曲面のガウス写像の値分布論の研究の最近の進展[*1]

金沢大学・理工研究域数物科学系　川上　裕 [*2]
Faculty of Mathematics and Physics,
Kanazawa University

1　序

本稿では，極小曲面の Gauss 写像の値分布論の研究成果の中から，指導学生であった渡邉元嗣氏との論文 [18] に記した，3 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$ 内の完備極小曲面の Gauss 写像の除外値問題の最近の進展と今後の研究課題を紹介する．第 2 節において，複素平面 $\mathbf{C}$ 上の有理型関数の値分布論の結果を復習し，それをもとに第 3 節において，$\mathbf{R}^3$ 内の完備極小曲面の Gauss 写像の除外値数と完全分岐値数の上限の幾何学的意味と有限全曲率完備極小曲面（代数的極小曲面ともいう）の Gauss 写像の除外値数と完全分岐値数に関する最近の結果を解説する．第 4 節では，今後の興味深い研究課題として「4 点予想」を紹介する．なお，講演では，指導学生の笠尾俊輔氏と得た結果である “Bloch-Ros principle” [11] の話も取り上げる予定である．

2　複素平面上の有理型関数の値分布

本節では，研究を理解する上で必要となる，複素平面 $\mathbf{C}$ 上の有理型関数の値分布の結果を復習する．まず，$\mathbf{C}$ 上の有理型関数の値分布論において，最も有名な結果の 1 つである，Picard の小定理を確認する．

定理 2.1 (Picard の小定理)**.** $f\colon \mathbf{C} \to \overline{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ を非定数有理型関数とし，D_f を f の除外値数とする．ここで，f の除外値とは $\overline{\mathbf{C}}$ 内の像 $f(\mathbf{C})$ の補集合の元のことをいう．このとき，

$$D_f \leq 2 \tag{2.1}$$

が成り立つ．

(2.1) の評価は最良である．例えば，$f(z) = e^z$ を $\mathbf{C}$ 上の有理型関数として考えたとき，$0, \infty$ が f の除外値となり，(2.1) の等号を満たす例となる．(2.1) の上限 “2” には幾何学的解釈を与えることが出来る．実際，より一般に，$\mathbf{C}$ 上の有理型関数を含んだ，$\mathbf{C}$ から閉 Riemann 面への正則写像に対して次の結果が成り立つ．

定理 2.2 (Chern [2])**.** f を $\mathbf{C}$ から種数 γ の閉 Riemann 面 $\overline{\Sigma}_\gamma$ への非定値正則写像とし，D_f を f の除外値数とする．ここで，f の除外値とは $\overline{\Sigma}_\gamma$ 内の像 $f(\mathbf{C})$ の補集合の元のことをいう．

[*1] 本研究は科研費（基盤研究 (C)，課題番号：23K03086）の助成を受けたものである．
[*2] 住所：920-1192 金沢大学数物科学系，e-mail: y-kwkami@se.kanazawa-u.ac.jp

$\chi(\overline{\Sigma}_\gamma)$ を $\overline{\Sigma}_\gamma$ の Euler 標数とすると，

$$D_f \le \chi(\overline{\Sigma}_\gamma) = 2 - 2\gamma \tag{2.2}$$

が成り立つ．つまり，

- $\gamma = 0$ のとき，$D_f \le 2$ が成り立つ（定理 2.1 に対応），
- $\gamma = 1$ のとき，$D_f = 0$，つまり，f は全射となる，
- $\gamma \ge 2$ のとき，$\mathbf{C}$ から $\overline{\Sigma}_\gamma$ への非定値正則写像は存在しない．

一方，Nevanlinna [22] は定理 2.1 の一般化として，次の結果を示している．

定理 2.3 (分岐定理，[22], [27])**.** $f\colon \mathbf{C} \to \overline{\mathbf{C}}$ を非定数有理型関数とする．q を 1 以上の整数とし，$\alpha_1, \ldots, \alpha_q \in \overline{\mathbf{C}}$ を q 個の相異なる点とする．各 α_j $(j = 1, \ldots, q)$ に対して，$f(z) = \alpha_j$ となる z の重複度が常に ν_j 以上であると仮定すると，

$$\sum_{j=1}^{q} \left(1 - \frac{1}{\nu_j}\right) \le 2 \tag{2.3}$$

が成り立つ．もし，α_j が f の除外値のときは $\nu_j = \infty$ とし，$1 - (1/\nu_j) = 1$ と考える．このことから，本定理は Picard の小定理（定理 2.1）の精密化にあたる．

定理 2.3 は，Nevanlinna の第二主要定理から導くことの出来る欠除指数関係式（defect relation）の系として得られる．詳しいことは，例えば [4] や [23] を参照して欲しい．

定理 2.3 を踏まえて，次の概念を定める．

定義 2.4 (完全分岐値とその重み，[27])**.** Σ を Riemann 面とし，$f\colon \Sigma \to \overline{\mathbf{C}}$ を有理型関数とする．また，ν を 2 以上の整数とする．このとき，$\alpha \in \overline{\mathbf{C}}$ が f の ν 位の**完全分岐値**（totally ramified value）であるとは，方程式 $f = \alpha$ が ν より小さい重複度となる解をもたない，つまり，すべての解の重複度が ν 以上となることをいう．また，α が f の除外値のときは，どんな重複度の解も存在しないので，f の ∞ 位の完全分岐値とみなす．さらに，f の ν 位の完全分岐値に対する**ウェイト**（weight）を

$$1 - \frac{1}{\nu}$$

で定める．f の除外値に対するウェイトは $1 (= 1 - (1/\infty))$ とする．このように定めたウェイトの Σ 上での総和を f の**完全分岐値数**または**完全分岐値のウェイトの総和**（total weight of a number of totally ramified values of f）という．

定義 2.4 より，完全分岐値数は除外値数の精密化にあたることがわかる．この概念を用いて定理 2.3 の主張を述べると次のようになる．

定理 2.5 (分岐定理)**.** $f\colon \mathbf{C} \to \overline{\mathbf{C}}$ を非定数有理型関数とする．D_f を f の除外値数とし，ν_f を f の完全分岐値数とする．このとき，

$$D_f \le \nu_f \le 2 \tag{2.4}$$

▌ が成り立つ．

(2.4) は次の例からも最良の評価であることがわかる．$\mathbf{C}$ 上の有理型関数として，Weierstrass の $\wp$ 関数を考える．$\wp(z)$ は次の 4 つの 2 位の完全分岐値をもつ：

$$e_1 := \wp(\omega/2), \quad e_2 := \wp(\omega'/2), \quad e_3 := \wp((\omega+\omega')/2), \quad \infty.$$

ここで，ω, ω' は f の基本周期とする．このとき，$\wp(z)$ の完全分岐値数は $\nu_{\wp(z)} = 4(1-(1/2)) = 2$ となり，(2.4) の不等式 $\nu_f \leq 2$ の等号を満たす例となる．

3　3 次元 Euclid 空間内の極小曲面の Gauss 写像の値分布

まず，$\mathbf{R}^3$ 内の極小曲面の基本事項を復習する．詳細は洋書では [25]，最近では [1] と [26]，最近の和書では [16] や [20] を参照して欲しい．$X = (x_1, x_2, x_3)\colon \Sigma \to \mathbf{R}^3$ を向き付けられた極小曲面とする．この曲面で等温座標系 (u, v) をとることにより，Σ を $\mathbf{R}^3$ からの誘導計量を等角計量としてもつ Riemann 面とみなすことができる．このとき，

$$\Delta_{ds^2} X = 0 \tag{3.1}$$

が成り立つ，つまり，各成分関数 x_i は Σ 上の調和関数となる．複素座標 $z = u + iv$ を用いると，(3.1) から

$$\bar{\partial}\partial X = 0 \tag{3.2}$$

となる．ここで，$\partial = (\partial/\partial u - \sqrt{-1}\partial/\partial v)/2$，$\bar{\partial} = (\partial/\partial u + \sqrt{-1}\partial/\partial v)/2$ とする．(3.2) より，各 $\phi_i := \partial x_i dz \ (i = 1, 2, 3)$ は Σ 上の正則 1 次微分形式となる．また，次の 3 条件が成り立つ：

[C] $\sum \phi_i^2 = 0$（共形条件），
[R] $\sum |\phi_i|^2 > 0$（正則条件），
[P] 各 ϕ_i が，任意の $\gamma \in H_1(M, \mathbf{Z})$ に対して

$$\Re \int_\gamma \phi_i = 0$$

を満たす（周期条件）．

Σ 上の正則 1 次微分形式 ω と Σ 上の有理型関数 g を

$$\omega = \phi_1 - i\phi_2, \quad g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2} \tag{3.3}$$

とする．このとき，$g\colon \Sigma \to \overline{\mathbf{C}} \simeq S^2$ はこの曲面の **Gauss 写像**（Gauss map）となる．また，$\mathbf{R}^3$ からの誘導計量 ds^2 は

$$ds^2 = (1 + |g|^2)^2 |\omega|^2 \tag{3.4}$$

と表せる．さらに，

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)\omega, \qquad \phi_2 = \frac{i}{2}(1 + g^2)\omega, \qquad \phi_3 = g\omega \tag{3.5}$$

となる．逆に，Σ 上正則 1 次微分形式 ω と有理型関数 g の対 (ω, g) が与えられたとき，

$$\phi := (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$$

を (3.5) で定める．このとき，共形条件 [C] は自動的に満たされ，正則条件 [R] は，「g の h 位の極でのみ ω は $2h$ 位の零点をもつ」となることが (3.4) からわかる．もし周期条件 [P] が満たされていれば，極小曲面は

$$X(z) = \Re \int_{z_0}^{z} 2\phi \tag{3.6}$$

で得られる．ここで，z_0 は Σ 上の点で 1 つ固定しておく．この対 (ω, g) を極小曲面の **Weierstrass データ**（Weierstrass data）（以下，W-data と略す），(3.6) を **Enneper-Weierstrass の表現公式**（Enneper-Weierstrass representation）という．このとき，全曲率 $\tau(\Sigma)$ は

$$\tau(\Sigma) := \int_{\Sigma} K_{ds^2} dA = -\int_{\Sigma} \frac{2\sqrt{-1}dg \wedge d\bar{g}}{(1+|g|^2)^2} \tag{3.7}$$

となり，その絶対値は Gauss 写像の像の Riemann 球面上の Fubini-Study 計量に関する面積と一致する．

$\mathbf{R}^3$ 内の完備極小曲面の Gauss 写像の除外値数と完全分岐値数については，藤本坦孝氏により次のことが示されている．

定理 3.1 (Fujimoto [5], [6])**.** $X\colon \Sigma \to \mathbf{R}^3$ を平面でない完備極小曲面とし，$g\colon \Sigma \to \overline{\mathbf{C}}$ をその Gauss 写像とする．D_g を g の除外値数とし，ν_g を g の完全分岐値数とする．このとき，

$$D_g \leq \nu_g \leq 4 \tag{3.8}$$

が成り立つ．

(3.8) は最良，つまり，$D_g = 4$ の例が存在する．実際，Scherk の極小曲面は完備極小曲面で，W-data を

$$(\omega, g) = \left(\frac{4\,dz}{(z^4-1)}, -z\right)$$

とし，$\overline{\mathbf{C}} \setminus \{\pm 1, \pm i\}$ の普遍被覆面上で曲面を定めることで得られる．このとき，g は $\pm 1, \pm i$ を除外値としてもつので $D_g = 4$ となり，(3.8) の等号を満たす例となる．この W-data の取り方の詳しい説明は [16] の他に，[19] の第 5 章にも書かれている．(3.8) の上限の “4” の幾何学的解釈は次の定理から導くことが出来る．

定理 3.2 (Kawakami [14])**.** Σ を等角計量

$$ds^2 = (1+|g|^2)^m |\omega|^2 \tag{3.9}$$

をもつ開 Riemann 面とする．ただし，ω は Σ 上の正則 1 次微分形式，g は Σ 上の有理型関数，m は 1 以上の整数とする．また，D_g を g の除外値数とする．ds^2 が Σ 上の完備計量で，g は非定値有理型関数ならば，

$$D_g \leq m + 2 \tag{3.10}$$

■ が成り立つ．

注意 3.3. (3.10) の上限 “$m+2$” の “2” は Riemann 球面の Euler 標数が対応する．実際，$m=0$ の場合を考えると $ds^2=|\omega|^2$ となり，これは Σ 上の完備な平坦計量を与えることから，$\mathbf{C}$ から Σ への普遍被覆写像 π が存在する．そこで，g の代わりに $g\circ\pi$ を考えることで，g を $\mathbf{C}$ 上の有理型関数と考えることが出来る．一方，定理 2.2 から $\mathbf{C}$ 上の有理型関数の除外値数の上限の “2” は Riemann 球面の Euler 標数と一致することがわかるので，“$m+2$” の “2” は Riemann 球面の Euler 標数が対応していると解釈することが出来る．

$\mathbf{R}^3$ 内の完備極小曲面に対して，$\mathbf{R}^3$ からの誘導計量は (3.4) と表されるので，定理 3.2 と注意 3.3 から，(3.8) の上限の “4” の幾何学的解釈は，$\mathbf{R}^3$ からの誘導計量に現れるオーダーと g の値域である Riemann 球面の Euler 標数の和であると考えることが出来る．

注意 3.4. 定理 3.2 は g の完全分岐値数に精密化することが出来る．つまり，定理 3.2 の仮定のもとで，$D_g\leq\nu_g\leq m+2$ となることがわかる ([15])．

極小曲面の Gauss 写像の値分布の研究において，多くの研究者が興味をもつ問題として，Osserman 問題と呼ばれる，有限全曲率完備極小曲面の Gauss 写像の除外値数の上限を求める問題がある．ここからこの問題を解説する．$\mathbf{R}^3$ 内の有限全曲率完備極小曲面について，次の性質が成り立つ．

定理 3.5 (Huber-Osserman)**.** $X\colon\Sigma\to\mathbf{R}^3$ を有限全曲率完備極小曲面とする．このとき，次のことが成り立つ：

(1) Σ は閉 Riemann 面 $\overline{\Sigma}$ から有限個の点（この点のことを**エンド**（end）と呼ぶ）を除いたものと等角同値となる ([9]),

(2) このとき，W-data は $\overline{\Sigma}$ 上有理型に拡張することができる ([24])．

定理 3.5 が成り立つことから，$\mathbf{R}^3$ 内の有限全曲率完備極小曲面は**代数的極小曲面**（algebraic minimal surface）と呼ばれている．本稿では以後この用語を用いることとする．代数的極小曲面の Gauss 写像の除外値数について，次が成り立つ．

定理 3.6 (Osserman [24])**.** $\mathbf{R}^3$ 内の平面でない代数的極小曲面の Gauss 写像の除外値数は高々 3 である．

つまり，完備極小曲面のクラスに “有限全曲率（代数的）” という条件を加えれば，Gauss 写像の除外値数の上限は “4”（定理 3.1）から “3”（定理 3.6）へと変化する．問題となっているのは，定理 3.6 の評価が最良かどうかである．

問題 3.7 (Osseman 問題 [25])**.** $\mathbf{R}^3$ 内の平面でない代数的極小曲面の Gauss 写像の除外値数の上限は “2” か？それとも “3” か？

Gauss 写像の除外値数が “2” となる代数的極小曲面の例は存在する．例えば，カテノイド（懸垂面）は有限全曲率完備極小曲面で，$\Sigma=\mathbf{C}\setminus\{0\}$ 上で W-data を $(\omega,g)=(dz/z^2,z)$ とおくと，Σ 上で曲面が定まり，g の除外値数は 2 となる．また，[21] において，カテノイド以外の例が幾つか

紹介されている．一方，Gauss 写像の除外値数が “3” の代数的極小曲面は例が見つかっておらず，存在に関しては次の制約条件が成り立つ．

命題 3.8 (Osserman [24])**.** Σ が種数 γ の閉 Riemann 面 $\overline{\Sigma}_\gamma$ から有限個（ここでは k 個とする）の点を除いた開 Riemann 面 $\overline{\Sigma}_\gamma \backslash \{p_1, \ldots, p_k\}$ と双正則同値となる，平面でない代数的極小曲面 $X \colon \Sigma \to \mathbf{R}^3$ とする．d を Gauss 写像 $g \colon \Sigma \to \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ を $\overline{\Sigma}_\gamma$ 上に有理型に拡張したときの次数とする．g の除外値数が 3 のとき，次のことが成り立つ：

- $\gamma \geq 1$, $d \geq k \geq 3$,
- もし $\gamma = 1$ ならば，$d = k$ となり，さらに各エンドは埋め込み（つまり，平面エンドかカテノイドエンド）になる，
- $\tau(\Sigma)$ は -12π 以下になる．

また，全曲率の絶対値の大きさが小さいときに対しては次の非存在性が成り立つことが知られている．

命題 3.9 (Weitsman-Xavier, Fang)**.** 全曲率が -12π [29] と -16π [3] となる，Gauss 写像の除外値数が 3 の $\mathbf{R}^3$ 内の代数的極小曲面は存在しない．

そこで，多くの研究者は Osserman 問題（問題 3.7）の答えを次のように予想している．

予想 3.10. 平面でない代数的極小曲面の Gauss 写像の除外値数の上限は “2” である．

この予想が正しいとすると，定理 2.5 と定理 3.1 から，完全分岐値数に対しても次のことが予想される．

予想 3.11. 平面でない代数的極小曲面の Gauss 写像の完全分岐値数の上限は “2” である．

しかし，予想 3.11 は正しくない．実際に次のような例が存在する．

命題 3.12 (Miyaoka-Sato [21], Kawakami [12])**.** $\Sigma = \mathbf{C} \backslash \{\pm i\}$ とし，その上での正則 1 次微分形式，有理型関数の対 (ω, g) を

$$(\omega, g) = \left(\frac{(z^2+t^2)^2}{(z^2+1)^2}\, dz, \sigma \frac{z^2+1+a(t-1)}{z^2+t} \right), \ a, t \in \mathbf{R}, \ (a-1)(t-1) \neq 0, \tag{3.11}$$

で定める．ここで，$\sigma^2 = (t+3)/a\{(t-1)a+4\}$ とする．このとき，$\sigma^2 < 0$ を満たす σ に対して，(3.11) を W-data とし，Gauss 写像 g の除外値が σ，σa となる Σ 上の代数的極小曲面が存在する．また，$g(0)$ が g の 2 位の完全分岐値となる．よって，g の完全分岐値数は

$$\nu_g = 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 2.5$$

となる．

Gauss 写像の完全分岐値数が 2.5 の代数的極小曲面の例はこれまで命題 3.12 で挙げた例以外見つかっていなかったが，講演者の指導学生であった渡邉元嗣氏が次の新しい例を発見した．

命題 3.13 (Watanabe [18], [28]). $\Sigma = \mathbf{C}\backslash\{0, \pm i\}$ とし，その上での正則 1 次微分形式，有理型関数の対 (ω, g) を

$$(\omega, g) = \left(\frac{\{(b-a)z^4 + 4(b-1)z^2 + 4(b-1)\}^2}{z^2(z^2+1)^2} dz,\ \sigma \frac{(b-a)z^4 + 4a(b-1)z^2 + 4a(b-1)}{(b-a)z^4 + 4(b-1)z^2 + 4(b-1)} \right) \tag{3.12}$$

で定める．ここで，$a, b \in \mathbf{R}\setminus\{1\}$，つまり，$a \neq b$ で $\sigma^2 = (5a+11b-16)/(16ab-11a-5b) < 0$ とする．このとき，(3.12) を W-data とし，Gauss 写像 g の除外値が σ，σa となる Σ 上の代数的極小曲面が存在する．また，$b = g(\pm\sqrt{2}i)$ が g の 2 位の完全分岐値となる．よって，g の完全分岐値数は

$$\nu_g = 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2.5$$

となる．

これらの例は，幾つかの位相型に対する定理 3.6 を完全分岐値数も含めて精密化した次の結果の最良の例を与えている．

定理 3.14 (Kawakami-Miyaoka-Kobayashi [17]). Σ が種数 γ の閉 Riemann 面 $\overline{\Sigma}_\gamma$ から有限個（ここでは k 個とする）の点を除いた開 Riemann 面 $\overline{\Sigma}_\gamma\backslash\{p_1, \cdots, p_k\}$ と等角同値となる，平面でない代数的極小曲面 $X\colon \Sigma \to \mathbf{R}^3$ とする．d を Gauss 写像 $g\colon \Sigma \to \mathbf{C}\cup\{\infty\}$ を $\overline{\Sigma}_\gamma$ 上に有理型に拡張したときの次数とする．g の除外値数 D_g および完全分岐値数 ν_g に対して，

$$D_g \leq \nu_g \leq 2 + \frac{2}{R}, \quad \frac{1}{R} = \frac{\gamma - 1 + k/2}{d} < 1 \tag{3.13}$$

が成り立つ．特に，$\mathbf{R}^3$ 内の平面でない有限全曲率完備極小曲面の Gauss 写像の除外値数は高々 3 である．

実際，$(\gamma, k, d) = (0, 3, 2)$ とすると，(3.13) の ν_g の上限は $2 + (2/R) = 2.5$ となり，命題 3.12 の例が等号を満たす例となる．また，$(\gamma, k, d) = (0, 4, 4)$ とすると，(3.13) の ν_g の上限は $2 + (2/R) = 2.5$ となり，命題 3.13 の例が等号を満たす例となる．よって，幾つかの位相型においては，定理 3.14 の評価は最良であることがわかるが，すべての位相型において定理 3.14 が最良であるかどうかはわかっていない．

4 Gauss 写像の値分布に関する未解決問題

最後に，$\mathbf{R}^3$ 内の完備極小曲面の Gauss 写像の値分布の興味深い問題を紹介する．ここで取り上げるのは，「4 点予想（four point conjecture）」と呼ばれる次のことを主張するものである．

予想 4.1 (4 点予想，[18]). $\mathbf{R}^3$ 内の完備極小曲面において，Gauss 写像が 4 つの除外値をもつとき，Gauss 曲率は曲面上至る所負の値を取る．

予想 4.1 の主張は，「$\mathbf{R}^3$ 内の完備極小曲面が少なくとも 1 つ平坦点（Gauss 曲率が 0 となる点のこと）を持てば，その曲面の Gauss 写像の除外値数は高々 3 になる」と言い換えることが出来る．

この予想は，代数的極小曲面や Scherk の極小曲面を含む「擬代数的極小曲面（pseudo-algebraic minimal surface)」と呼ばれる完備極小曲面のクラスにおいては正しいことがわかる．実際，定理 3.14 の設定で擬代数的極小曲面を考えたとき，l を g の分岐値（g の分岐点の値のこと）の数とすると，

$$D_g \leq 2 + \frac{2}{R} - \frac{l}{d}, \quad \frac{1}{R} = \frac{\gamma - 1 + k/2}{d} \leq 1 \tag{4.1}$$

が成り立ち，少なくとも 1 つでも平坦点をもつと $l \geq 1$ となるので，$D_g < 4$，つまり，$D_g \leq 3$ となる．

参考文献

[1] A. Alarcón, F. Forstnerič, F. J. López, Minimal surfaces from a complex analytic viewpoint, Springer Monogr. Math., Springer, Cham, 2021.

[2] S.-S. Chern, Complex analytic mappings of Riemann surfaces. I, Amer. J. Math., **82** (1960), 323–337.

[3] Y. Fang, On the Gauss map of complete minimal surfaces with finite total curvature, Indiana Univ. Math. J., **42** (1993), 1389–1411.

[4] 藤本坦孝，複素解析，岩波書店，2006 年.

[5] H. Fujimoto, On the number of exceptional values of the Gauss map of minimal surfaces, J. Math. Soc. Japan **40** (1988), 235–247.

[6] H. Fujimoto, On the Gauss curvature of minimal surfaces, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), 427–439.

[7] H. Fujimoto, Value Distribution Theory of the Gauss Map of Minimal Surfaces in $\mathbf{R}^m$, Aspects of Mathematics, E21. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1993.

[8] H. Fujimoto, Nevanlinna theory and minimal surfaces, Geometry V, 95–151, 267–272, Encyclopaedia Math. Sci., **90**, Springer, Berlin, 1997.

[9] A. Huber, On subharmonic functions and differential geometry in the large, Comment. Math. Helv., **32** (1957), 13–72.

[10] D. A. Hoffman and R. Osserman, The geometry of the generalized Gauss map, Mem. Amer. Math. Soc. **28** (1980), no. 236.

[11] S. Kasao and Y. Kawakami, Bloch-Ros principle and its application to surface theory, preprint.

[12] Y. Kawakami, On the totally ramified value number of the Gauss map of minimal surfaces, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **82** (2006), 1–3.

[13] Y. Kawakami, The Gauss map of pseudo-algebraic minimal surfaces in $\mathbf{R}^4$, Math. Nachr. **282** (2009), no. 2, 211–218.

[14] Y. Kawakami, On the maximal number of exceptional values of Gauss maps for various classes of surfaces, Math. Z. **274** (2013), 1249–1260.

[15] Y. Kawakami, Function-theoretic properties for the Gauss maps of various classes of surfaces, Canad. J. Math., **67** (2015), 1411–1434.

[16] 川上裕，藤森祥一，極小曲面論入門 - その幾何学的性質を探る -，SGC ライブラリ **147**，サイエンス社，2019 年.

[17] Y. Kawakami, R. Kobayashi and R. Miyaoka, The Gauss map of pseudo-algebraic minimal surfaces, Forum Math. **20** (2008), 1055–1069.

[18] Y. Kawakami, M. Watanabe, The Gauss images of complete minimal surfaces of genus zero of finite total curvature, submitted, arXiv:2309.06846.

[19] 小林昭七，曲線と曲面の微分幾何（改訂版），裳華房，1995 年.

[20] 宮岡礼子，極小曲面（共立叢書 現代数学の潮流），共立出版，2022 年.

[21] R. Miyaoka and K. Sato, On complete minimal surfaces whose Gauss map misses two directions, Arch. Math., **63** (1994), 565–576.

[22] R. Nevanlinna, Einige Eindeutigkeitssätze in der Theorie der Meromorphen Funktionen, Acta Math., **48** (1926), 367–391.

[23] J. Noguchi and J. Winkelmann, Nevanlinna theory in several complex variables and Diophantine approximation, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (Fundamental Principles of Mathematical Sciences), **350** Springer, Tokyo, 2014.

[24] R. Osserman, Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n, Ann. of Math., **80** (1964), 340–364.

[25] R. Osserman, A Survey of Minimal Surfaces, second edition, Dover Publication Inc., New York, 1986.

[26] M. Ru, Minimal surfaces through Nevanlinna theory, De Gruyter Stud. Math., **92**, De Gruyter, Berlin, 2023.

[27] R. M. Robinson, A generalization of Picard's and related theorems, Duke Math. J. **5** (1939), 118—132.

[28] 渡邉元嗣，有限全曲率完備極小曲面のガウス写像の値分布，2021 年度金沢大学大学院自然科学研究科数理科学専攻 修士論文.

[29] A. Weitsman and F. Xavier, Some function theoretic properties of the Gauss map for hyperbolic complete minimal surfaces, Mich. Math. J., **34** (1987), 275–283.