palo Alto, Toronto, London: Ginn and Company. XI, 1959.

[23] Ishizaki, K., *On difference Riccati equations and second order linear difference equations*, Aequationes Math., **81** (2011), 185–198.

[24] Ishizaki, K., *Meromorphic solutions of difference Riccati equations*, Complex Var. Elliptic Equ., **62** (1) (2017), 110–122.

[25] Ishizaki, K., R. Korhonen, N. Li and K. Tohge, *A Stothers–Mason theorem with a difference radical*, Math. Z., **298** (1-2) (2021), 671–696.

[26] Ishizaki, K. and Z.-T. Wen, *Binomial series and complex difference equations*, J. Math. Anal. Appl. **497** (2021), no. 1, Paper No. 124844, 15 pp.

[27] Ishizaki, K. and Z.-T. Wen, *Difference radical in terms of shifting zero and applications to the Stothers-Mason theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **150** (2) (2022), 731–745.

[28] Ishizaki, K. and Z.-T. Wen, *All possible orders less than 1 of transcendental entire solutions of linear difference equations with polynomial coefficients*, Preprint, arXiv:2301.06290 [math.CV] (2023).

[29] Ishizaki, K. and Yanagihara, N., *Wiman-Valiron method for difference equations*, Nagoya Math. J. **175** (2004), 75–102.

[30] Jank, G. and Volkmann, L., *Meromorphe Funktionen und Differentialgeichungen*, Birkhäuser-Verlag, Basel–Boston–Stuttgart, 1985.

[31] Jordan, C., *Calculus of Finite Differences*, 2nd ed., Chelsea, New York, 1950.

[32] Kelley, W. G. and A. C. Peterson, *Difference equations, An introduction with applications*, Second edition, Harcourt/Academic Press, San Diego, CA, 2001.

[33] Kohno, M., *Global analysis in linear differential equations*, Mathematics and its Applications, 471, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[34] Kimura, T., *On the iteration of analytic functions*, Funkc. Ekvacioj, Ser. Int. **14** (1971), 197–238.

[35] Laine, I., *Nevanlinna theory and complex differential equations*, W. de Gruyter, Berlin–New York, 1993.

[36] Landau, E., *Über die Grundlagen der Theorie Fakultätenreihen*, Sitzsber. Akad. München, **36** (1906), 151–218.

[37] Leivn, B. Y., *Lectures on Entire Functions*, Translations of Mathematical Monographs 150, 1996.

[38] Lindelöf, E., *Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini*, Acta Soc. Fennicae **31**, iv, 79 S. 4° (1902), 1–77.

[39] Lindelöf, E., *Sur la détermination de la croissance des fonctions entières définies par un développement de Taylor*, Darb. Bull. (2) **27** (1903), 213–226.

[40] Lindelöf, E., *Sur les fonctions entières d'ordre entier*, Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome **22**, (1905), 369–395.

[41] Liouville, J., *Leçons sur les fonctions doublement périodiques*, J. Reine Angew. Math. **88** (1879), 277–310.

[42] Liu, K., I. Laine and L.Z. Yang, *Complex delay-differential equations*, De Gruyter Studies in Mathematics 78. Berlin De Gruyter 290 p. (2021).

[43] Markushevich, A. I., *Theory of functions of a complex variable II*, Prentice-Hall, 1965.

[44] Milne-Thomson, L. M., *The Calculus of Finite Differences*, Macmillan, London, 1933.

[45] Mohon'ko, A. Z., *The Nevanlinna characteristics of certain meromorphic functions*, Teor. Funktsii Funktsional. Anal. i Prilozhen **14** (1971), 83–87.

[46] Nevanlinna, R., *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Paris, Gauthier-Villars, 1929.

[47] Newton, I., *Philosophiae naturalis principia mathematica*, London, 1687.

[48] Nörlund, N. E., *Vorlesungen Über Differenzenrechnung*, Springer, Berlin, 1924.

[49] Phragmén, E. and Lindelöf, E., *Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés de fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier*, Acta Math. **31** (1908), 381–406.

[50] Pila J., *Note on Carlson's Theorem*, Rocky Mountain J. Math. **35** (6) (2005), 2107–2112.

[51] Praagman, C., *Fundamental solutions for meromorphic linear difference equations in the complex plane, and related problems*, J. Reine Angew. Math. **369** (1986), 101–109.

[52] Pringsheim, A., *Elementare Theorie der ganzen transzendenten Funktionen von endlicher Ordnung*, Math. Ann. **58** (1904), 257–342.

[53] Rubel, L. A., *Necessary and sufficient conditions for Carlson's theorem on entire functions*, Trans. Am. Math. Soc. **83** (1956), 417–429.

[54] Stirling, J., *Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*, London, 1730.

[55] Taylor, B., *Methodus incrementorum directa et inversa*, London, 1715.

[56] Titchmarsh, E. C., *The theory of functions*(2nd Ed), Oxford University Press, 1939.

[57] Weierstrass, K., *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen*, Berl. Abh., (1876), 77–124.

[58] Whittaker, J. M., *Interpolatory function theory*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics **33**,(1935).

[59] Whittaker, E. T. and Watson, G. M., *A course of modern analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927.

[60] Wiman, A., *Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Gliede der zugehorigen Taylorschen Reihe*, Acta Math. **37** (1914), 305–326.

[61] Yanagihara, N., *Meromorphic solutions of some difference equations*, Funkcial. Ekvac. **23** (1980), 309–326.

[62] Yanagihara, N., *Meromorphic solutions of some difference equations of nth order*, Arch. Ration. Mech. Anal. **91** (1985), 169–192.