ベッセル過程のパラメータ依存性について

種村　秀紀 (千葉大　理)

勉強会「Loewner 方程式とSLE」

13 February 2010

参考文献

G. F. Lawler, *Conformally Invariant Processes in the Plane*, (American Mathematical Society, 2005).

香取眞理, Summer School 数理物理 2009 「ベキ乗則の数理」における講義ノート(2009 年 8 月 27-29 日，東京大学大学院数理科学研究科，駒場)

1. d-次元ベッセル過程 (BES$_d$) の定義

d 次元ブラウン運動 $\boldsymbol{B}_t = (B_t^1, B_t^2, \cdots, B_t^d)$ $(d \in \mathbb{N})$ の動径成分

$$X_t = |\boldsymbol{B}(t)| = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (B_t^j)^2}$$

を d-次元ベッセル過程 (BES$_d$) という．$F(x_1, x_2, \cdots, x_d) = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} x_j^2}$ として, $|F(\boldsymbol{B}(t))|$ を伊藤の公式を用いて計算すると, X_t が**確率微分方程式 (stochastic differential equation, SDE)** は

$$dX_t = dB_t + \frac{d-1}{2}\frac{1}{X_t}dt \tag{1}$$

をみたすことが分かる．

$$\because \quad \frac{\partial F}{\partial x_k} = \frac{x_k}{F}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} = \frac{1}{F} - \frac{x_k^2}{F^3}$$

$$\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} = \frac{1}{F}\left\{d - \frac{1}{F^2}\sum_{k=1}^{d} x_k^2\right\} = \frac{d-1}{F}$$

なので，伊藤の公式と，$B_t^1, \cdots, B_t^d$ の独立性 $dB_t^k dB_t^\ell = \delta_{k\ell}dt$，$1 \le k, \ell \le d$ より

$$dX_t = \frac{1}{X_t}\sum_{k=1}^{d} B_t^k dB_t^k + \frac{d-1}{2}\frac{dt}{X_t}$$

となる．ここで，マルチンゲール部分の二次変分をとると，

$$\left(\frac{1}{X_t}\sum_{k=1}^{d} B_t^k dB_t^k\right)^2 = \frac{1}{X_t^2}\sum_{k=1}^{d}(B_t^k)^2(dB_t^k)^2 = \frac{1}{X_t^2}\sum_{k=1}^{d}(B_t^k)^2 dt = dt$$

であるから， マルチンゲール部分は，$\{B_t^j\}_{j=1}^d$ とは別の BM，B_t である．∎

確率微分方程式

$$dX_t = dB_t + \frac{d-1}{2}\frac{1}{X_t}dt \tag{1}$$

は $d \geq 1$ であれば，整数でない場合でも非負である解の存在性と一意性が示され，X_t が拡散過程（強マルコフ、道が連続）であることも分かる。$d \geq 1$ の実数に対しても (1) の解で与えらる確率過程をベッセル過程という.

ベッセル過程のパラメータとして，次元 d の代わりにν を使うことも多い.

$$\nu = \frac{d-2}{2} \geq -\frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad d = 2(\nu+1) \geq 1 \tag{2}$$

この ν は，ベッセル関数の確率密度関数および生成作用素がパラメータ ν の変形ベッセル関数に関係があることによる.

ベッセル過程の推移確率密度関数

ベッセル過程 BES_d の**推移確率密度関数**は，SDE (1) に対応した**コルモゴロフ後進方程式(Kolmogorov backward equation)**

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t;x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(t;x,y) + \frac{d-1}{2}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}p(t;x,y)$$

の解（$1 \leq d < 2$ で原点に反射条件を課す）で与えれ，

$$p(t,y|x) = \frac{1}{t}\frac{y^{\nu+1}}{x^{\nu}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2t}\right)I_{\nu}\left(\frac{xy}{t}\right)$$

となる．ただし，$I_{\nu}(z)$ は変形ベッセル関数

$$I_{\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}$$

であり，$\Gamma(z)$ はガンマ関数：

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-u}u^{z-1}du, \quad \Re z > 0$$

を表す.

1．d-次元ベッセル過程(BES$_d$）の性質

初期値を上付き添字で表し，$x > 0$ から出発した BES$_d$ を X_t^x と書くことにする；

$$dX_t^x = \frac{d-1}{2}\frac{dt}{X_t^x} + dB_t, \quad t \geq 0, \qquad X_0^x = x > 0 \tag{3}$$

である.

ベッセル過程のスケーリング則　任意の $x > 0$ に対して

$$\frac{1}{x} X_{x^2 t}^x \overset{\text{(law)}}{=} X_t^1 \tag{4}$$

が成り立つ.

$x > 0$ から出発した BES$_d$ が初めて原点に到達する時刻を T_x と記す；

$$T_x = \inf\left\{t > 0 : X_t^x = 0\right\}. \tag{5}$$

SDE (3) は $t \leq T_x$ まではwell-defined である.

定理１.

(i) $d \geq 2 \quad \Longrightarrow \quad T_x = \infty, {}^\forall x > 0$ が確率１で成り立つ.

(ii) $d > 2 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t \to \infty} X_t^x = \infty, {}^\forall x > 0$ が確率１で成り立つ.

(iii) $d = 2 \quad \Longrightarrow \quad \inf_{t > 0} X_t^x = 0, {}^\forall x > 0$ が確率１で成り立つ.

(iv) $1 \leq d < 2 \quad \Longrightarrow \quad T_x < \infty, {}^\forall x > 0$ が確率１で成り立つ.

定理２.

(i) $\frac{3}{2} < d < 2 \quad \Longrightarrow \quad x < y$ に対して, $\mathbb{P}(T_x = T_y) > 0$.

(ii) $1 \leq d \leq \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad x < y$ に対して, $T_x < T_y$ が確率１で成り立つ.

SLE$_\kappa$ と BES$_d$ の関係

Schramm は, 駆動関数を

$$U_t = \sqrt{\kappa} B_t, \quad \kappa > 0, \quad B_0 = 0$$

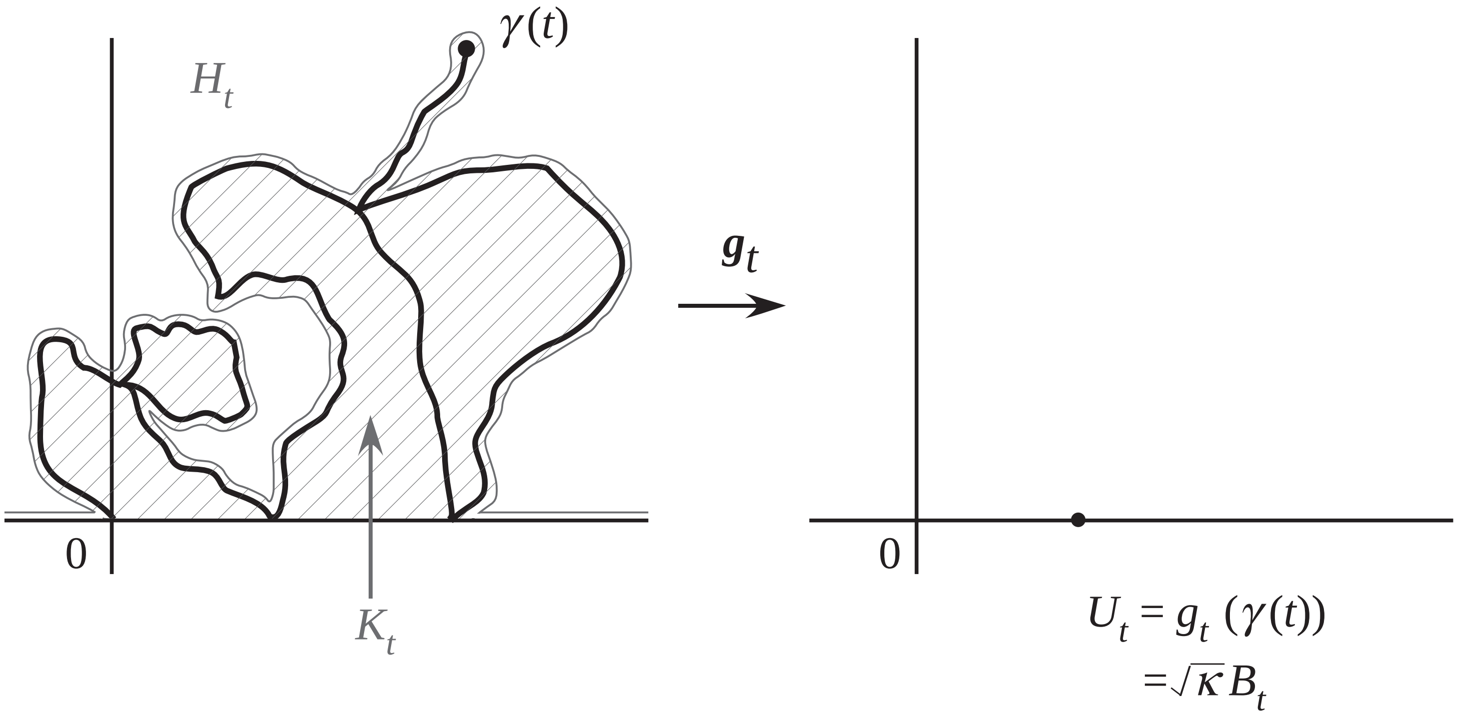
としたレヴナー方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t}, \quad g_0(z) = z \tag{6}$$

の解として得られる (時刻 $t \geq 0$ で径数付けされる) 共形変換の族 $\{g_t\}_{t \geq 0}$ を提案した．これは現在, **(chordal) シュラム・レヴナー発展 (Schramm-Loewner evolution)** とよばれている．以下ではこれを, 径数 κ も付して, SLE$_\kappa$ と略記する．

$$U_t = \lim_{s \nearrow t} g_s(\gamma(t))$$

で定まる曲線 $\gamma = \{\gamma(t) : t \in [0, \infty)\}$ が確率１で定まることが分かる．



SLE$_\kappa$ γ は一般には単純曲線ではない．以下，

$$
\begin{aligned}
H_t &= \mathbb{H} \setminus \gamma[0,t] \text{ の非有界な連結領域} \\
K_t &= \mathbb{H} \setminus H_t
\end{aligned}
$$

とする．K_t は SLE$_\kappa$ 曲線$\gamma[0,t]$ の hull と呼ばれる．上半面 $\mathbb{H}$ 内の SLE$_\kappa$ 曲線$\gamma(0,t]$ と hull K_t は，共形変換 g_t によって $\mathbb{H}$ から消去される．曲線の先端 $\gamma(t)$ は $\mathbb{H}$ の境界である実軸上の 1 点 U_t に写されるのであるが，この点は $\sqrt{\kappa}B_t$ で与えられる．

SLE$_\kappa$ のスケーリング性

BM のスケーリング性が BES$_d$ に遺伝することを見たが，同様にこれは SLE$_\kappa$ にも遺伝する．SLE$_\kappa$ もスケーリング性をもつことが分かる．

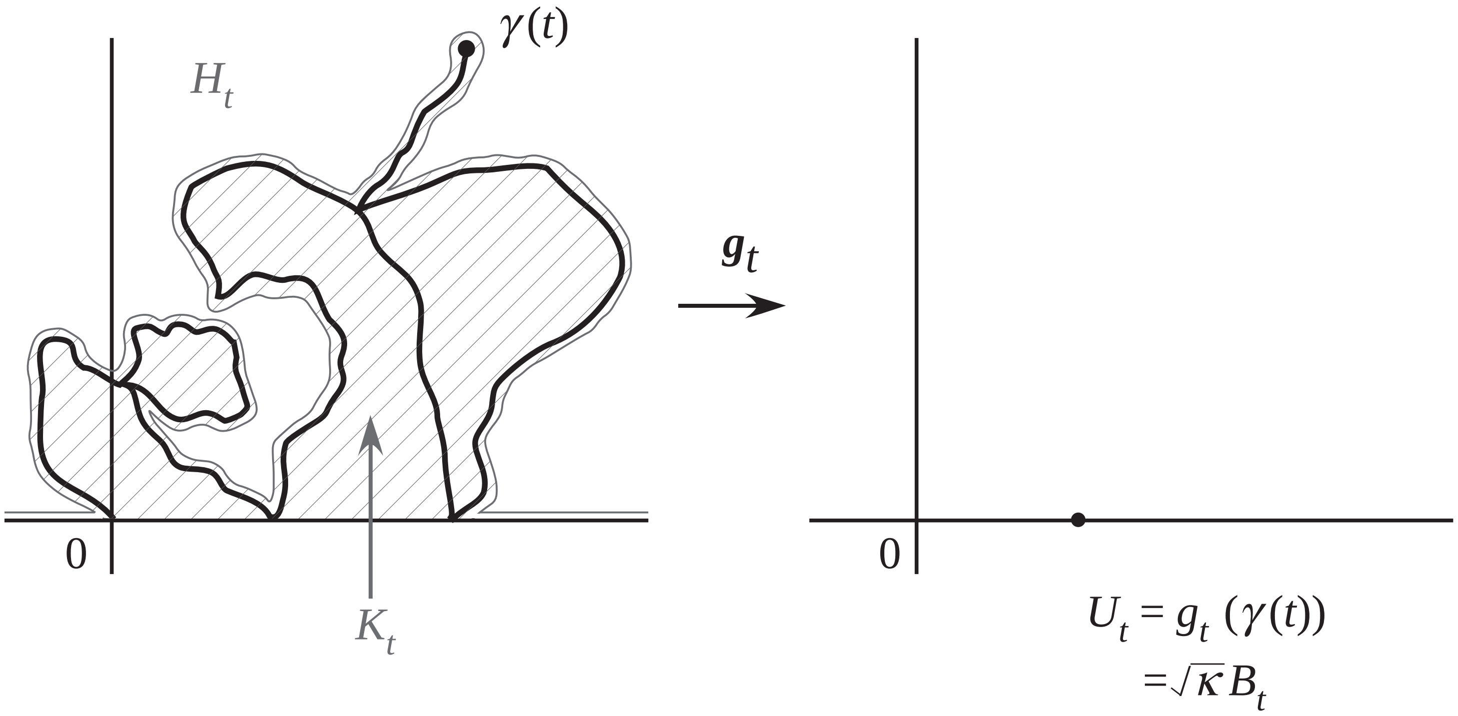
任意の $r > 0$ に対して

$$\frac{1}{r} g_{r^2 t}(rz) \overset{\text{(law)}}{=} g_t(z)$$

が成り立つ．すなわち，

$$\frac{1}{r} \gamma(r^2 t) \overset{\text{(law)}}{=} \gamma$$

である．



$$
\begin{aligned}
T_z &= \sup\left\{ t \geq 0 : \text{解 } g_t(z) \text{ が well-defined で } g_t(z) \in \mathbb{H} \right\} \\
&= \inf\left\{ t \geq 0 : z \in K_t \right\} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

が定義される．これを用いると

$$
H_t = \left\{ z \in \mathbb{H} : T_z > t \right\}, \quad K_t = \left\{ z \in \mathbb{H} : T_z \leq t \right\}
$$

と表せる

$$\widehat{g}_t(z) = \frac{g_t(z) - \sqrt{\kappa}B_t}{\sqrt{\kappa}}$$

とすると，$\widehat{g}_t(z)$ は次の確率微分方程式をみたすことになる．

$$d\widehat{g}_t(z) = \frac{2/\kappa}{\widehat{g}_t(z)}dt + dW_t, \quad \widehat{g}_0(z) = \frac{z}{\sqrt{\kappa}}, \quad W_t = -B_t.$$

ここで

$$\kappa = \frac{4}{d-1} \quad \Longleftrightarrow \quad d = \frac{4}{\kappa} + 1 \tag{8}$$

とすると

$$d\widehat{g}_t(z) = \frac{d-1}{2}\frac{1}{\widehat{g}_t(z)}dt + dW_t \tag{9}$$

となり，BES_d の複素版に他ならない．

$\mathcal{R}[\widehat{g}_t(z)] = R_t$, $\mathcal{I}[\widehat{g}_t(z)] = I_t$ とおくと

$$dR_t = \frac{d-1}{2}\frac{R_t}{R_t^2 + I_t^2}dt + dW_t, \qquad dI_t = -\frac{d-1}{2}\frac{I_t}{R_t^2 + I_t^2}dt$$

となり, 伊藤の公式を用いると

$$d(R_t^2 + I_t^2) = 2(d-1)\frac{R_t^2}{R_t^2 + I_t^2}dt - (d-2)dt + 2R_t dW_t$$

をえる. $\displaystyle\int_0^{r(t)} 4R_t^2 dt = t$ で定まる $r(t)$ で時間変更を行い, $Y_t = R_{r(t)}^2 + I_{r(t)}^2$, $\widetilde{R}_t = R_{r(t)}$, $\widetilde{W}_t = \int_0^{r(t)} 2R_t dW_t$ （$\widetilde{W}_t$ はブラウン運動となる） とおくと,

$$dY_t = d\widetilde{W}_t + \frac{d-1}{2}\frac{dt}{X_t} - \frac{(d-2)dt}{4\widetilde{R}_t} = d\widetilde{W}_t + \frac{1}{2}\frac{dt}{X_t} - \frac{d-1}{2}\left(\frac{dt}{X_t} - \frac{dt}{2\widetilde{R}_t^2}\right)$$

をみたす.

定理1.

(i) $d \geq 2 \implies T_x = \infty, {}^\forall x > 0$ が確率1で成り立つ.

(ii) $d > 2 \implies \lim_{t \to \infty} X_t^x = \infty, {}^\forall x > 0$ が確率1で成り立つ.

(iii) $d = 2 \implies \inf_{t > 0} X_t^x = 0, {}^\forall x > 0$ が確率1で成り立つ.

(iv) $1 \leq d < 2 \implies T_x < \infty, {}^\forall x > 0$ が確率1で成り立つ.

定理2.

(i) $\frac{3}{2} < d < 2 \implies x < y$ に対して, $\mathbb{P}(T_x = T_y) > 0$.

(ii) $1 \leq d \leq \frac{3}{2} \implies x < y$ に対して, $T_x < T_y$ が確率1で成り立つ.

定理３．

(i)　$0 < \kappa \leq 4$ のとき，γ は単純曲線であり，$\gamma(0, \infty) \subset \mathbb{H}$ である．また，このとき確率 1 で

$$\lim_{t \to \infty} |\gamma(t)| = \infty.$$

(ii)　$4 < \kappa < 8$ のとき，γ は自分自身や実軸と接することがあるが，確率 1 で

$$\bigcup_{t>0} \overline{K_t} = \overline{\mathbb{H}}$$

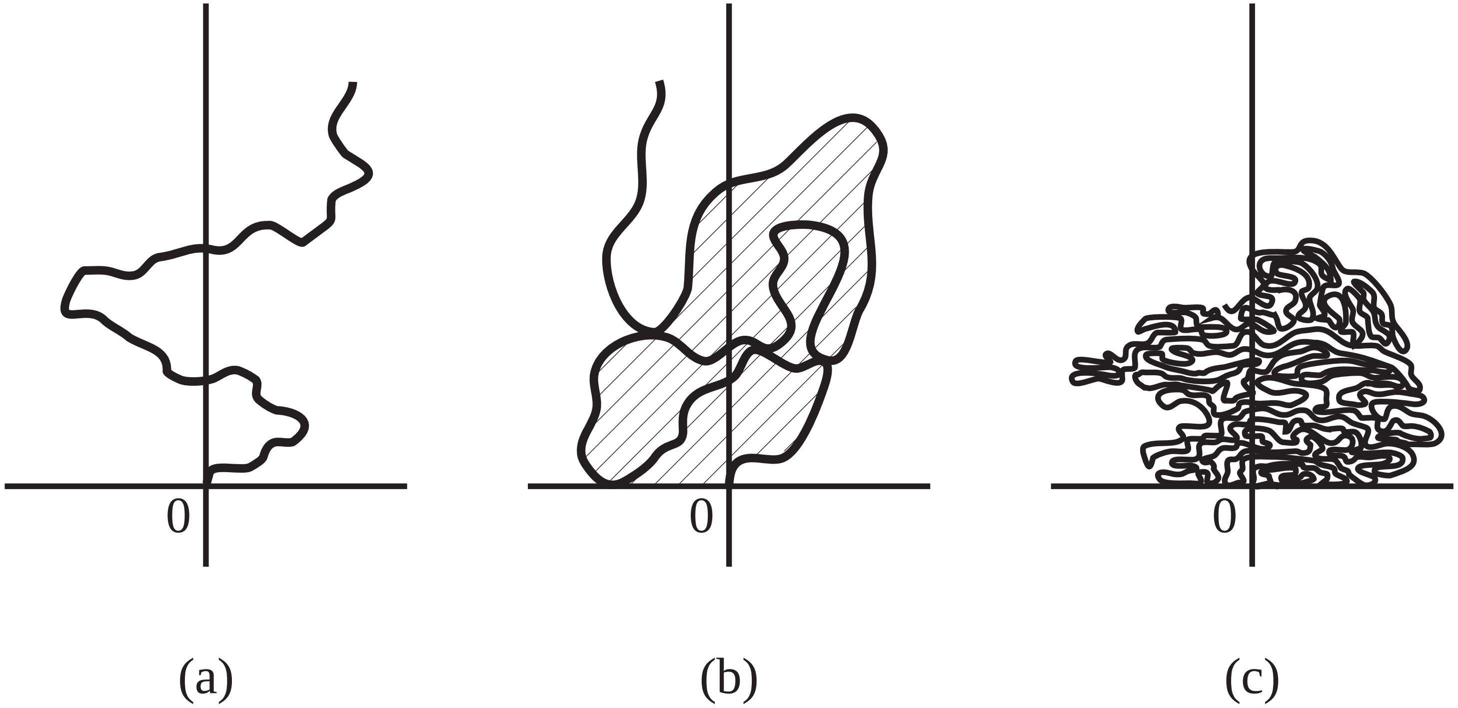
である．よって，$|\gamma(t)| \to \infty$ である．しかし

$$\gamma[0, \infty) \cap \mathbb{H} \neq \mathbb{H}$$

である．つまり，$\mathbb{H}$ 全体を埋めつくすことはない．

(iii)　$\kappa \geq 8$ のとき，γ は $\overline{\mathbb{H}}$ のすべての点を埋めつくす；

$$\gamma[0, \infty) = \overline{\mathbb{H}}.$$



(a) 実軸に接することのない単純曲線．$0 < \kappa \leq 4$ のときのSLE 曲線の様子.

(b) 自分自身や実軸に接するが十文字に交わることはない曲線．曲線が伸びていくと，曲線で囲まれた領域(斜線部分) は上半平面 $\mathbb{H}$ を覆いつくしていくが，曲線自身で $\mathbb{H}$ が埋めつくされることはない．$4 < \kappa < 8$ のときの SLE 曲線の様子.

(c) 上半平面 $\mathbb{H}$ を埋めつくしていく曲線．$\kappa \geq 8$ のときの SLE 曲線の様子.

定理１の証明

$0 < x_1 < x < x_2 < \infty$ に対して

$$\sigma = \inf\left\{ t > 0 : X_t^x = x_1 \quad \text{or} \quad X_t^x = x_2 \right\}$$

として,

$$\phi(x) = \phi(x; x_1, x_2) = \mathbb{P}(X_\sigma^x = x_2)$$

と定義する．この定義から明らかに

$$\phi(x_1) = 0, \quad \phi(x_2) = 1$$

である．$t \wedge \sigma \equiv \min\{t, \sigma\}$ として，確率過程

$$M_t = \phi(X_{t\wedge\sigma}^x)$$

を考える．これは

$$M_t = \mathbb{E}\left[\phi(X_\sigma^x)\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

とも書ける．このとき

$$\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s, \quad 0 \leq^{\forall} s \leq t$$

が成り立つことは明らかである．つまり M_t はマルチンゲールである．

($\phi(x)$ の 2 回微分可能性を仮定して) 伊藤の公式を適用すると，BES_d の SDE (3) より

$$
\begin{aligned}
M_t &= \phi(x) + \int_0^{t\wedge\sigma} \phi'(X_s^x)\left[dB_s + \frac{d-1}{2}\frac{ds}{X_s^x}\right] + \int_0^{t\wedge\sigma} \frac{1}{2}\phi''(X_s^x)(dB_s)^2 \\
&= \phi(x) + \int_0^{t\wedge\sigma} \phi'(X_s^x)dB_s + \int_0^{t\wedge\sigma} \frac{1}{2}\left[\phi''(X_s^x) + \frac{d-1}{X_s^x}\phi'(X_s^x)\right]ds
\end{aligned}
$$

となる．M_t は局所マルチンゲールなので，有界変動部分 (ドリフト項) は零である．つまり

$$
\phi''(x) + \frac{d-1}{x}\phi'(x) = 0, \quad x_1 < x < x_2 \tag{10}
$$

という微分方程式が得られる．境界条件 $\phi(x_1) = 0$, $\phi(x_2) = 1$ も課すと，

$$
\phi(x) = \phi(x; x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x^{2-d} - x_1^{2-d}}{x_2^{2-d} - x_1^{2-d}} & d \neq 2 \text{ のとき} \\[2ex] \dfrac{\log x - \log x_1}{\log x_2 - \log x_1} & d = 2 \text{ のとき} \end{cases} \tag{11}
$$

と定められる．

(i)　$d > 2$ のとき，$2-d<0$ なので，(11) の上の式より，任意の $x_2 = L > x$ に対して

$$\begin{aligned}\phi(x;0,L) &\equiv \lim_{x_1\to 0}\phi(x;x_1,L)\\ &= \lim_{x_1\to 0}\frac{x^{2-d}-x_1^{2-d}}{L^{2-d}-x_1^{2-d}} = 1.\end{aligned}$$

つまり，$x > 0$ から出発した BES_d は，確率 1 で，原点より先に $L > 0$ に到達することになる．したがって，$T_x = \inf\{t>0 : X_t^x = 0\} = \infty$ である．
$d = 2$ のときは，(11) の下の式を用いて，同様に

$$\phi(x;0,L) = \lim_{x_1\to 0}\frac{\log x - \log x_1}{\log L - \log x_1} = 1$$

となるので，やはり $T_x = \infty$ である．

(ii) $\alpha > 1$ をとって，$x_k = \alpha^k x, k = 1, 2, 3, \dots$ とする．$d > 2$ では $2 - d \equiv \beta < 0$ であり，(11) より

$$\begin{aligned}\phi(x_k; x_{k-1}, x_{k+1}) &= \frac{x_k^\beta - x_{k-1}^\beta}{x_{k+1}^\beta - x_{k-1}^\beta} = \frac{\alpha^{k\beta} - \alpha^{(k-1)\beta}}{\alpha^{(k+1)\beta} - \alpha^{(k-1)\beta}} \\ &= \frac{\alpha^\beta - 1}{\alpha^{2\beta} - 1} = \frac{1}{\alpha^\beta + 1} > \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

である．1 次元格子 $\mathbb{Z} \equiv \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ 上のサイト $n > 0, n \in \mathbb{Z}$ から出発して，単位時間に右サイトにステップする確率が $p = 1/(\alpha^\beta + 1)$, 左サイトにステップする確率が $1 - p$ であるような**非対称な 1 次元ランダムウォーク**を考える．このような非対称な 1 次元ランダムウォークは非再帰的である．BES_d をこのような 1 次元非対称ランダムウォークと比較することにより，確率 1 で $X_t^x \to \infty, {}^\forall x > 0$ であることが結論される．

(iii)　(11) の $d = 2$ の式で，特に$x_1 = 1/n < x < x_2 = e^n$ とおくと，$n \to \infty$ で

$$\phi(x; 1/n, e^n) = \frac{\log x + \log n}{n + \log n} \longrightarrow 0$$

である．よって，任意の $n > 0$ に対して，X_t^x が $1/n$ に近づくことが分かる．

(iv)　$1 \leq d < 2$ のときは，$\lim_{x_1 \to 0} x_1^{2-d} = 0$ なので，(11) の上の式より，$L \to \infty$ で

$$\phi(x; 0, L) = \frac{x^{2-d}}{L^{2-d}} \longrightarrow 0.$$

よって，確率 1 で $T_x < \infty$ である． ∎

定理２の証明　次の関係に注意する。

補題　　$0 < x < y$ に対して，事象 $\{T_x = T_y\}$ と次の事象とは，確率 0 の部分を除いて等しい；

$$\sup_{t<T_x} \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} < \infty. \tag{12}$$

$0 < x < y$ に対して，次の確率過程を考える

$$Z_t = \log\left(\frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x}\right) = f(X_t^x, X_t^y), \quad t < T_x. \tag{13}$$

ここで　$f(x,y) = \log\{(y-x)/x\}$ である．

$$
\begin{aligned}
f_x(x, y) &= -\frac{1}{y-x} - \frac{1}{x}, \\
f_y(x, y) &= \frac{1}{y-x} \\
f_{xx}(x, y) &= -\frac{1}{(y-x)^2} + \frac{1}{x^2}, \\
f_{yy}(x, y) &= -\frac{1}{(y-x)^2}, \\
f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = \frac{1}{(y-x)^2}
\end{aligned}
$$

伊藤の公式を用いると

$$
\begin{aligned}
dZ_t &= f_x(X_t^x, X_t^y)\left[dB_t + \frac{d-1}{2}\frac{dt}{X_t^x}\right] + f_y(X_t^x, X_t^y)\left[dB_t + \frac{d-1}{2}\frac{dt}{X_t^y}\right] \\
&+ \frac{1}{2}\Big[f_{xx}(X_t^x, X_t^y) + 2f_{xy}(X_t^x, X_t^y) + f_{yy}(X_t^x, X_t^y)\Big]dt \\
&= -\frac{1}{X_t^x}dB_t + \left[\left(\frac{3}{2} - d\right)\frac{1}{(X_t^x)^2} + \frac{d-1}{2}\frac{X_t^y - X_t^x}{(X_t^x)^2 X_t^y}\right]dt \qquad (14)
\end{aligned}
$$

が得られる．ここで，次の関係を満たすように，**ランダムな時間変更** $t \to r$ を行う；$\int_0^{r(t)} \frac{ds}{(X_s^x)^2} = t$. つまり，$dr(t)/(X_{r(t)}^x)^2 = dt$ である．(14) を変更された後の時刻 $r(t)$ で考えると，

$$
dZ_{r(t)} = -\frac{1}{X_{r(t)}^x}dB_{r(t)} + \left[\left(\frac{3}{2} - d\right) + \frac{d-1}{2}\frac{X_{r(t)}^y - X_{r(t)}^x}{X_{r(t)}^y}\right]\frac{dr(t)}{(X_{r(t)}^x)^2}
$$

となるが，

ここで

$$\widetilde{B}_t = -\int_0^{r(t)} \frac{dB_s}{X_s^x}$$

とおくと,

$$(d\widetilde{B}_t)^2 = \frac{1}{(X_{r(t)}^x)^2}(dB_{r(t)})^2 = \frac{dr(t)}{(X_{r(t)}^x)^2} = dt$$

なので, $\widetilde{B}_t$ は BM である. そこで $\widetilde{Z}_t = Z_{r(t)}$ と書くことにすると

$$d\widetilde{Z}_t = d\widetilde{B}_t + \left[\left(\frac{3}{2} - d\right) + \frac{d-1}{2}\frac{X_{r(t)}^y - X_{r(t)}^x}{X_{r(t)}^y}\right] dt \tag{15}$$

という SDE が得られる.

(i) $\dfrac{3}{2} < d < 2$ のとき，$d' \in (3/2, d)$ を選び，

$$\varepsilon = \frac{2(d-d')}{d-1}$$

とおく．$y = (1+\varepsilon/2)x$ の場合を考えることにする．

$$\sigma = \inf\left\{t > 0 : X^y_{r(t)} - X^x_{r(t)} = \varepsilon X^y_{r(t)}\right\}$$

とする．すると $0 \le t < T_x \wedge \sigma$ では，$(X^y_{r(t)} - X^x_{r(t)})/X^y_{r(t)} \le \varepsilon$ なので，(15) のドリフト項の係数は

$$\left(\frac{3}{2} - d\right) + \frac{d-1}{2}\frac{X^y_{r(t)} - X^x_{r(t)}}{X^y_{r(t)}} \le \left(\frac{3}{2} - d\right) + \frac{d-1}{2} \times \frac{2(d-d')}{d-1} = \frac{3}{2} - d'$$

と上から抑えられる．

そこで

$$d\widetilde{Z}_t^* = d\widetilde{B}_t + \left(\frac{3}{2} - d'\right) dt, \quad \widetilde{Z}_0^* = \widetilde{Z}_0 = \log\frac{\varepsilon}{2}$$

に従う確率過程 $\widetilde{Z}_t^*$ を考えると,

$$\widetilde{Z}_t \leq \widetilde{Z}_t^*, \quad 0 \leq t < T_{x \wedge \sigma}$$

である．ところが $d' > 3/2$ としたので, $\widetilde{Z}_t^*$ のドリフト項の係数は負である．よって $\widetilde{Z}_t^*$ は $\log(\varepsilon/2)$ から出発したものの，永久に $\log\varepsilon$ の値に到達できないという確率が正であることになる．よって $\widetilde{Z}_t$ も $\log\varepsilon$ に到達できない確率も正である．よって，正の確率で

$$\log\left(\frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x}\right) < \log\varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} < \varepsilon$$

となり，事象 (12) が成立することになる．よって補題より,

$$\mathbb{P}(T_x = T_y) > 0$$

である.

(ii) $1 \leq d \leq \dfrac{3}{2}$ のときは，$3/2 - d \geq 0$ であり，また

$$\frac{X^y_{r(t)} - X^x_{r(t)}}{X^y_{r(t)}} > 0, \quad 0 \leq t < T_x$$

なので，ドリフト項の係数は正である．よって

$$\sup_{t<T_x} \widetilde{Z}_t = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_{t<T_x} e^{\widetilde{Z}_t} = \sup_{t<T_x} \frac{X^y_t - X^x_t}{X^x_t} = \infty$$

なので，補題より $\mathbb{P}(T_x = T_y) = 0$ である．∎

参考文献

G. F. Lawler, *Conformally Invariant Processes in the Plane*, (American Mathematical Society, 2005).

香取眞理, Summer School 数理物理 2009 「ベキ乗則の数理」における講義ノート(2009 年 8 月 27-29 日，東京大学大学院数理科学研究科，駒場)