

Radial and Chodal Loewner Equation I

堀田 一敬 HOTTA, IKKEI

2010年2月13日 (Sat.)

東北大学大学院 情報科学研究科 情報基礎科学専攻 博士後期課程3年

Preliminaries

Preliminaries

Loewner's Method

Conformal Evolution

Applications

- $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$
- $\mathbb{D}^* := \widehat{\mathbb{C}} - \overline{\mathbb{D}}$
- $\mathcal{A} = \{f : f \text{ は } \mathbb{D} \text{ 上正則, } f(0) = 0, f'(0) = 1\}$
 $\implies f \in \mathcal{A}$ は展開式 $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ を持つ
- $\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{A} : f \text{ は } \mathbb{D} \text{ 上単葉 (1対1)}\}$

Theorem (Koebe の 1/4 定理)

任意の $f \in \mathcal{S}$ に対して, $f(\mathbb{D})$ は原点中心, 半径 $1/4$ の円板を必ず含む.

このとき極値関数は Koebe 関数

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots$$

とその回転によって与えられる. 実際, $K(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$ である.

Theorem (Bieberbach, 1916)

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S} \text{ に対して, } |a_2| \leq 2 .$$

さらに Bieberbach は同論文の脚注に次のように記す “Vielleicht ist überhaupt $k_n = n$.”;

Conjecture (Bieberbach, 1916)

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S} \text{ に対して, } |a_n| \leq n .$$

- $n = 3$, Loewner(1923)
- $n = 4$, Garabedian and Schiffer(1955)
- $n = 6$, Pederson(1968) , Ozawa(1969)
- $n = 5$, Pederson and Schiffer(1972)
- all n , de Branges(1985)

Loewner's Method

Theorem (Riemann の写像定理)

境界が 2 点以上からなる単連結領域 G , $G' \subsetneq \mathbb{C}$ と任意の点 $z_0 \in G$, $z'_0 \in G'$ に対し, G を G' に写すような等角写像 f で $f(z_0) = z'_0$, $f'(z_0) > 0$ を満たすようなものが一意に存在する.

Problem

S の全ての関数を記述する $\cong \mathbb{C}$ の全ての単連結領域を記述する

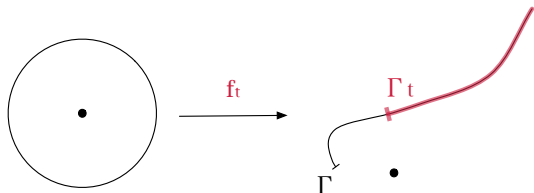
Theorem

S の \mathbb{D} を one-slit domain に写すような関数全体の集合は S 上広義一様収束の位相で稠密である.

Problem (revisited)

S の全ての one-slit maps を記述する

- $t \in [0, \infty)$ とする
- $\Gamma : \mathbb{C}$ 上の Jordan 曲線, 端点の一方は無限遠点に延びる.
- Γ を $\Gamma(t) = \Gamma(t, \infty)$ のように parametrization すると,
 $0 \leq s < t < \infty$ に対して $\Gamma(s) \supseteq \Gamma(t)$. つまり時間 t の経過により
 短くなるような曲線となる.



- \mathbb{D} を $G(t) = \mathbb{C} \setminus \Gamma(t)$ に写すような等角写像 $f_t(z)$ が存在する.
 さらに Γ の適当な parametrization を選ぶ事により, f_t を
 $f_t(z) = e^t z + a_2(t)z^2 + \dots$ のような展開を持つようにできる.

Theorem (Loewner, 1923)

$f \in \mathcal{S}$ を *one-slit map* とする . そのときある $[0, \infty)$ 上の実数値連続関数 U_t と \mathcal{S} の関数 $f_t(z) = e^t z + a_2(t)z^2 + \dots$ が存在し , 全ての $z \in \mathbb{D}$ とほとんどすべての $t \in [0, \infty)$ に対して次の微分方程式を満たす ;

$$\dot{f}_t(z) = z f'_t(z) \frac{1 + e^{iU_t} z}{1 - e^{iU_t} z}, \quad f_0(z) = f(z), \quad (1)$$

ここで $\dot{f}_t = \partial f_t / \partial t$, $f'_t(z) = \partial f_t / \partial z$ である .

Remark : \dot{f}_t の存在性は f_t の絶対連続性より従い , f_t の絶対連続性は $f'_t(0) = e^t$ より従う .

Loewner はこの微分方程式を用い , Bieberbach 予想の $n = 3$ のケースを肯定的に示した .

$n = 2$ のとき

- $\kappa(t) := e^{iU_t}$ とおく . $f_t(z) = e^t z + a_2(t)z^2 + \dots$ より

$$\begin{cases} \dot{f}_t(z) = e^t z + \dot{a}_2(t)z^2 + \dots \\ f'_t(z) = e^t z + 2a_2(t)z + \dots \end{cases}, \quad \frac{1 + \kappa(t)z}{1 - \kappa(t)z} = 1 + 2\kappa(t)z + \dots .$$

これより (1) の両辺の z^2 の係数を比べると

$$\dot{a}_2(t) = 2a_2(t) + 2\kappa(t)e^t$$

が得られる . この微分方程式を解いて計算することにより

$$a_2(t) = -2e^{2t} \int_t^\infty e^{-\tau} \kappa(\tau) d\tau$$

が得られる . よって

$$|a_2| = |a_2(0)| \leq 2$$

となる .

Conformal Evolution

- $\mathbb{D}_r = \{z : |z| < r\}$ とする .
- $f_t(z) = f(z, t) = e^t z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(t) z^n$ を $\mathbb{D} \times [0, \infty)$ 上定義された関数とする .

Definition

次の性質を満たすような $f_t(z)$ を Loewner chain という;

- 各々の $t \in [0, \infty)$ に対し, $f_t(z)/e^t \in \mathcal{S}$,
- $0 \leq s < t < \infty$ に対し, $f_s(\mathbb{D}) \subsetneq f_t(\mathbb{D})$,

Lemma

$f_t(z)$: Loewner chain に対して, 原点に関する核収束の意味で $t_n \rightarrow t_0 \in [0, \infty)$ のとき $f_{t_n}(\mathbb{D}) \rightarrow f_{t_0}(\mathbb{D})$, また $t_n \rightarrow \infty$ のとき $f_{t_n}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ である .

Theorem (Pommerenke, 1965)

$0 < r_0 \leq 1$ とし, $f(z, t) = e^t z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(t) z^n$ を $\mathbb{D} \times [0, \infty)$ 上定義された関数とする. そのとき $f(z, t)$ が Loewner chain であるための必要十分条件は次の 2 条件が満たされることである;

- ① $f(z, t)$ は各々の $t \in [0, \infty)$ に対して $z \in \mathbb{D}_{r_0}$ について解析的, 各々の $z \in \mathbb{D}_{r_0}$ に関して $t \in [0, \infty)$ について絶対連続であり, ある定数 K_0 が存在して

$$|f(z, t)| \leq K_0 e^t \quad (z \in \mathbb{D}_{r_0}, t \in [0, \infty))$$

が成り立つ.

- ② 関数 $p(z, t)$ が存在し, 各々の $t \in [0, \infty)$ に関して $z \in \mathbb{D}$ について解析的, 各々の $z \in \mathbb{D}$ に関して $t \in [0, \infty)$ 上可測であり

$$\operatorname{Re} p(z, t) > 0 \quad (z \in \mathbb{D}, t \in [0, \infty)), \quad p(0, 1) = 1$$

を満たし,

$$\dot{f}(z, t) = z f'(z, t) p(z, t) \quad (z \in \mathbb{D}_{r_0}, \text{ a.e. } t \in [0, \infty)) \quad (2)$$

が成立する. ここで $\dot{f} = \partial f / \partial t$, $f' = \partial f / \partial z$ である.

- (2) を (Classical) Loewner equation と呼ぶ .
- $\mathcal{P} = \{p : p \text{ は } \mathbb{D} \text{ 上解析的 , } p(0) = 1 , \operatorname{Re} p(z) > 0\}$

Theorem(Pommerenke, 1965)

$p(z, t)$ を , 各々の $t \in [0, \infty)$ に対して $p \in \mathcal{P}$, t に関して可測な関数とする . そのとき各々の $z \in \mathbb{D}$ と $t \in [0, \infty)$ に対して

$$\frac{dw}{dt} = -wp(w, t) \quad (\text{a.e. } t \in [s, \infty)) \quad (3)$$

は絶対連続解 $w(t)$ で初期条件 $w(s) = z$ を満たすようなものを一意に持つ . この解を $w(t) = \phi_{s,t}(z)$ と記すことにすると , $\phi_{s,t}(z)$ は \mathbb{D} 上正則単葉であり ,

$$f(z, s) := \lim_{t \rightarrow \infty} e^t \phi_{s,t}(z) \quad (4)$$

が局所一様に存在して , さらにこれが (2) を満たす Loewner chain となっている .

逆に $f_t(z)$ を Loewner chain とし $\phi_{s,t}(z) := f_t^{-1}(f_s(z)) = e^{s-t}z + \dots$ と定義すると , これは $[s, \infty)$ 上 a.e. に (3) を満たし , (4) が成り立つ .

Example 01.

$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ が \mathbb{D} 上単葉かどうか調べる .

• $K_t(z) = \frac{e^t z}{(1-z)^2}$ とおく .

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{K}_t(z) = \frac{e^t z}{(1-z)^2} \\ K'_t(z) = e^t \frac{1+z}{(1-z)^3} \end{cases} \Rightarrow p(z, t) = \frac{\dot{K}_t(z)}{zK'_t(z)} = \frac{1-z}{1+z}$$

よって $K_t(z)$ は Loewner chain となり , 特に $K_0(z) = K(z)$ は単葉である .

Example 02.

単葉性判定条件を導き出す

 $f \in \mathcal{A}$ に対し,

$$f_t(z) = f(z) + (e^t - 1)z$$

とおく. 計算により

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(z, t)} &= \frac{zf'_t(z)}{\dot{f}_t(z)} = \frac{z(f'(z) + (e^t - 1))}{e^t z} \\ &= \frac{1}{e^t} f'(z) + \left(1 - \frac{1}{e^t}\right) \end{aligned}$$

となる. つまり $f'(z)$ の実部が正であれば $f_t(z)$ は Loewner chain となり, 特に $f_0(z) = f(z)$ は単葉となる.

Theorem (能代-Warschawski の定理)

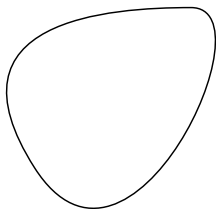
$f \in \mathcal{A}$ が全ての $z \in \mathbb{D}$ に対し $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ を満たすとき, f は \mathbb{D} 上単葉である.

Example 03.

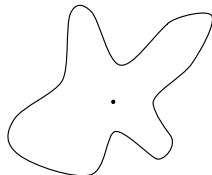
単葉関数族 S の古典的な部分族と結びつける

Definition

$f \in S$ に対し，その像領域が凸領域であるようなもの全体を K で記す．
また，像領域が原点に関する星状領域，つまり領域内の任意の点と原点とを結ぶ線分がその領域に完全に含まれるような領域であるようなもの全体を S^* で記す．



凸領域



星状領域

Theorem

$f \in \mathcal{K}$ であるための必要十分条件は

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0 \quad (z \in \mathbb{D})$$

である .

$f \in \mathcal{S}$ に対し

$$f_t(z) = f(z) + (e^t - 1)zf'(z)$$

とおくと

$$\begin{cases} \dot{f}_t(z) = e^t z f'(z) \\ \dot{f}'_t(z) = f'(z) + (e^t - 1)(f'(z) + z f''(z)) \end{cases}$$

であるので ,

$$\frac{1}{p(z, t)} = \frac{z \dot{f}'_t(z)}{\dot{f}_t(z)} = \frac{1}{e^t} + \left(1 - \frac{1}{e^t}\right) \left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}\right)$$

となる .

Theorem

$f \in \mathcal{S}^*$ であるための必要十分条件は

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0 \quad (z \in \mathbb{D})$$

である .

$f \in \mathcal{A}$ に対し

$$f_t(z) = e^t f(z)$$

とおくと

$$\frac{1}{p(z, t)} = \frac{zf'_t(z)}{\dot{f}_t(z)} = \frac{zf'(z)}{f(z)}$$

となる . よって星状関数は単葉であることがわかる .