

Levi 平坦実超曲面への距離の Levi form の表示とその応用

松本 和子 (大阪府立大学・総合教育研究機構)*¹

0 はじめに

Levi 平坦実超曲面とは、局所的に複素超曲面によって foliate される実超曲面のことである。局所的に両側が擬凸 (locally Stein) である実超曲面ともいえる。1995 年に知った「複素射影空間 \mathbb{P}^n ($n \geq 2$) 内には Levi 平坦実超曲面は存在しない」という予想 (部分的解決) や、複素トーラス内の Levi 平坦実超曲面の特徴付けの問題を動機として、 \mathbb{C}^n ($n \geq 2$) 内の実及び複素超曲面への対数的距離の Levi form の具体的な表示 (等式) を求め始めた。Levi 問題の解決の際などに従来から知られていたのは、対数的距離の Levi form の固有値の上からの評価 (不等式) のみである。Levi form の具体的な表示 (等式) が分かると、複素多様体の部分領域が Stein になるための鋭い条件が得られ、Levi 平坦実超曲面や CR 幾何等への応用があると考えている。

本稿では、私自身が現在までに得た、対数的距離の Levi form の具体的な表示と、その直接的な応用、特に Levi form の退化条件について、既に得られた結果についてまとめている。講演では、多変数関数論の研究の歴史の自然な流れの中で、このような研究を行うに至った過程や今後の展望について、可能な範囲で述べてみたいと思う。

1 Levi 問題と対数的境界距離

多変数関数論において、領域の Stein 性は非常に重要な概念であり、Stein 性から種々の性質が導かれる。領域が Stein であるための条件は、いろいろな形で述べられる。Oka (岡潔) は、多変数関数論を展開する舞台である \mathbb{C}^n ($n \geq 2$) の正則領域を、関数を用いずに特徴付けることが最初に重要であると考え、「局所的に Hartogs の連続性定理を満たす領域」を「擬凸領域」と呼び、 \mathbb{C}^n の擬凸領域は正則領域であることを示した ([21], [22])。Oka 以前に Cartan-Thullen により、 \mathbb{C}^n の正則凸領域は正則領域であることは知られていたため、擬凸領域は正則凸領域であることを示す部分が問題になる。それを解決する

*¹ 平成 22 年 11 月 21 日 (日) 第 53 回関数論シンポジウム (於: 名城大学サテライト)

(関数のないところに関数を作る) ための要点の 1 つは, D が \mathbb{C}^n の擬凸領域で, $\delta_{\partial D}$ が D の境界 ∂D までの Euclid 距離のとき, $-\log \delta_{\partial D}$ は D 上の多重劣調和関数になることである. さらに \mathbb{C}^n には, $\|z\|^2 = \sum_{i=1}^n |z_i|^2$ という「強」多重劣調和関数が存在し, 関数 $\varphi := -\log \delta_{\partial D} + \|z\|^2$ は, D の強多重劣調和な exhaustion function になる. ここで $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ は, 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し $D_\alpha := \{z \in D : \varphi(z) < \alpha\} \Subset D$ となるとき, D の exhaustion function という. 関数 φ 自身は C^2 級とは限らないが, C^2 級の強多重劣調和関数で近似でき, 各 D_α は「有限個の 2 次多項式で定義された多項式多面体」で近似できる. これが, 擬凸領域 D が正則凸領域であることを示すための, Oka のアイデアの最初の部分である.

一般に, Grauert [8] は, 正則領域の概念の拡張である Stein 多様体に対し, 複素多様体 D が Stein であるための必要十分条件は, D が強多重劣調和な exhaustion function を持つことであると特徴付けた.

次に, 擬凸領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ の境界 $S := \partial D$ が C^2 級の実超曲面のとき, S は「Levi の条件」を満たす. すなわち, S が C^2 級の実関数 ρ ($d\rho \neq 0$) を用いて $\rho = 0$ により定義され, $D = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}$ と表されるとき, D が擬凸領域であるための必要十分条件は,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial z_i}(z) \zeta_i = 0 \implies \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z) \zeta_i \bar{\zeta}_j \geq 0 \quad (*)$$

という Levi の条件を満たすことである (cf. [5], [10]). Levi [11] は Oka 以前に, $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ 内の C^2 級の境界を持つ正則領域が, 局所的にはこのような性質を持つことを, 実微分を用いた計算により求め, 局所的に Levi の条件をみたす境界を持つ領域と, 正則領域との関係を論じた. それゆえ, 領域の境界が滑らかでない場合も含めて「擬凸領域は正則領域か」という問題は「Levi 問題」と呼ばれる.

Levi の条件 (*) で, 「 ≥ 0 」を「 > 0 」に置き換えた条件が満たされるとき, 領域 D および実超曲面 S は「強擬凸」であるという. また, 「 ≥ 0 」を「 $= 0$ 」に置き換えた条件が満たされるとき, 境界 S は「Levi 平坦」であるという.

ここで重要な注意として, 領域 D ($\subset \mathbb{C}^n$) が強擬凸なら, 関数 $-\log \delta_{\partial D}$ は D で (複素接方向に) 強多重劣調和であるが, 逆は成り立たない. すなわち, 領域 D の境界 S が Levi 平坦であっても, 関数 $-\log \delta_{\partial D}$ は複素接方向に強多重劣調和 (ゆえに $1/\delta_{\partial D}$ は強多重劣調和) になることがある. そこで, 次の問題が生じる.

問題 1 関数 $-\log \delta_{\partial D}$ が複素接方向に強多重劣調和になるための, 境界 ∂D の条件を求めよ.

あるいは、より強い形では、次の問題になる。

問題 2 関数 $-\log \delta_{\partial D}$ の Levi form の、境界 ∂D の定義関数による表示を求めよ。

これらの問題は、領域 D 上に「強多重劣調和な exhaustion function を作る」という目的のためには、 D が (\mathbb{C}^n ではなく) 一般の Kähler 多様体の部分領域で、境界距離 $\delta_{\partial D}$ が (Euclid 計量でなく) Kähler 計量から決まる距離の場合に意味がある。しかし、これらの問題は、 $D \subset \mathbb{C}^n$ の場合でさえ未解決であり、まずはこの場合に解決することを考えた。これらの問題に解答することが、本稿の主要テーマである。現在までに、 $D \subset \mathbb{C}^n$ の場合に、問題 1, 2 に関する幾つかの結果を得たが、まだ完全に解決できたとはいえない。Levi 問題の解決の歴史を振り返ると、一般の Kähler 多様体の部分領域に結果を拡張する際にも、 $D \subset \mathbb{C}^n$ の場合に「境界距離の Levi form の表示公式」を求める部分が、最も重要であると考えている。

2 Levi 問題の解決の微分幾何的進展

ここで、Levi 問題の解決の際に用いられた境界距離の性質を、簡単に振り返ってみよう。以下、 D は擬凸領域 (locally Stein) とする。

まず、Oka により、 $D \subset \mathbb{C}^n$ で、 $\delta_{\partial D}$ が Euclid 計量による境界距離のとき、 $-\log \delta_{\partial D}$ は多重劣調和になる。次に、Fujita (藤田玲子) [6] により、複素射影空間 \mathbb{P}^n に対して Levi 問題が解決されたが、Takeuchi (武内章) [26] は、これに対する微分幾何的な証明を与えた。すなわち、 $D \subset \mathbb{P}^n$ で、 $\delta_{\partial D}$ が Fubini-Study 計量による境界距離のとき、 $-\log \delta_{\partial D}$ は「強」多重劣調和である。さらに Takeuchi [27] は、 X が正の断面曲率を持つ Kähler 多様体で、 $D \subset X$ 、かつ $\delta_{\partial D}$ が与えられた Kähler 計量による境界距離のとき、 $-\log \delta_{\partial D}$ は「強」多重劣調和になることを示した。ここで、 X の曲率条件が「断面曲率が正」である理由は、当時まだ、Goldberg-Kobayashi [7] によって導入された「正則双断面曲率」という概念が知られていなかったからである。その後、Elenewajg [3] と Suzuki (鈴木理) [25] が独立に、Kähler 多様体 X の曲率条件を「正則双断面曲率が正」に弱めて、 $-\log \delta_{\partial D}$ の「強」多重劣調和性を示した。この結果は、後に Greene-Wu [9] により、微分幾何の「第 2 変分公式」を用いて美しく証明されている。

私自身も、一連の結果を、擬凸領域の一般化である q -擬凸領域 ($1 \leq q \leq n$) に拡張し、関数 $-\log \delta_{\partial D}$ の「強」 q -多重劣調和性を示した ([13], [14])。その応用として、例えば、 \mathbb{P}^n の余次元 q 以下の代数的部分集合 M の補集合 $\mathbb{P}^n \setminus M$ は、Andreotti-Grauert の意味で \tilde{q} -complete、さらに M が非特異なら、 q -convex という結果が得られる (ここで $\tilde{q} = n - [n/q] + 1$ で、 $[\]$ は Gauss 記号である)。

Takeuchi から始まって Greene-Wu に至るまでの、関数 $-\log \delta_{\partial D}$ の Levi form の固有値の評価は、領域 D が含まれる Kähler 多様体 X の正則双断面曲率による下からの評価である。領域 D の境界 ∂D の条件としては、強擬凸ではなく弱擬凸の場合、本質的には ∂D までの距離 $\delta_{\partial D}$ を「 D の補集合に含まれる複素超曲面 M 」までの距離 δ_M で上から近似し、すなわち $-\log \delta_{\partial D}$ を $-\log \delta_M$ で下から近似し、 $f(z)$ が (多変数) 正則関数なら $-\log |f(z)|$ は多重調和ということを用いて評価されている。関数 $-\log \delta_{\partial D}$ の Levi form の固有値の評価は、領域 D を含む Kähler 多様体 X の「曲率条件」による評価は厳密であるが、境界 ∂D の「曲率条件」による評価は、 ∂D が弱擬凸 (特に Levi 平坦) の場合、不十分であった (考えられていなかった) といえる。 $M \subset \mathbb{C}^n$ が複素超曲面の場合、 $-\log \delta_M$ の Levi form は、 M が linear でなければ正の固有値を持つ (§3, 定理 1)。

なお、上で述べた関数 $-\log \delta_{\partial D}$ の「強」多重劣調和性により、 X が正の正則双断面曲率を持つ Kähler 多様体のとき、 $D \Subset X$ に対し Levi 問題が解ける。一方、Grauert は、複素トーラス \mathbb{T}^n ($n \geq 2$) 内の領域に対しては、Levi 問題が必ずしも解けないことを指摘した。すなわち、 \mathbb{T}^n には、正則関数が定数しか存在しないような擬凸領域がある (cf. Siu [23])。また、Grassmann 多様体のように、正則双断面曲率が (正でなく) 非負でも、Levi 問題が常に解ける場合がある (Ueda [28])。

さらに、約十数年前 (私自身が知ったのは 1995 年)、複素射影空間 \mathbb{P}^n ($n \geq 2$) 内には Levi 平坦実超曲面は存在しないであろうという予想が、突然に話題になった。その後、Lins-Neto [12] により、 \mathbb{P}^n ($n \geq 3$) には実解析的な Levi 平坦実超曲面は存在しないことが、葉層構造に着目して証明されている。「実解析的」ではなく C^∞ 級または C^2 級のものの非存在証明については、幾つかの試みがある (cf. Siu [24])。次いで、複素トーラス \mathbb{T}^n ($n \geq 2$) 内の Levi 平坦実超曲面を分類する問題 (限られたタイプのものしか存在しないかという問題) が提起され、より一般的なコンパクト複素多様体内の Levi 平坦実超曲面の分類問題へと広がっている (cf. Brunella [2], Ohsawa [19], [20])。

これらの問題の解決の際の要点の 1 つは、 $X = \mathbb{P}^n$ または \mathbb{T}^n として、 S が X の Levi 平坦実超曲面のとき、補集合 $X \setminus S$ が Stein であることである。上述の Fujita, Takeuchi により $\mathbb{P}^n \setminus S$ は常に Stein であるが、 $X = \mathbb{T}^n$ の場合、 $\mathbb{T}^n \setminus S$ が Stein になるための良い条件は、まだ知られていない。

なお、 C^2 級の実超曲面 S が Levi 平坦であることは、「局所的に曲面の両側が擬凸である」としても定義されるが、「局所的に複素超曲面によって foliate される」と同値である。すなわち、 S が Levi 平坦であるための必要十分条件は、 S の各点 p に対し、 p の近傍で定義された複素超曲面 M で、 $p \in M \subset S$ となるものが存在することである。そこで、複素トーラス \mathbb{T}^n 内の擬凸部分領域 D が Stein になるための条件を、境界距離 $\delta_{\partial D}$ の

Levi form の性質を通して求めるという目的からスタートして、 \mathbb{C}^n 内の複素超曲面 M や実超曲面 S までの、Euclid 距離に関する距離の Levi form の (1 点での) 表示を求めた。

以下、これらの Levi form の表示と、その直接の応用について、順に述べる。

3 \mathbb{C}^2 の複素超曲面までの距離の Levi form

距離の Levi form を最初に計算したのは、 M が \mathbb{C}^2 の複素超曲面の場合である。 $M \subset \mathbb{C}^2$ は、開集合 $V \subset \mathbb{C}$ と正則関数 $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ により

$$M = \{(t, f(t)) \mid t \in V\}$$

と表されているとし、 $\delta_M(z)$ を、 $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ から M までの Euclid 距離とする。このとき、 M の近くで、関数 $-\log \delta_M$ の Levi form は次のように表示される。

定理 1 (Levi form の表示 (1) [18]) 各 $p \in M$ に対して、 p の近傍 $U \subset \mathbb{C}^2$ が存在し、 $(z_1, z_2) \in U$, $(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{C}^2$ に対して

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2(-\log \delta_M)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z_1, z_2) \zeta_i \bar{\zeta}_j \\ &= \frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|^2 \left| \zeta_1 + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{t}} \zeta_2 \right|^2}{2 \left(\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|^2 + 1 \right)^2 \left\{ \left(\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|^2 + 1 \right)^2 - \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|^2 |z_2 - f(t)|^2 \right\}} \Bigg|_{t=t(z_1, z_2)} \end{aligned}$$

と表される。ここで、 $t = t(z_1, z_2)$ は方程式

$$z_1 - t + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{t}} \{z_2 - f(t)\} = 0 \quad (**)$$

の解である。

注意 1 上の定理で、 $(z_1, z_2) \in U$ から最も近い M の点が $(t(z_1, z_2), f(t(z_1, z_2)))$ になる。 (z_1, z_2) での $-\log \delta_M$ (または δ_M) の Levi form の表示は、 (z_1, z_2) に最も近い M の点での表示であり、(**) は、その点を求めるための極小条件 (幾何学的には直交条件) である。

定理 1 より、超曲面 M が $p \in M$ で linear でなければ、関数 $-\log \delta_M$ の Levi form は、最短距離を与える M の点が p である各点 z で複素接方向に 1 つの正の固有値を持ち、関数 $1/\delta_M$ は z の近くで強多重劣調和になる。このことから次が成り立つ。

系 1 ([18]) S が 2 次元複素トーラス \mathbb{T}^2 の C^2 級の Levi 平坦実超曲面で, linear でない局所的な複素超曲面を含むとき, 補集合 $\mathbb{T}^2 \setminus S$ は Stein である.

4 \mathbb{C}^n の複素部分多様体までの距離の Levi form

次に, M が \mathbb{C}^n ($n \geq 2$) の複素部分多様体の場合を考える. M の次元を r , 余次元を q ($r, q \geq 1$) とし, $M \subset \mathbb{C}^n$ は, 開集合 $V \subset \mathbb{C}^r$ と正則関数 $f = (f_1, \dots, f_q) : V \rightarrow \mathbb{C}^q$ により

$$M = \{(t, f(t)) \mid t = (t_1, \dots, t_r) \in V\}$$

と表されているとする. さらに, 表示の簡略化のため, 必要なら (Euclid 距離を変えない) 平行移動と unitary 変換を行って, $(z, w) = (z_1, \dots, z_r; w_1, \dots, w_q)$ を与えられた $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^q$ の座標系, $0 = (0, \dots, 0) \in V$, かつ

$$f_\mu(0) = 0, \quad \frac{\partial f_\mu}{\partial t_i}(0) = 0 \quad (1 \leq i \leq r, 1 \leq \mu \leq q)$$

とする. このとき, $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^q$ の原点 $(0, 0)$ は M の点で, 複素部分多様体 M の原点 $(0, 0)$ での接空間は $w_1 = \dots = w_q = 0$ である. また, $\|w\| = \sum_{\mu=1}^q |w_\mu|^2$ が十分に小さいとき, 点 $(0, w) \in \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^q$ に最も近い M の点は, 原点 $(0, 0)$ である.

$\delta_M(z, w)$ を $(z, w) \in \mathbb{C}^n$ から M までの Euclid 距離とし, $\varphi(z, w) = -\log \delta_M(z, w)$ とおく. r 次の Hermite 行列 $\Phi(w)$ と対称行列 $F_\mu(t)$ ($1 \leq \mu \leq q$) を

$$\Phi(w) = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(0, w) \right)_{1 \leq i, j \leq r}, \quad F_\mu(t) = \left(\frac{\partial^2 f_\mu}{\partial t_i \partial t_j}(t) \right)_{1 \leq i, j \leq r}$$

により定義し,

$$\mathcal{F}(w) = \sum_{\mu=1}^q \overline{F_\mu(0)} w_\mu$$

とおく. このとき次が成り立つ.

定理 2 (Levi form の表示 (2) [15]) 十分小さな $\varepsilon > 0$ が存在し, $0 < \|w\| < \varepsilon$ に対して

$$\Phi(w) = \frac{1}{2\|w\|^2} \overline{\mathcal{F}(w)} \mathcal{F}(w) \left[E - \overline{\mathcal{F}(w)} \mathcal{F}(w) \right]^{-1}$$

と表される.

注意 2 $\varphi(z, w) = -\log \delta_M(z, w)$ の complex Hessian matrix は

$$\begin{pmatrix} (\partial^2 \varphi / \partial z_i \partial \bar{z}_j) & (\partial^2 \varphi / \partial z_i \partial \bar{w}_\nu) \\ (\partial^2 \varphi / \partial w_\mu \partial \bar{z}_j) & (\partial^2 \varphi / \partial w_\mu \partial \bar{w}_\nu) \end{pmatrix} (0, w) = \begin{pmatrix} \Phi(w) & O \\ O & \Psi(w) \end{pmatrix}$$

となる. ここで, $\Phi(w)$ は上で定義された r 次 Hermite 行列で, $\Psi(w)$ は

$$\Psi(w) = (\partial^2(-\log \|w\|) / \partial w_\mu \partial \bar{w}_\nu)_{1 \leq \mu, \nu \leq q}$$

で定義される q 次 Hermite 行列である.

いま, 上で定義した行列 $F_\mu(t)$ ($1 \leq \mu \leq q$) を用いて $J(t) = (F_1(t), \dots, F_q(t))$ とおくと, ${}^t J(t)$ は, Gauss 写像

$$t \mapsto \left(\frac{\partial f_1}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial t_r}, \dots, \frac{\partial f_q}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial f_q}{\partial t_r} \right)$$

の Jacobi 行列になる. Fischer-Wu [4] による Gauss 写像の退化条件と複素部分多様体の「展開可能性」との間の研究があり, 複素部分多様体 M がほとんど至るところ ($J(t)$ の rank が maximal である点 $(t, f(t))$ で) 展開可能であるための必要十分条件は, 各 t に対し $\text{rank } J(t) < r$ であることが示されている.

定理 2 の応用として, 距離の Levi form の退化条件との間には次の関係が成り立つ.

系 2 ([15]) $\dim M = 1, 2, n-1$ のとき, \mathbb{C}^n の複素部分多様体 M がほとんど至るところ展開可能であるための必要十分条件は, 関数 $-\log \delta_M$ の Levi form が M の近くの各点で複素接方向に退化することである.

なお, この結果は, $n \geq 5$, $\dim M \neq 1, 2, n-1$ のときは成り立たず, 複素部分多様体の展開可能性と, 距離の Levi form の退化条件は一致しない. 例えば, \mathbb{C}^5 の複素部分多様体 $M = \{(z_1, z_2, z_3; w_1, w_2) \in \mathbb{C}^5 \mid w_1 = z_1 z_2, w_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3\}$ が反例になる ([15]).

5 \mathbb{C}^2 の実超曲面までの距離の Levi form

これまで, \mathbb{C}^n の複素部分多様体までの距離の Levi form を見てきたが, 当初の目的であった Levi 平坦実超曲面 S までの距離 δ_S の Levi form を調べる目的のためには不十分である. 実超曲面 S に含まれる複素超曲面 M までの距離 δ_M に対して $-\log \delta_M$ の Levi form を調べたのでは, $-\log \delta_S$ の Levi form の固有値の「下からの評価」しか得られない. そこで, まず S が \mathbb{C}^2 の実超曲面の場合に, 実微分を用いた強引な方法で $-\log \delta_S$ の Levi form の表示を求めてみることにした.

S は \mathbb{C}^2 の C^2 級の実超曲面で, 原点 $p_0 = (0, 0)$ を含み, p_0 の近くで C^2 級の実関数 r を用いて $y_2 = r(x_1, y_1, x_2)$ ($z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$) により定義されているとする. また, S の原点 p_0 における実接平面が $y_2 = 0$ であるように \mathbb{C}^2 の座標系を選んでおく. このとき, $|y|$ ($y \in \mathbb{R}$) が十分に小さければ, 実超曲面 S の p_0 での法線上の点 $p_y = (0, \sqrt{-1}y)$ に最も近い S の点は, 原点 p_0 となる.

実超曲面 S の定義関数 r の 2 階微分から決まる実対称行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{x_1x_1} & r_{x_1y_1} & r_{x_1x_2} \\ r_{y_1x_1} & r_{y_1y_1} & r_{y_1x_2} \\ r_{x_2x_1} & r_{x_2y_1} & r_{x_2x_2} \end{pmatrix} (0, 0, 0)$$

により定義し,

$$\begin{cases} h_{11}(y) = (a + c) + y\{2(b^2 - ac) + d^2 + e^2 - f(a + c)\} + 2y^2 \det(A) \\ h_{12}(y) = (d - \sqrt{-1}e) + y\{(be - cd) - \sqrt{-1}(bd - ae)\} \\ h_{22}(y) = f + y\{d^2 + e^2 - f(a + c)\} + y^2 \det(A) \\ \mu(y) = h_{11}(y)\{1 - y(a + c) + y^2(ac - b^2)\} - y|h_{12}(y)|^2 \end{cases}$$

とおく. また, 点 $p_y = (0, \sqrt{-1}y)$ での Levi form を

$$L[-\log \delta_S](p_y, \zeta) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 (-\log \delta_S)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} (p_y) \zeta_i \bar{\zeta}_j, \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{C}^2$$

とする. このとき次が成り立つ.

定理 3 (Levi form の表示 (3) [16]) 十分小さな $\varepsilon > 0$ が存在し, $0 < |y| < \varepsilon$ のとき, Levi form $L[-\log \delta_S](p_y, \zeta)$ は次のように表示される.

(i) $(a, b, c, d, e) \neq (0, 0, 0, 0, 0)$ のとき

$$L[-\log \delta_S](p_y, \zeta) = \frac{yh_{11}(y) \left| \zeta_1 + \frac{\overline{h_{12}(y)}}{h_{11}(y)} \zeta_2 \right|^2 + \frac{\mu(y)}{h_{11}(y)} |\zeta_2|^2}{4y^2 \det(E - yA)}$$

(ii) $(a, b, c, d, e) = (0, 0, 0, 0, 0)$ のとき

$$L[-\log \delta_S](p_y, \zeta) = \frac{|\zeta_2|^2}{4y^2(1 - fy)}$$

このことから, 関数 $-\log \delta_S$ の 1 点 $p_y = (0, \sqrt{-1}y)$ ($0 < |y| < \varepsilon$) での「強」多重劣調和性が判定できる.

系 3 ([16]) 関数 $-\log \delta_S$ の多重劣調和性は次の通りである.

- (i) $(r_{x_1x_1} + r_{y_1y_1})(0, 0, 0) < 0$ のとき, $-\log \delta_S$ は p_y ($-\varepsilon < y < 0$) で強多重劣調和である.
- (ii) $(r_{x_1x_1} + r_{y_1y_1})(0, 0, 0) < 0$, $(r_{x_1x_1}, r_{x_1y_1}, r_{y_1y_1})(0, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$ のとき, $-\log \delta_S$ は p_y ($0 < |y| < \varepsilon$) で強多重劣調和である.
- (iii) $(r_{x_1x_1} + r_{y_1y_1})(0, 0, 0) = 0$, $(r_{x_1x_1}, r_{x_1y_1}, r_{y_1y_1}, r_{x_1x_2}, r_{y_1x_2})(0, 0, 0) \neq (0, 0, 0, 0, 0)$ のとき, $-\log \delta_S$ は p_y ($0 < |y| < \varepsilon$) で複素接方向に強多重劣調和, ゆえに $1/\delta_S$ は p_y ($0 < |y| < \varepsilon$) で強多重劣調和である.

注意 3 $\rho(z_1, z_2) = y_2 - r(x_1, y_1, x_2)$ とおくと, 系 3 の中の各条件は, 複素微分を用いて次のように書き表せる.

- (i) $r_{x_1x_1} + r_{y_1y_1} < 0 \iff \rho_{z_1\bar{z}_1} > 0$
- (ii) $r_{x_1x_1} + r_{y_1y_1} = 0$, $(r_{x_1x_1}, r_{x_1y_1}, r_{y_1y_1}) \neq (0, 0, 0) \iff \rho_{z_1\bar{z}_1} = 0$, $\rho_{z_1z_1} \neq 0$
- (iii) $r_{x_1x_1} + r_{y_1y_1} = 0$, $(r_{x_1x_1}, r_{x_1y_1}, r_{y_1y_1}, r_{x_1x_2}, r_{y_1x_2}) \neq (0, 0, 0, 0, 0) \iff \rho_{z_1\bar{z}_1} = 0$, $(\rho_{z_1z_1}, \rho_{z_1z_2}) \neq (0, 0)$

いま, 実超曲面 S の原点 p_0 での複素接平面は $z_2 = 0$ であるから, $\rho_{z_1\bar{z}_1}(p_0) \geq 0$ という条件は §1 で述べた Levi の条件 (*) に一致する.

ここで, 例を 1 つ挙げる.

例 ([16]) \mathbb{C}^2 において

$$S = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_2 = t(z_1 + 1), t \in \mathbb{R}\}$$

で定義される実超曲面 S を考える. S は複素直線によって foliate され, Levi 平坦である. S は特異点 $(-1, 0)$ を持つが, S の点 $(0, 0)$ の近くでは実解析的である.

$z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ ($i = 1, 2$) とおいて $z_2 = t(z_1 + 1)$ ($t \in \mathbb{R}$) を実部・虚部分けると $x_2 = t(x_1 + 1)$, $y_2 = ty_1$ となり, S は $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ の近くで

$$y_2 = \frac{y_1x_2}{1+x_1} = y_1x_2(1-x_1+x_1^2-\dots)$$

と表される. ゆえに, 定理 3 の記号では $e = 1$, $(a, b, c, d, f) = (0, 0, 0, 0, 0)$ となり, Levi form は $0 < |y| < \varepsilon$ に対し

$$\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2(-\log \delta_S)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(0, \sqrt{-1}y) \zeta_i \bar{\zeta}_j = \frac{1}{4(1-y^2)} \left| \zeta_1 + \frac{\sqrt{-1}}{y} \zeta_2 \right|^2$$

と表示される. 関数 $-\log \delta_S$ は点 $p_y = (0, \sqrt{-1}y)$ ($0 < |y| < \varepsilon$) で複素接方向 $\zeta_2 = 0$ に強多重劣調和, 関数 $1/\delta_S$ は点 p_y ($0 < |y| < \varepsilon$) で強多重劣調和である.

定理 3 または系 3 より, $S \subset \mathbb{C}^2$ のとき, $-\log \delta_S$ の Levi form の「1 点での退化条件」は完全に分かるが, 「1 点の近傍での退化条件」については次が成り立つ.

定理 4 (Levi form の退化条件 (1) [16]) S を \mathbb{C}^2 の C^3 級の実超曲面, p_0 を S の 1 点とする. p_0 のある近傍 $U \subset \mathbb{C}^2$ が存在して $-\log \delta_S$ の Levi form が $U \setminus S$ の各点で複素接方向に退化する (固有値 0 を持つ) ための必要十分条件は, \mathbb{C} のある開集合で定義された C^3 級の実曲線 A で $S = (\mathbb{C} \times A) \cap U$ となるものが存在することである.

このことから, 2 次元複素トーラス \mathbb{T}^2 内の C^3 級の境界 S を持つ擬凸領域 D の Stein 性が判定できる. すなわち, $\pi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ を canonical projection としたとき, \mathbb{C} の C^3 級の実曲線 A を用いて $\pi^{-1}(S) = \mathbb{C} \times A$ と表される場合以外, $D = \mathbb{T}^2 \setminus S$ は Stein である.

ここで, 実超曲面 S が C^3 級であるという仮定は C^2 級で十分かも知れない. この点は, Levi form のより良い表示 (1 点ではなく 1 点の近傍での表示) が得られれば, 自然に解決できると考えている. 定理 3 の Levi form の表示は, $S \subset \mathbb{C}^2$ を \mathbb{R}^4 の 3 次の実超曲面と見て実微分を用いて計算し, 後で複素微分に書き直したもので, 複素解析的な見通しが悪い. そこで, 実超曲面までの距離の Levi form を複素解析的に理解し, \mathbb{C}^n の実超曲面までの距離の Levi form を求めたいと考えるようになった.

6 \mathbb{C}^n の実超曲面までの距離の Levi form

S を $p_0 \in \mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) の近くで定義された C^2 級の実超曲面, $z = (z_1, \dots, z_n)$ を p_0 を中心とする \mathbb{C}^n の座標系とする. $0^* = (0, 0) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$ の近傍 V と C^2 級の関数 $r: V \rightarrow \mathbb{R}$ により, S は

$$S = \{z \in V \times \mathbb{R} \mid y_n = r(z_1, \dots, z_{n-1}, x_n)\}$$

と表されているとする. また, S は \mathbb{C}^n の原点 $p_0 = (0^*, 0) \in V \times \mathbb{R}$ を含み, S の p_0 での実接平面 $T_{p_0}(S)$ は $y_n = 0$ であるとする. このとき, S の p_0 での法線 $N_{p_0}(S)$ は $z_1 = \dots = z_{n-1} = x_n = 0$ であり, $y \in \mathbb{R}$ に対し $p_y := (0, \sqrt{-1}y) \in N_{p_0}(S)$ かつ $|y|$ が十分に小さければ $\delta_S(p_y) = \text{dist}(p_y, p_0) = |y|$ となる.

実超曲面 S で分けられた 2 つの領域を

$$\begin{aligned}\Omega_- &= \{z \in V \times \mathbb{R} \mid y_n < r(z_1, \dots, z_{n-1}, x_n)\} \\ \Omega_+ &= \{z \in V \times \mathbb{R} \mid y_n > r(z_1, \dots, z_{n-1}, x_n)\}\end{aligned}$$

とし, S までの符号付き距離を

$$\delta_S^*(z) = \begin{cases} -\delta_S(z), & z \in \Omega_- \cup S \\ \delta_S(z), & z \in \Omega_+ \end{cases}$$

とする. また, 4 つの $n-1$ 次正方行列を

$$\begin{aligned}H_1 &= \left(\frac{\partial^2(-r)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right) (0^*), & H_2 &= \left(\frac{\partial^2(-r)}{\partial z_i \partial x_n} \cdot \frac{\partial^2(-r)}{\partial \bar{z}_j \partial x_n} \right) (0^*) \\ S_1 &= \left(\frac{\partial^2(-r)}{\partial z_i \partial z_j} \right) (0^*), & S_2 &= \left(\frac{\partial^2(-r)}{\partial z_i \partial x_n} \cdot \frac{\partial^2(-r)}{\partial z_j \partial x_n} \right) (0^*)\end{aligned}$$

により定義し, $y \in \mathbb{R}$ に対し

$$c(y) = \left[1 + y \cdot \frac{\partial^2(-r)}{\partial x_n \partial x_n} (0^*) \right]^{-1}$$

とおく. H_1, H_2 は Hermite 行列で, S_1, S_2 は対称行列である.

このとき, \mathbb{C}^n の C^2 級の実超曲面 S までの符号付き距離 δ_S^* の, 複素接方向の Levi form に対応する $n-1$ 次 Hermite 行列

$$\Phi^*(p_y) = \left(\frac{\partial^2 \delta_S^*}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right) (p_y)$$

は, 上の 4 つの行列により次のように表される.

定理 5 (Levi form の表示 (4) [17]) 十分小さな $\varepsilon > 0$ が存在し, $|y| < \varepsilon$ のとき,

$$\Phi^*(p_y) = A(y) \left[E + 2y \cdot A(y) \right]^{-1}$$

と表される. ここで,

$$A(y) = H(y) - 2y \cdot S(y) \left[E + 2y \cdot \bar{H}(y) \right]^{-1} \bar{S}(y)$$

かつ, $H(y), S(y)$ は, それぞれ $H(y) = H_1 - y \cdot c(y)H_2$, $S(y) = S_1 - y \cdot c(y)S_2$ で定義される Hermite 行列, 対称行列である.

この表示より, 2 つの Hermite 行列 $\Phi^*(p_y)$ と $A(y)$ は, $|y| < \varepsilon$ のとき, 同じ signature を持つことが分かる. さらに, 関数 $-\log \delta_S$ が S の近くで複素接方向に強多重劣調和になるための必要十分条件を求めることができる. 実際,

$$\left(\frac{\partial^2(-\log \delta_S)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right) (p_y) = -\frac{1}{y} \left(\frac{\partial^2 \delta_S^*}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right) (p_y)$$

より, この条件は Hermite 行列 $-A(y)/y$ が正定値になる条件と同値である.

以下, 簡単のため, Hermite 行列 H が正定値, 半正定値であることを, それぞれ $H > 0$, $H \geq 0$ と書くことにする.

補題 1 Hermite 行列 $-A(y)/y$ の正定値性は次の通りである.

- (i) $-A(y)/y \geq 0$ ($-\varepsilon < y < 0$) $\iff H_1 \geq 0$
- (ii) $-A(y)/y > 0$ ($-\varepsilon < y < 0$) $\iff H_1 \geq 0, H_1 + H_2 + S_1 \bar{S}_1 > 0$
- (iii) $-A(y)/y > 0$ ($0 < |y| < \varepsilon$) $\iff H_1 = O, H_2 + S_1 \bar{S}_1 > 0$

よって次が成り立つ.

系 4 ([17]) 関数 $-\log \delta_S$ の多重劣調和性は次の通りである.

- (i) $-\log \delta_S$ が p_y ($-\varepsilon < y < 0$) で複素接方向に (弱) 多重劣調和であるための必要十分条件は, $H_1 \geq 0$ である.
- (ii) $-\log \delta_S$ が p_y ($-\varepsilon < y < 0$) で複素接方向に強多重劣調和であるための必要十分条件は, $H_1 \geq 0$ かつ $H_1 + H_2 + S_1 \bar{S}_1 > 0$ である.
- (iii) $-\log \delta_S$ が p_y ($0 < |y| < \varepsilon$) で複素接方向に強多重劣調和であるための必要十分条件は, $H_1 = O$ かつ $H_2 + S_1 \bar{S}_1 > 0$ である.

ここで, $H_2 + S_1 \bar{S}_1 > 0$ という条件を調べるために

$$\rho_1(z_1, \dots, z_n) = y_n - r(z_1, \dots, z_{n-1}, x_n)$$

とおくと, $n-1$ 次正方行列 S_1, H_2 は

$$S_1 = \left(\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial z_i \partial z_j} (p_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n-1}, \quad H_2 = {}^t \mathbf{a} \bar{\mathbf{a}}$$

と表せる. ここで

$$\mathbf{a} = \left(\frac{\partial^2(-r)}{\partial x_n \partial z_1}, \dots, \frac{\partial^2(-r)}{\partial x_n \partial z_{n-1}} \right) (0^*) = 2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial z_n \partial z_1}, \dots, \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial z_n \partial z_{n-1}} \right) (p_0)$$

である. いま, $(n, n-1)$ -行列 S を

$$S = \left(\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} (p_0) \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1}$$

により定義すると,

$$S_1 \bar{S}_1 + \frac{1}{4} H_2 = {}^t S_1 \bar{S}_1 + \frac{1}{4} {}^t \mathbf{a} \bar{\mathbf{a}} = ({}^t S_1, {}^t \mathbf{a}/2) \begin{pmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{\mathbf{a}}/2 \end{pmatrix} = {}^t S \bar{S}$$

となる. よって次が成り立つ.

補題 2 $H_2 + S_1 \bar{S}_1 > 0 \iff \text{rank } S = n-1$

以下では, ρ ($d\rho \neq 0$) を, \mathbb{C}^n の C^2 級の実超曲面 S の「任意の」定義関数とする. 関数 $-\log \delta_S$ の多重劣調和性は, $z \in S$ での複素接空間 $T_z^{1,0}(S)$ に関する条件により, 次のように特徴付けられる.

定理 6 (Levi form の退化条件 (2) [17]) S を \mathbb{C}^n の C^2 級の実超曲面, ρ ($d\rho \neq 0$) を S の任意の定義関数とすると, 関数 $-\log \delta_S$ の多重劣調和性は次の通りである.

- (i) 関数 $-\log \delta_S$ が S の近くの $\rho < 0$ の範囲で複素接方向に (弱) 多重劣調和であるための必要十分条件は, n 次 Hermite 行列

$$\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right)$$

が, 各 $z \in S$ に対し, $T_z^{1,0}(S)$ 上の Hermite 形式として半正定値であることである.

- (ii) 関数 $-\log \delta_S$ が S の近くの $\rho < 0$ の範囲で複素接方向に強多重劣調和であるための必要十分条件は, 2 つの n 次 Hermite 行列

$$\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right), \quad \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right) + \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z_i \partial z_j} \right) \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial \bar{z}_i \partial \bar{z}_j} \right)$$

が, 各 $z \in S$ に対し, $T_z^{1,0}(S)$ 上の Hermite 形式としてそれぞれ半正定値, 正定値であることである.

- (iii) 関数 $-\log \delta_S$ が S の近くの $\rho \neq 0$ の範囲で複素接方向に強多重劣調和であるための必要十分条件は, S が Levi 平坦, かつ n 次対称行列

$$\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z_i \partial z_j} \right)$$

が, 各 $z \in S$ に対し, $T_z^{1,0}(S)$ 上の線形写像として maximal rank $n-1$ を持つことである.

上の定理の (i), (ii), (iii) の中に現れる実超曲面 S に関する条件は, S の定義関数 ρ の選び方によらない条件であることに注意する. 定理の証明のためには, S の特別な定義関数 $\rho_1(z_1, \dots, z_n) = y_n - r(z_1, \dots, z_{n-1}, x_n)$ について確かめればよいが, この場合に定理が成り立つことを見るのは容易である.

注意 4 定理 6 (i) の実超曲面 S に関する条件は, 良く知られた Levi の条件である.

7 今後に向けて

以上の通り, \mathbb{C}^n の実超曲面 S に対し, 関数 $-\log \delta_S$ の 1 点での Levi form の表示を求め, その結果を用いて Levi form の退化条件を求めることができた. ある意味では, §1 の問題 1, 2 の解答になっているといえる. しかし, 少し応用を考えたとき, これまでの特別な座標系と, 超曲面の特別な定義関数による Levi form の表示では, いろいろな情報を引き出すのが困難であることに気付く. $-\log \delta_S$ の Levi form の退化条件は, 「1 点」だけでなく「1 点の近傍」で退化するための S の条件を求めることに意味があるが, これまでに得た Levi form の表示からは, そのような条件を導き出すのは難しい (cf. §5, 定理 4). また, S が複素射影空間 \mathbb{P}^n や, 一般の Kähler 多様体の中の実超曲面である場合に「Levi form の表示公式」を拡張する可能性を想像したとき, $S \subset \mathbb{C}^n$ の場合でも, S の任意の定義関数 ρ ($d\rho \neq 0$) による Levi form の表示を求めておく必要性を感じる.

この点について, 最近, $S \subset \mathbb{C}^n$ の定義関数 ρ が $\|\text{grad } \rho\|^2 = 4 \cdot \sum_{i=1}^n |\partial\rho/\partial z_i|^2 = 1$ を満たす場合に, 今までの Levi form の計算方法とは違った方法 (Lagrange の未定乗数法を用いる方法) で Levi form の表示を得ることができた. 本稿の最後に, その結果を紹介する.

S を \mathbb{C}^n の C^2 級の実超曲面, ρ を S の定義関数で $\|\text{grad } \rho\| \equiv 1$ を満たすものとする. ρ の 2 階微分から, 次の 2 つの n 次行列

$$H(z) = \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad S(z) = \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z_i \partial z_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

を定義する. $H(z)$ は Hermite 行列 (complex Hessian matrix), $S(z)$ は対称行列 (holomorphic Hessian matrix) である. また, $\delta^* := \delta_S^*$ を S までの符号付き距離 ($\rho(z) < 0$ なら $\delta^*(z) < 0$) とし, $z \in \mathbb{C}^n, p \in S$ に対し

$$M(z, p) = H(p) - 2\delta^*(z)S(p) \left[E + 2\delta^*(z)\overline{H}(p) \right]^{-1} \overline{S}(p)$$

とおく. このとき, $z \in \mathbb{C}^n$, $p \in S$, $\delta_S(z) = \text{dist}(z, p)$ かつ $\delta_S(z)$ が十分に小さければ

$$\left(\frac{\partial^2 \delta^*}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right) (z) = M(z, p) \left[E + 2\delta^*(z)M(z, p) \right]^{-1}$$

と表示される.

この表示から, §5, 定理 6 を再び示すことができる. この表示に用いた S の定義関数 ρ は, $\|\text{grad } \rho\| \equiv 1$ という条件より, 実は $\rho = \delta_S^*$ である. S の一般の定義関数 ρ ($d\rho \neq 0$) に対して Levi form の表示を求めることが, 当面の課題である.

参考文献

- [1] E. Barletta, S. Dragomir and K. L. Duggal, *Foliations in Cauchy-Riemann geometry*, Math. Surveys and Monogr. **140**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [2] M. Brunella, On the dynamics of codimension one holomorphic foliations with ample normal bundle, *Indiana Univ. Math. J.* **57** (2008), 3101–3114.
- [3] G. Elencwajg, Pseudo-convexité locale dans les variétés kählériennes, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **25** (1975), 295–314.
- [4] G. Fischer and H. Wu, Developable complex analytic submanifolds, *Internat. J. Math.*, **6** (1995), 229–272.
- [5] K. Fritzsche and H. Grauert, *From holomorphic functions to complex manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, **213**, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [6] R. Fujita, Domaines sans point critique intérieur sur l'espace projectif complexe, *J. Math. Soc. Japan* **15** (1963), 443–473.
- [7] S. I. Goldberg and S. Kobayashi, Holomorphic bisectional curvature, *J. Differential Geometry* **1** (1967), 225–233.
- [8] H. Grauert, On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds, *Ann. of Math. (2)* **68** (1958), 460–472.
- [9] R. E. Greene and H. Wu, On Kähler manifolds of positive bisectional curvature and a theorem of Hartogs, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **47** (1978), 171–185.
- [10] S. G. Krantz, *Function Theory of Several Complex Variables*, 2nd ed., Wadsworth & Brooks/Cole Math. Ser., Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 1992.
- [11] E. E. Levi, Sulle ipersuperficie dello spazio a 4 dimensioni che possono essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse, *Ann. Mat. Pura Appl.* **18** (1911), 69–79.
- [12] A. Lins-Neto, A note on projective Levi-flats and minimal sets of algebraic functions, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **49**, **49** (1999), 1369–1385.

- [13] K. Matsumoto, Pseudoconvex domains of general order and q -convex domains in the complex projective space, *J. Math. Kyoto Univ.* **33** (1993), 685–695.
- [14] K. Matsumoto, Boundary distance functions and q -convexity of pseudoconvex domains of general order in Kähler manifolds, *J. Math. Soc. Japan* **48** (1996), 85–107.
- [15] K. Matsumoto, Levi form of logarithmic distance to complex submanifolds and its application to developability, *Complex analysis in several variables — Memorial Conference of Kiyoshi Oka’s Centennial Birthday*, 203–207, *Adv. Stud. Pure Math.* **42**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004.
- [16] K. Matsumoto, Some geometric properties of Levi form of distance to real hypersurfaces in \mathbb{C}^2 , *Japan. J. Math. (N. S.)* **30** (2004), 75–90.
- [17] K. Matsumoto, Representation and non-degeneracy condition for Levi form of distance to real hypersurfaces in \mathbb{C}^n , *Kyushu J. Math.*, to appear.
- [18] K. Matsumoto and T. Ohsawa, On the real analytic Levi flat hypersurfaces in complex tori of dimension two, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **52** (2002), 1525–1532.
- [19] T. Ohsawa, A Levi-flat in a Kummer surface whose complement is strongly pseudoconvex, *Osaka J. Math.* **43** (2006), 747–750.
- [20] T. Ohsawa, A reduction theorem for stable sets of holomorphic foliations of complex tori, *Nagoya Math. J.*, to appear.
- [21] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables VI, Domaines pseudoconvexes, *Tohoku Math. J.* **49** (1942), 15–52.
- [22] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables IX, Domaines finis sans point critique intérieur, *Japan. J. Math.* **23** (1953), 97–155.
- [23] Y.-T. Siu, Pseudoconvexity and the problem of Levi, *Bull. Amer. Math. Soc.* **84** (1978), 481–512.
- [24] Y.-T. Siu, Nonexistence of smooth Levi-flat hypersurfaces in complex projective spaces of dimension ≥ 3 , *Ann. of Math. (2)* **151** (2000), 1217–1243.
- [25] O. Suzuki, Pseudoconvex domains on a Kähler manifold with positive holomorphic bisectional curvature, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **12** (1976/77), 191–214.
- [26] A. Takeuchi, Domaines pseudoconvexes infinis et la métrique riemannienne dans un espace projectif, *J. Math. Soc. Japan* **16** (1964), 159–181.
- [27] A. Takeuchi, Domaines pseudoconvexes sur les variétés kählériennes, *J. Math. Kyoto Univ.* **6** (1967), 323–357.
- [28] T. Ueda, Pseudoconvex domains over Grassmann manifolds, *J. Math. Kyoto Univ.* **20** (1980), 391–394.