# 形と方程式

大沢健夫
(名古屋大学多元数理科学研究科)

**要旨**　この講演*では近年注目されている一つの方程式について、その発見にいたるいきさつを説明し、方程式の具体的な形と有名な応用例に触れる。

**話の順序**

1．形の科学と数学
2．合同と相似
3．等角と等積
4．等角写像の基本定理
5．単葉関数論とレブナーの方程式
6．SLEとそのブラウン運動への応用

**1．形の科学と数学**　　形（かたち）とは、感覚、特に視覚・触覚でとらえ得る、ものの有様（ただし色は除外）をいう（広辞苑）。感覚がとらえた形を、脳はいろんな仕方で分類する。たとえば仏教では、眼に見られるものを〈いろ〉と〈かたち〉の２種に分かつ。そしてこの〈かたち〉のことを形色（ぎょうしき）と呼び、それには長・短・方・円・高・下・正・不正の８種があるとする（仏教辞典）。長と短、方と円が対をなすのは良いとして、高と下の対比は珍しいが、これは仏説無量寿経の漢訳に由来するようで、単に高低のことらしい。正・不正（しょう・ふしょう）は対称・非対称を自然に連想させるが、あるいはもっと広い意味かもしれない。いずれにせよ、形を科学する姿勢はブッダの教えの中にも窺える。

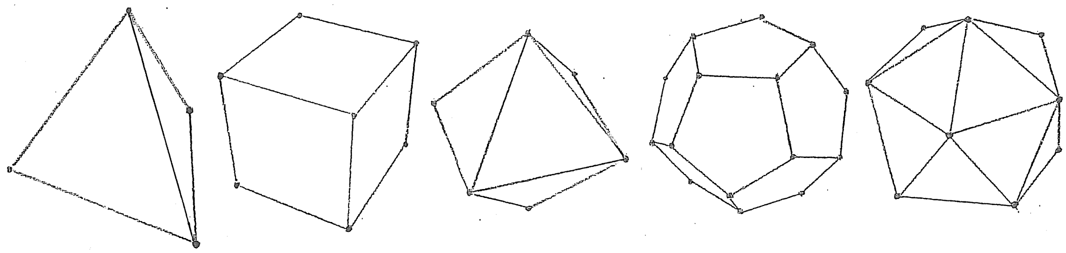
さて、対称な形は非対称な形に比べて数が少ないので、脳はこれらをさらに分類しようとする。これはもちろん一朝一夕に片付くような簡単な仕事ではなく、そのために脳は数学の世界で自己拡張を遂げねばならなかった。たとえば正多面体が５種類しかないことは紀元前４世紀頃の成果として有名だが、高次元の正多面体の分類が緒に就いたのは19世紀中頃のことだった。それ以来、3次元に限らず一般次元の多面体についても多くのことが解明されてきた。たとえば現在知ら

---

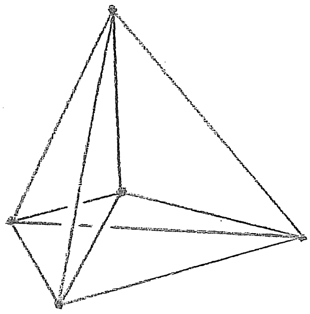
*) この論説は、筆者が2010年1月23日に「日本数学コンクール・フォローアップセミナー」（数理ウェーブ）で行なった1時間の講演のレジュメとして書いたものに、編集部の意見を参考にして多少加筆したものである。

れている有名な結果に、“単体以外の自己双対な正多面体は４次元空間内の正24面体に限る” がある。ただし単体とは（次元＋１）個の頂点を持つ多面体をいい、自己双対とは各面の重心を頂点とする多面体と相似であることをいう。

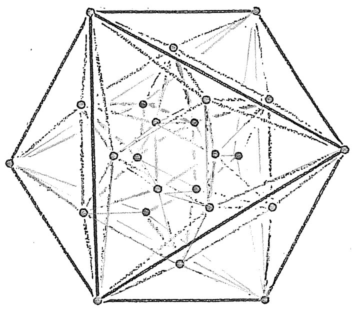
正多面体（正４面体＝３次元正単体）



４次元正５面体の射影図



４次元正24面体の射影図



後の二つの図のように、４次元の多面体は３次元空間に落とした影を通じてその姿を観察できる。4次元正５面体なら、頂点の影である5つの点のうち4つを結んでできる4面体が面の影であり、4次元正24面体の面は3次元正8面体なので、影も8面体となる。

このような知見に達するために必要だったのは感覚世界を拡げた上での新しい視点であり、脳はそれを獲得するために２０００年余を要したわけである。ちなみに、その過程で上の８種の形色に属さないものが発見された。それは連結性、すなわち「つながり具合」である。対語表現で言えば「連・離」ともいうべきか。この連結性を形の一つの要素と認定することから位相幾何学（＝トポロジー）という新しい数学が始まった。オイラーによる一筆書きの問題の解（ケーニヒスベルクの橋）や多面体定理の発見は位相幾何学の初期の成果としてあまりにも有名である。

**２．合同と相似**　　以前、早熟の天才としても有名だった映画監督のH氏が、幼稚園の入園試験で二つの人形の違いを正しく答えられなかったときの体験談を週刊誌で披露していた。それによると、H氏が手に取らされた二つの人形は、大きさ（だけ）が違うものだったのだが、H氏がいくら良く見ても触っても、それらの違いを言い表す言葉は浮かんで来なかった。困りはてたH氏が言ったのは、「製造元でも違うのですか？」だったという。

これは極端な例だが、私たちが何と何を同じものと見なすかは平素の生活環境に左右される。始終右や左へ自身やものを動かして生活している私たちにとって、平行移動や回転、あるいはそれらの合成（＝組み合わせ）によってぴったり重なる二つの図形を同一視することは自然である。このような、いわゆる互いに合同な図形について、その相違点を挙げよと言われたら、私たちは困惑してしまうだろう。もしそうなれば、それこそH氏を見習って図形の来歴でもあげつらうしかないのではなかろうか。

ちなみにユークリッドの幾何学では、鏡映によって重なるもの同士も合同であるとするが、光学異性体が文明の利器となった現在、そうすることが妥当かどうかは明白ではない。数学的には、２つの立場の違いは空間に向きをつけるかどうかでしかないが。

合同の他に相似も有用な概念である（三角測量）。H氏は合同概念の前に相似概念を身に付けていたのかもしれない。ところで合同と相似は形色の分類には含まれない。形色が感覚結果の単なる表現であるのに対し、合同と相似はその表現をさらに整理・統合するために用いられる概念だからである。実際、長短の区別が合同に、方円の区別が相似につながることは明らかであろう。この意味で数学は高次の認識に関わっている。

１９世紀になると、ガウス、ボヤイ、ロバチェフスキーらにより非ユークリッド幾何が発見され、L.シュレーフリ(1814-1895)らによって高次元の幾何学が緒に就いた。その結果、合同と相似の概念がユークリッド幾何に固有のものではないことが判明した。そして古い考えにとどめを刺すように、図形をどの特徴によって区別するかによって様々な幾何学が成立しうることを、F.クライン(1849-1925)は高らかに宣言したのであった（エルランゲンプログラム）。たとえば位相幾何学においては、連続的な変形で移りあうもの同士は区別しない。この幾何学では８種の形色は意味をなさず、ボタンの穴の数のようなものが図形を区別するための重要な指標になる。位相幾何学では「同相（ホメオモルフィック）」が合同に相当する基本概念である。

**３．等角と等積**　　ものの形のどこに眼を付けて区別するかは必要に応じて変わりうるわけだが、地図の作製法である等角図法と等積図法はその事情を良く表す具体例である。学校の地理の授業で習うメルカトール図法は、地球上の緯線と経線を、それぞれ水平方向と垂直方向に写し取っているが、経線同士の間隔が経度差に比例するのに対し、緯線同士の間隔は緯度差に比べて両極に近づくにつれ急激に拡大する。これは、地球上で交わる二つの曲線のなす角度を、写し取られた曲線たちのなす角度と等しくするための工夫である。このように、角度を正しく写し取る図法を等角図法と呼ぶ。良く知られているように、等角図法は船舶が目的地への正しい方向を知る必要から生まれたが、赤道付近で形の歪みが少ないことも長所である。これに対し、等積図法とは面積比を正しく写し取るものである。これは広さの比較が重要な場合に用いられる。たとえば月ごとの平均気温の分布図などである。

地図の用途はともかくとして、数学的な視点からこれらの違いに触れておこう。メルカトール図法によって、両極を除いた球面は、無限に長い円柱の側面に写像される。「写像する」は「写し取る」や「撮影する」を数学的な言葉で言ったものである。「撮影」に対応する言葉が「写像」である。角度を保つ写像を等角写像と言う。一般に、２点を除いた球面から無限に長い円柱の側面への等角写像が二つあるとすれば、一方で写像した後、円柱を自身に写す回転と平行移動を適当に組み合わせれば他方で写像した結果に一致する。このように、等角写像はそのバリエーションが限られる。等角図法に比べると、等積図法のパターンはずっと多い。よく地理の教科書に載っている有名なものだけでも、「モルワイデ図法」、「ランベルト正積方位図法」、「ボンヌ図法」、「サンソン図法」の４通りがある。これは写像の等積性が等角性に比べてずっと弱い条件だからである。たとえば地球の1/3をモルワイデ図法で、1/3をサンソン図法で描き、残りをその中間的なものでつなぐということも原理的には可能である。それが実在しないのは、労力に見合うものがないからにすぎない。面積の等しい平行四辺形同士が互いに相似であるとはいえないことからも、等積性の条件が等角性に比べて緩いことは明らかであろう。もっと詳しく言うと、一つの写像によって、１点のごく近くでは、ごく小さい正方形は平行四辺形にごく近い図形に写像される。ごく小さい正方形の像が正方形にごく近い形なら、写像は等角であり、ごく小さい正方形とその像の面積比が１ならば、写像は等積である。

**４．等角写像の基本定理**　　上で述べたように、等角写像は等積写像に比べて希少価値がある。そこでいきおい、脳は等角写像の方を分類しようとする。

1851年11月14日、B.リーマン(1826-1866)は、大数学者C.ガウスのもとで書いた「複素一変数の関数の一般的理論のための基礎」という題の学位論文を、ゲッチンゲン大学に提出した。その中で展開した新しい理論の一つの応用として、リーマンは、一つの曲線で囲まれた図形の内部から、他の任意の（閉じた）曲線の内部への等角写像が存在し、さらにその等角写像は図形内部の一点の行き先と境界上の一点の行き先を勝手に決めたとき、一つだけ作れると述べた。原文は以下の通り。

Zwei gegebene einfach zusammenhängende ebene Flächen können stets so auf einander bezogen werden, dass jedem Punkte der einen Ein mit ihm stetig fortrückender Punkt der andern entspricht und ihre entsprechenden kleinsten Theile ähnlich sind; und zwar kann zu Einem innern Punkte und zu Einem Begrenzungspunkte der entsprechende beliebig gegeben werden; dadurch aber ist für alle Punkte die Beziehung bestimmt.

笠原乾吉氏による和訳：　二つの与えられた単連結で平らな面は、つねに次のような仕方で対応させることができる。一方の各点に対してそれとともに連続的に動く他方の点が対応し、その対応は極小部分において相似である。しかも、一つの内点と一つの境界点に対しては対応する点を任意に与えうるが、それによってすべての点の対応が決まってしまう。

この定理は等角写像の基本定理またはリーマンの写像定理と呼ばれる有名かつ有用な結果であるが、現代の理工系の学生たちが読むテキストではたとえば次のような述べかたがされている。

L.アールフォース著「複素解析」（笠原乾吉訳）より：

## 第６章　等角写像とディリクレ問題

解析関数論の幾何学的な部分において等角写像の問題は決定的な役割を果す．存在と一意性定理により重要な解析関数が解析的表現によることなしに定義できるし、写しあう領域の幾何学的性質から写像関数の解析的な性質がわかる．

リーマンの写像定理は単連結領域を単連結領域の上へ写す写像に関するものである．正規族の理論を用いて証明を与えよう．．．．

### １．リーマンの写像定理

単位円は任意の全平面の単連結真部分領域の上へ等角に写しうることを示す．．．．

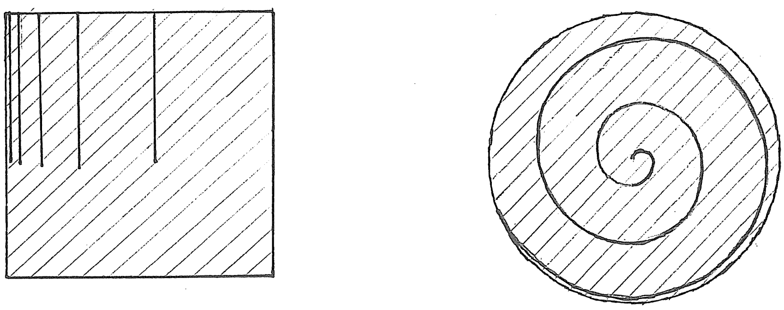
**1.1．定理と証明**　リーマンがこの写像定理を定式化したのだけれども、証明にはじめて成功したのはP.ケーベである．ここで行う証明は原証明をもっと簡単にしたものである．

**定理１**　全平面とは異なる任意の単連結領域Ωとの任意の点$z_0$に対し、Ωを単位円｜w｜＜１の上へ１対１に写す解析関数 f(z) で、$f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ をみたすものが唯一つ存在する．

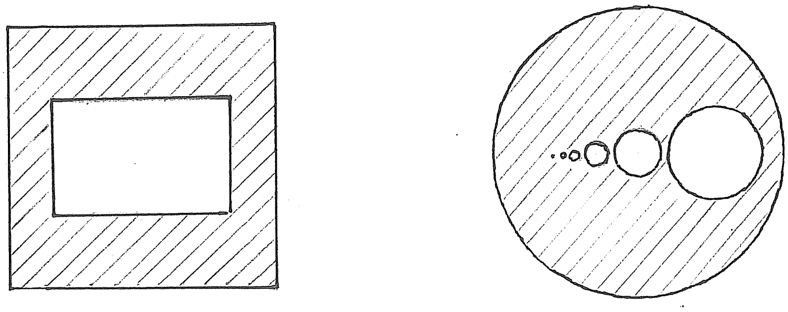
一意性の証明は容易である．．．．

定理１はリーマンが述べた形とは違うが、実質的には同等である。言葉遣いの違いを補っておくと、全平面とは単に平面のことで、領域とは平面上の点の集まりで、その中の任意の点がそれにごく近い平面上の点およびその中の他の任意の点と、その中だけを通る一つながりの曲線で結べるものをいう。また単連結領域とは一つの曲線で囲まれた図形を一般化したもので、内部の任意の曲線が内部だけで連続的に１点に変形できるものをいう。単連結領域の例としては、一つの曲線で囲まれた領域の他にも平面から半直線を一本除いたものなどがある。

単連結領域の例

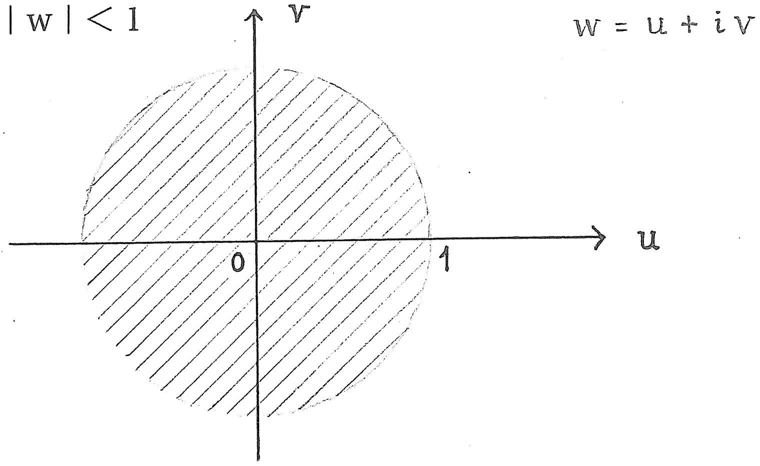


単連結でない領域の例



単位円を｜w｜＜１と書くのは平面を複素数 w 全体の集合と同一視するからである。｜w｜はwと０との距離を表すので、条件｜w｜＜１はwが原点w＝０を中心とする半径が１の円周の内部にあるという意味になる。

単位円　｜w｜＜１




また、解析関数とはz平面の領域からw平面の領域への写像であって、定義域の各点のごく近くではzの多項式にごく近い関数をいう。$f(z)$ がzの多項式なら $f'(z)$は 演算規則 $1'=0$, $z'=1$, $(P(z)+Q(z))'=P'(z)+Q'(z)$ および $(P(z)Q(z))'=P'(z)Q(z)+P(z)Q'(z)$ で定まるが、解析関数に対してもこの演算は自然に拡張される。解析関数 f は点$z_0$のごく近くでは一次関数 $f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)$ にごく近く、従って $f'(z_0)$ の幾何的な意味は $z_0$ における f の伸縮・回転度である。定理１における条件 $f'(z_0)>0$ は、リーマンが述べた定理においては境界点の行き先を指定することに相当する。

**５．単葉関数論とレブナーの方程式**　　定理１からも窺えるように、等角写像の理論を複素関数の理論の中で基礎づけることができる。等角写像は特別な解析関数と見なされるので、これは単葉関数とも呼ばれる。単葉関数論はP.ケーベ(1882-1945)、L.ビーベルバッハ(1886-1982)、R.ネヴァンリンナ(1895-1980)らによって展開された。単葉関数論の重要な問題を解く手段として考案されたのがレブナーの方程式である。これについて数学辞典（第４版）に従って述べれば以下の通りである。

z 平面の単位円｜z｜＜１を定義域とする解析関数 $f(z)$ があるとする。このとき $f(z)$ は

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

のように、$|z|<1$ で収束する無限級数に展開される（$f(z)$ の $z=0$ でのテイラー展開）。

定理１の条件に準じて、$f(0)=0$ かつ $f'(0)=1$ と仮定する（つまり $a_0=0$ かつ $a_1=1$）。このときさらに $f(z)$ が単葉であればテイラー展開の係数 $a_n$ は不等式 $|a_n|\leq n$ をみたすだろうと、ビーベルバッハは予想した(1916)。（ビーベルバッハ自身は $|a_2|\leq 2$ を示した。）

この予想は長く一変数関数論の中心的な未解決問題であったが、すぐれた部分的解決を含む多くの人々の挑戦の末、ついに1984年、L.ドブランジュ(1932-)によって肯定的に完全に解決された。その方法はレブナーの方程式とある特殊関数の和の正値性を用いるものである。

**レブナーの方程式：** 単位円上の単葉関数に対してビーベルバッハ予想を示すには、（十分多くの）特別なものに対して示せれば十分である。そのような特別な単葉関数として、単位円の像が一点から無限に伸びる半曲線を平面から除いたものになっているものが取れる。この半曲線の助変数表示 $\gamma(t)$ $(0\leq t<\infty)$を、単位円から半曲線の一部である $\gamma([t,\infty))$ の外部への等角写像 $g_t(z)$ が $g_t(0)=0$ かつ $g_t'(0)=e^t$ となるように取れることが、解析関数の基本的性質を用いると簡単に分かる。こうすると、絶対値が１であるような連続関数 $\kappa(t)$が存在して、関数 $f(z,t)=g_t^{-1}(f(z))$ はレブナーの（微分）方程式

$$\partial f(z,t)/\partial t=-f(z,t)\{1+\kappa(t)f(z,t)\}/\{1-\kappa(t)f(z,t)\}\quad(0\leq t<\infty)$$

の初期条件 $f(z,0)=z$ の下での解になっており、

$$t\longrightarrow\infty \text{ のとき } e^t f(z,t)\longrightarrow f(z)$$

となる。このようにしてC.レブナー(1893-1968)は1923年、ビーベルバッハ予想を最適制御の問題に置き換えて $|a_3|\leq 3$ を証明した。

## ６．SLEとそのブラウン運動への応用

2000年、O.シュラム(1961-2008)はレブナー方程式を解くことによってランダムに時間発展する等角写像を求める問題を考えた。具体的には、上のレブナー方程式と等価で、より簡単な形をした方程式（これもレブナー方程式という）において、$\kappa(t)$ にあたる関数としていわゆるブラウン運動を考えることにより、「これこれの確率でレブナー方程式の解はしかじかの性質を持つ」という理論を展開したのである。ブラウン運動とは何かと言えば、数学的に厳密な定義は確率論に基礎を置くものでそう簡単ではないが、直感的には始終一定の確率で右往左往する点の運動である。このような設定

で、ブラウン運動の速度で類別されたレブナー方程式の解のことを、シュラムは確率レブナー発展（Stochastic Loewner Evolution)、略してSLEと呼んだ。SLEは後にSchramm Loewner Evolutionと呼ばれるようにもなった。

シュラムの試みは成功し、臨界現象に現れる様々なフラクタル集合のSLEによる統一的な記述は数理物理学者たちを驚かせた（香取真理著「臨界現象・フラクタル研究の新世紀—SLEの発見—」より）。SLEはさらにB.マンデルブロー(1924-)の4/3予想の解決という著しい成果をもたらし、数学者たちを喜ばせた。

**マンデルブローの4/3予想：** 平面上のブラウン運動で平面がいくつかの領域に区切られるとした時、一番外側の領域の境界のハウスドルフ次元は確率１で4/3である。

（ハウスドルフ次元の定義については数学辞典または「フラクタル数学」（石村貞男・石村園子著、東京図書　1990)を見よ。）

これらの結果はシュラムとG.ローラーおよびW.ウェルナー(1968-)の共同研究として2001年に発表され、その功績により若きウェルナーは2006年度のフィールズ賞を受賞した。確率論の分野では初めてのことである。ちなみに確率微分方程式の研究で名高い伊藤清氏(1915-2008)に、この時第１回ガウス賞が授与された。（シュラムの上記の論文には1961年の伊藤氏の講義録が引用されている。）その後日本では確率論の研究者たちを中心にSLEへの関心が高まり、シュラムらの仕事が研究集会等で詳しく紹介されるようになった。

SLE理論の本来の動機は統計物理の問題である。種々の２次元格子モデルがスケール極限を通じて等角写像と関連することから（共形不変性）、それらを統一的に記述する手段を探ろうとしたことが出発点だった。シュラムは「離散的なモデルと連続的なモデルの関係を具体的に、精密にしていくべく努力するのが数学者の仕事である。」と述べている。「連・離」の種から育った数学は位相幾何だけではなかったようである。

微粒子たちの動きを司るミクロな法則を宇宙の構造を決定するマクロな法則につなげるのが統計物理である。宇宙の初期の状態では物質の構成要素であるクォークたちがブラウン運動に近い動きをするようなので、ひょっとするとSLE理論は将来、宇宙の起源の解明に役立つのかもしれない。いずれにせよ、ブッダからSLEまでの展開を大ざっぱに振り返ってみた後で、脳というものは実にたいしたものだなあと、遠い日にリーマンの写像定理を知って驚嘆した小さな一生体内の脳の装置は、しばらく感慨にふけるのである。

**謝辞：**本稿がこのような場で想定外の読者を得ることができたのは、ひとえに高田宗樹氏と清水祐樹氏のお力添えによるものであり、ここに記して感謝の念を表明したい。

追記：　この原稿の掲載が決定してから、畏友尾畑伸明氏（東北大学大学院・情報科学研究科・教授）に興味深い事実を教えて頂いたので、それを以下に記す。

１．複素関数 $w = z/(1+z)^2$ はケーベ関数の名で知られる単葉関数であり、単位円をスリットの入った平面 $\{ z = x+iy \mid y \neq 0$ または $x < 1/4 \}$ に等角に写像する。

２．ケーベ関数の逆関数をマクローリン展開すると、その係数は(定数項を除き）カタラン数と呼ばれる数列になる。

３．カタラン数の初めの数項は

$C_0 = C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, C_5 = 42, C_6 = 132, \ldots$

であり、一般には

$$C_m = \frac{(2m)!}{(m+1)!\,m!}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

によって定義される。（カタランは19世紀のフランスの数学者である。）

４．カタラン数はランダム・ウォークの理論で有用である。

このいきさつについても少し。2010年2月12日～14日に勉強会「Loewner方程式とSLE」（科研費・挑戦的萌芽研究「Loewner方程式 の幾何学的函数論および確率過程への応用」19654027（代表者：須川敏幸）の補助による)が鳴子温泉で開かれた。そこで筆者がレブナー方程式を複素変数に拡げることの意味について講演したとき、マクラとしてケーベ関数の逆関数の表示

$$z = \frac{1 - \sqrt{1-4w}}{2w} - 1$$

に触れたが、この話を聴いていらした尾畑氏からすぐに手紙で、著書である「量子確率論の基礎」（牧野書店、明出伊類似（=Luigi Accardi)氏と共著）の第144～147ページのコピーを添えてご教示いただいたのが上記の２～４である。ブラウン運動はランダム・ウォークの極限とも見なせるので、この関連をSLEの観点からもっと詳しく追求してみると面白いかもしれない。